

УДК 533.9

## НИЗКОЧАСТОТНЫЙ НЕПРЕРЫВНЫЙ МГД-СПЕКТР ТОРОИДАЛЬНО-ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛАЗМЫ В ТОКАМАКЕ С АНИЗОТРОПНЫМ ДАВЛЕНИЕМ

© 2019 г. В. П. Лахин<sup>a, b</sup>, Е. А. Сорокина<sup>a, b, \*</sup><sup>a</sup> НИЦ “Курчатовский институт”, Москва, Россия<sup>b</sup> Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

\*e-mail: sorokina.ekaterina@gmail.com

Поступила в редакцию 18.06.2018 г.

После доработки 19.09.2018 г.

Принята в печать 20.09.2018 г.

В рамках модели Чу–Голдбергера–Лоу получены уравнения, описывающие идеальные низкочастотные магнитогидродинамические (МГД) моды непрерывного спектра в тороидально-вращающейся плазме с анизотропным давлением в осесимметричных токамаках. В системе координат, вращающейся с плазмой, эти уравнения описывают тороидальное зацепление альфвеновских и медленных магнитозвуковых мод, обусловленное кривизной силовых линий магнитного поля, анизотропией давления плазмы, центробежными и кориолисовыми эффектами. Выведенные общие уравнения использованы для исследования спектров как зональных течений, так и общих электромагнитных мод в токамаках с низким давлением и большим аспектным отношением. Получено условие возникновения неустойчивости зональных течений, обусловленной стратификацией плазмы по полоидальному углу на магнитной поверхности. Продемонстрировано, что аналогичная неустойчивость имеет место и для общих электромагнитных мод при их локализации вблизи рациональных магнитных поверхностей. Показано, что для мод, локализованных на удалении от рациональных магнитных поверхностей, неустойчивость стабилизируется альфвеновским эффектом.

DOI: 10.1134/S0367292119020069

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В современных установках с магнитным удержанием (в токамаках, стеллараторах) широко используются различные методы мощного дополнительного нагрева плазмы, такие как нагрев инжектируемыми пучками нейтральных частиц, ионно-циклотронный резонансный нагрев (ИЦРН), электронно-циклотронный резонансный нагрев (ЭЦРН). Таким образом достигаются высокие температуры плазмы,  $T_i \geq 10$  кэВ, при которых существенно падает частота кулоновских столкновений частиц плазмы. Из-за этого скорость инжекции дополнительной энергии в параллельные или перпендикулярные по отношению к магнитному полю движения частиц может превышать скорость столкновительной изотропизации температуры плазмы. Поэтому зачастую мощный дополнительный нагрев плазмы приводит к сильной анизотропии ее давления (см., например, [1]). Сильную анизотропию давления плазмы наблюдали как в более ранних экспериментах [2–5], так и в некоторых современных установках [6–10].

Как и можно было ожидать, тангенциальная инжекция мощных пучков нейтральных частиц приводит к тому, что продольное давление плазмы  $p_{\parallel}$  превосходит ее поперечное давление  $p_{\perp}$ ,  $p_{\parallel} > p_{\perp}$ . Такая анизотропия зафиксирована в экспериментах на стеллараторах CHS и LHD. В стеллараторе CHS при тангенциальной инжекции нейтральных пучков достигалось отношение давлений  $p_{\parallel}/p_{\perp} = 3$  [5]. Позднее аналогичный уровень анизотропии наблюдался в разрядах с низкой плотностью плазмы и мощной инжекцией пучков нейтральных частиц в стеллараторе LHD [7–9].

Анизотропия давления плазмы фиксировалась и в экспериментах на современных токамаках. Так, например, анализ данных диагностики на токамаках JET и Tore Supra при мощном дополнительном нагреве плазмы выявил большую разницу между продольным и поперечным давлениями: отношение  $p_{\perp}/p_{\parallel}$  доходило до 3 в некоторых разрядах на JET с инжекцией пучков нейтральных частиц и с волнами на резонансной ионно-циклотронной частоте (ion cyclotron resonance fre-

quency waves, ICRF) [4] и  $p_{\perp}/p_{\parallel}$  до 2 в разрядах на Tore Supra с мощным нагревом ICRF волнами [6]. Также высокая степень анизотропии  $p_{\perp}/p_{\parallel} \approx 1.7$  была обнаружена в сферическом токамаке MAST в разрядах с нагревом пучками нейтральных частиц [10].

Очень часто дополнительный нагрев плазмы сопровождается вращением плазмы. Скорости тороидального вращения плазмы достигают величин порядка ионно-звуковой скорости и измерялись на многих установках (см., например, экспериментальные обзоры [11–13]).

В свете сказанного выше представляется полезным исследовать совместное влияние эффектов, обусловленных анизотропией давления плазмы и ее тороидального вращения на низкочастотные МГД-возмущения, такие как зональные течения, геодезические акустические моды (ГАМ), низкочастотные альфвеновские моды, которые, в соответствии с современными представлениями, оказывают существенное влияние на функционирование современных токамаков. При исследовании упомянутых низкочастотных явлений в токамаках полезным оказывается анализ непрерывных МГД-спектров. В частности, такой анализ представляется полезным с точки зрения получения информации о щелях в непрерывном спектре, в которых могут существовать собственные альфвеновские моды (ТАЕ, ВАЕ, ВААЕ и т.п.), возбуждаемые высокоэнергичными частицами. Для изотропной плазмы в состоянии статического равновесия в рамках стандартной идеальной МГД такие спектры были впервые получены в работе Худблуда [14]. В дальнейшем анализ МГД-спектров был обобщен на случай равновесий с вращением плазмы. В многочисленных работах [15–24] исследовалось влияние различных аспектов, связанных с вращением, на МГД-спектры плазмы с изотропным давлением. В нашей недавней работе [25] мы обобщили анализ низкочастотного непрерывного акустико-альфвеновского спектра, под которым понимают спектр, образующийся в результате тороидального зацепления альфвеновских и низкочастотных магнитозвуковых мод [26], на случай статических равновесий плазмы с анизотропией давления. В качестве основы нашего анализа была использована хорошо известная МГД-модель Чу–Голдбергера–Лоу (ЧГЛ) [27], в которой термодинамическое состояние плазмы описывается двумя адиабатами. В настоящей работе, оставаясь в рамках ЧГЛ-модели, мы учитываем эффекты равновесного тороидального вращения плазмы.

Статья построена следующим образом. В разд. 2 мы приводим исходные МГД-уравнения ЧГЛ-модели, в которых учитывается эффект анизотропии давления, обсуждаем равновесие плазмы с тороидальным вращением и представляем линеа-

ризованные уравнения возмущений такого равновесия, выраженные через лагранжевы смещения. В разд. 3 мы упрощаем уравнения возмущений плазмы применительно к возмущениям, сильно локализованным на магнитных поверхностях, и выводим систему уравнений, определяющих низкочастотный непрерывный МГД-спектр тороидально-вращающейся плазмы с анизотропным давлением. В разд. 4 мы применяем эти уравнения для аналитического исследования непрерывного МГД-спектра тороидально-вращающейся плазмы с низким анизотропным давлением,  $(p_{\parallel}, p_{\perp})/B^2 \approx \epsilon^2$ , для максимально упрощенной модели токамака с большим аспектным отношением,  $\epsilon = a/R_0 \ll 1$ , и круглыми концентрическими магнитными поверхностями ( $a$  и  $R_0$  – малый и большой радиусы токамака,  $B$  – величина равновесного магнитного поля). Мы получаем и исследуем аналитически и численно дисперсионные уравнения как для возмущений в виде зональных течений с  $(m, n) = 0$ , так и для более общих электромагнитных возмущений с  $(m, n) \neq 0$ , где  $m$  и  $n$  – тороидальное и полоидальное волновые числа. Мы также выводим общее условие неустойчивости мод непрерывного спектра, обусловленной стратификацией плазмы по полоидальному углу на магнитных поверхностях из-за эффектов анизотропии давления и вращения. В разд. 5 мы суммируем и обсуждаем полученные в работе результаты. В Приложении представлен альтернативный вывод дисперсионного уравнения для зональных течений, основанный на предположении об их электростатичности и тороидальной симметрии.

## 2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ: РАВНОВЕСИЕ И УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ТОРОИДАЛЬНЫХ СОБСТВЕННЫХ МОД

При описании бесстолкновительной вращающейся плазмы с анизотропным давлением исходим из хорошо известной одножидкостной модели Чу–Голдбергера–Лоу [27]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{P} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (2)$$

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (3)$$

Здесь  $\rho$  – массовая плотность плазмы,  $\mathbf{v}$  – ее скорость,  $\mathbf{B}$  – магнитное поле, нормированное таким образом, чтобы избавиться от множителя  $1/4\pi$  в правой части уравнения (2),  $\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B}$ , а  $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$  – конвективная производная. Компоненты тензора давления  $\mathbf{P}$  имеют вид

$$P_{ij} = p_{\perp} \delta_{ij} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) b_i b_j, \quad (4)$$

где  $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$  – единичный вектор вдоль магнитного поля. Тогда из уравнения (4) следует

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{P} = \nabla p_{\perp} + \\ + \{(\mathbf{b} \cdot \nabla)(p_{\parallel} - p_{\perp}) + (p_{\parallel} - p_{\perp}) \nabla \cdot \mathbf{b}\} \mathbf{b} + \\ + (p_{\parallel} - p_{\perp})(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (5)$$

Продольное и поперечное давления удовлетворяют уравнениям так называемых ЧГЛ-адиабат

$$\frac{ds_{\parallel}}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \left( \frac{p_{\parallel} B^2}{\rho^3} \right) = 0, \quad (6)$$

$$\frac{ds_{\perp}}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \left( \frac{p_{\perp}}{\rho B} \right) = 0, \quad (7)$$

где  $s_{\parallel} = p_{\parallel} B^2 / \rho^3$  и  $s_{\perp} = p_{\perp} / \rho B$  – продольная и поперечная энтропийные функции соответственно.

Используя явное выражение для градиента тензора давления (5), удобно и полезно переписать уравнение движения плазмы (2) в виде [28, 29]

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p_{\parallel} + \frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{2B^2} \nabla B^2 + \mathbf{K} \times \mathbf{B}, \quad (8)$$

где вектор  $\mathbf{K}$  описывается выражением

$$\mathbf{K} = \nabla \times (\sigma \mathbf{B}), \quad \sigma \equiv 1 - \frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{B^2}.$$

Записанное в таком виде уравнение упрощает дальнейший анализ.

Далее мы будем полагать, что все физические величины представляются в виде суммы равновесной величины и ее малого возмущения, отмеченного штрихом:  $f \rightarrow f + f'$ ,  $\mathbf{f} \rightarrow \mathbf{f} + \mathbf{f}'$ .

### 2.1. Равновесие плазмы

Будем искать общее осесимметричное равновесие тороидально-вращающейся плазмы, удовлетворяющее уравнениям (1), (3), (6)–(8), в которых полагаем  $\partial/\partial t = 0$ . Используем цилиндрическую систему координат  $\{R, Z, \varphi\}$  с центром на основной оси тора, где  $R$  – расстояние от оси,  $Z$  – расстояние вдоль оси, а  $\varphi$  – угловая координата, от которой, в силу предположения об осевой симметрии, равновесные величины не зависят,  $\partial/\partial \varphi = 0$ . Равновесные магнитное поле и скорость плазмы могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = I(R, Z) \nabla \varphi + \nabla \varphi \times \nabla \psi(R, Z), \\ \mathbf{v} = R^2 \Omega(R, Z) \nabla \varphi, \end{aligned}$$

где  $\Omega$  – угловая скорость тороидального вращения,  $I$  – функция, определяющая полоидальный ток, а  $\psi$  – полоидальный магнитный поток. Тогда общее осесимметричное стационарное решение

вышеуказанных уравнений описывается уравнениями (см., например, [29, 30])

$$\Omega = \Omega(\psi), \quad (9)$$

$$I \left( 1 - \frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{B^2} \right) = F(\psi), \quad (10)$$

$$\mathbf{B} \cdot \nabla p_{\parallel} - \frac{\rho \Omega^2}{2} \mathbf{B} \cdot \nabla R^2 - \frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{2B^2} \mathbf{B} \cdot \nabla B^2 = 0, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left\{ \left( 1 - \frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{B^2} \right) \frac{\nabla \psi}{R^2} \right\} + \frac{\nabla \psi \cdot \nabla p_{\parallel}}{|\nabla \psi|^2} + \frac{I}{R^2} \frac{dF}{d\psi} - \\ - \frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{B^2} \frac{\nabla \psi \cdot \nabla (B^2/2)}{|\nabla \psi|^2} - \frac{\rho \Omega^2}{2} \frac{\nabla \psi \cdot \nabla R^2}{|\nabla \psi|^2} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь  $\Omega(\psi)$  и  $F(\psi)$  – произвольные функции полоидального магнитного потока. Постоянство угловой тороидальной скорости  $\Omega$  на магнитных поверхностях (9) следует из условия вмороженности магнитного поля в плазму (3). Уравнение (10) соответствует тороидальной проекции (вдоль  $\nabla \varphi$ ) уравнения (8) и описывает влияние анизотропии давления плазмы на функцию  $I$ , определяющую полоидальный ток. Оно показывает, что равновесный полоидальный ток  $I$  в плазме низкого давления  $\beta_{\parallel, \perp} \equiv p_{\parallel, \perp} / B^2 \ll 1$ , а также в плазме со слабой анизотропией давления,  $\beta_{\parallel} - \beta_{\perp} \ll 1$ , практически постоянен на магнитной поверхности (с точностью до членов порядка  $\beta_{\parallel} - \beta_{\perp}$ ). Уравнение (11) описывает равновесие плазмы вдоль магнитного поля  $\mathbf{B}$ . Наконец, уравнение (12) представляет собой обобщение уравнения Грэда–Шафранова и соответствует балансу сил в направлении поперек магнитных поверхностей токамака.

Важно отметить, что как и при статическом равновесии при осесимметричном равновесии с чисто тороидальным вращением плазмы уравнение непрерывности (1) и уравнение поперечной ЧГЛ-адиабаты (7) удовлетворяются произвольными функциями  $\rho = \rho(R, Z)$ ,  $p_{\perp} = p_{\perp}(R, Z)$ , которые не определяются уравнениями равновесия в модели ЧГЛ. Продольное давление плазмы  $p_{\parallel}$  определяется условием продольного равновесия (11), и равновесное уравнение продольной ЧГЛ-адиабаты (6) удовлетворяется автоматически. При исследовании МГД-волн и неустойчивостей целесообразно использовать вместо цилиндрической системы координат  $\{R, Z, \varphi\}$  потоковую систему координат с выпрямленными силовыми линиями  $\{\psi, \vartheta, \varphi\}$ , где  $\vartheta$  – полоидальный угол. Будем предполагать, что для токамаков с большим аспектным отношением поперечное давление и массовая плотность плазмы слабо зависят от полоидального угла  $\vartheta$ , так что  $p_{\perp} = p_{0\perp}(\psi) + \epsilon p_{\perp 1}(\psi, \vartheta)$  и  $\rho = \rho_0(\psi) + \epsilon \rho_1(\psi, \vartheta)$ .

2.2. Представление уравнения малых возмущений в виде проекций на ортогональную тройку векторов, связанных с силовой линией магнитного поля

Рассмотрим возмущение равновесия плазмы, описываемого уравнениями (9)–(12), вводя лагранжево смещение элемента плазмы  $\xi$ . Тогда возмущения скорости плазмы  $\mathbf{v}'$ , ее массовой плотности  $\rho'$  и магнитного поля  $\mathbf{B}'$  связаны со смещением элемента плазмы  $\xi$  хорошо известными выражениями

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= \frac{\partial \xi}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \xi - (\xi \cdot \nabla) \mathbf{v}, \\ \rho' &= -\nabla \cdot (\rho \xi), \quad \mathbf{B}' = \nabla \times (\xi \times \mathbf{B}). \end{aligned} \quad (13)$$

Линеаризуя уравнения ЧГЛ-адиабат (6) и (7) по отношению к возмущениям, подставляя в них выражение  $\mathbf{v}'$  из (13) и интегрируя полученные уравнения, находим возмущения продольного и поперечного давлений в виде

$$\begin{aligned} p'_{\parallel} &= p_{\parallel} \left\{ \frac{3\rho'}{\rho} - \frac{2\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}'}{B^2} - \frac{\xi \cdot \nabla s_{\parallel}}{s_{\parallel}} \right\}, \\ p'_{\perp} &= p_{\perp} \left\{ \frac{\rho'}{\rho} + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}'}{B^2} - \frac{\xi \cdot \nabla s_{\perp}}{s_{\perp}} \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Поскольку мы исследуем спектральную проблему и при этом предполагаем осесимметричное равновесие плазмы, возмущения равновесных физических величин можно считать пропорциональными  $\exp(-i\omega t - in\phi)$ , где  $\omega$  – их частота, а  $n$  – тороидальное волновое число. Тогда возмущенное уравнение движения плазмы (8) записывается в виде

$$\begin{aligned} \rho \bar{\omega}^2 \xi + 2i\rho \bar{\omega} \Omega \mathbf{e}_z \times \xi - \nabla R^2 \nabla \cdot \left( \frac{\rho \Omega^2}{2} \xi \right) - \\ - \nabla p'_{\parallel} + \frac{p'_{\parallel} - p'_{\perp}}{2B^2} \nabla B^2 + (p_{\parallel} - p_{\perp}) \nabla \left( \frac{\mathbf{B} \mathbf{B}'}{B^2} \right) + \\ + \mathbf{K} \times \mathbf{B}' + \mathbf{K}' \times \mathbf{B} = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $\bar{\omega} = \omega + n\Omega$  – частота возмущения во вращающейся вместе с плазмой системе координат (или сдвинутая на доплеровскую величину частота возмущения), которую в дальнейшем для краткости будем называть просто частотой, а

$$\mathbf{K}' = \nabla \times \left\{ \sigma \mathbf{B}' - \left( p'_{\parallel} - p'_{\perp} - 2 \frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{B^2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}' \right) \frac{\mathbf{B}}{B^2} \right\}. \quad (16)$$

В дополнение к доплеровскому сдвигу частоты эффекты тороидального равновесного вращения плазмы входят в уравнение (15) через силу Кориолиса (второй член) и центробежную силу (третий

член). Учитывая условие равновесия (10), можно легко показать, что равновесный вектор  $\mathbf{K}$  лежит на магнитной поверхности, так что  $\mathbf{K} \cdot \nabla \psi = 0$ .

Замкнутая система линеаризованных уравнений (13)–(16) полностью описывает малые возмущения равновесия в токамаке с тороидальным вращением плазмы и анизотропным давлением.

В цилиндре возмущения со смещением плазмы, параллельным магнитным силовым линиям, соответствуют медленным магнитозвуковым волнам, а с возмущением, лежащим на магнитных поверхностях и перпендикулярным магнитным силовым линиям – альфвеновским волнам. В токамаке эффективным оказывается использование проекций возмущенных векторов на ортогональный базис, основанный на магнитных поверхностях токамака и магнитных силовых линиях. Используя триаду векторов  $\nabla \psi$ ,  $\mathbf{B} \times \nabla \psi$  и  $\mathbf{B}$ , представляем лагранжево смещение элемента плазмы в виде

$$\xi = \xi \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} + \eta \frac{\mathbf{B} \times \nabla \psi}{B^2} + \zeta \frac{\mathbf{B}}{B^2}. \quad (17)$$

Компонента  $\xi$  характеризует смещение плазмы поперек магнитных поверхностей. Другие две компоненты  $\eta$  и  $\zeta$  характеризуют смещение плазмы, касательное к магнитным поверхностям. Они описываются выражениями

$$\xi = \xi \cdot \nabla \psi, \quad \eta = \frac{\xi \cdot (\mathbf{B} \times \nabla \psi)}{|\nabla \psi|^2}, \quad \zeta = \xi \cdot \mathbf{B}.$$

Аналогичным образом разлагаем и возмущенное магнитное поле:

$$\mathbf{B}' = Q_{\psi} \nabla \psi + Q_s \frac{\mathbf{B} \times \nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} + Q_{\parallel} \mathbf{B}.$$

Тогда проекция уравнения (15) на направление магнитного поля  $\mathbf{B}$  записывается в виде

$$\begin{aligned} -\rho \bar{\omega}^2 \zeta - i\rho \bar{\omega} \Omega \left[ (\mathbf{B} \cdot \nabla R^2) \eta + \frac{I \xi \cdot \nabla \psi \cdot \nabla R^2}{R^2 |\nabla \psi|^2} \right] + \\ + (\mathbf{B} \cdot \nabla R^2) \nabla \cdot \left( \frac{\rho \Omega^2}{2} \xi \right) = -\mathbf{B} \cdot \nabla p'_{\parallel} + \\ + (p_{\parallel} - p_{\perp}) \mathbf{B} \cdot \nabla Q_{\parallel} + \frac{p'_{\parallel} - p'_{\perp}}{2B^2} \mathbf{B} \cdot \nabla B^2 - \\ - Q_{\psi} \nabla \psi \cdot \left( \nabla p_{\parallel} - \frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{2B^2} \nabla B^2 - \frac{\rho \Omega^2}{2} \nabla R^2 \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Возмущенный баланс сил вдоль направления, определяемого вектором  $\mathbf{B} \times \nabla \psi$ , описывается уравнением

$$\begin{aligned}
 & -\rho \bar{\omega}^2 \frac{|\nabla \psi|^2}{B^2} \eta + i \frac{\rho \bar{\omega} \Omega}{B^2} \left[ (\mathbf{B} \cdot \nabla R^2) \zeta + \xi \frac{\nabla \psi \cdot \nabla R^2}{R^2} \right] + \\
 & + \frac{I}{B^2} (\mathbf{B} \cdot \nabla R^2) \nabla \cdot \left( \frac{\rho \Omega^2}{2} \xi \right) = \mathbf{B} \cdot \nabla (\sigma Q_s) + \\
 & + \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{B}}{B^2} \sigma |\nabla \psi|^2 Q_\psi - (\mathbf{B} \times \nabla \psi) \cdot \nabla \left( \frac{p'_\perp + B^2 Q_\parallel}{B^2} \right) - \\
 & - \frac{2(p'_\perp + B^2 Q_\parallel)}{B^2} \mathbf{B} \cdot \nabla I + \frac{p'_\parallel + p'_\perp}{B} \mathbf{B} \cdot \nabla \left( \frac{I}{B} \right). \quad (19)
 \end{aligned}$$

Наконец, проекция уравнения (15) на направление, перпендикулярное магнитным поверхностям (на направление  $\nabla \psi$ ), принимает вид

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\rho \bar{\omega}^2}{|\nabla \psi|^2} \xi + \frac{\nabla \psi \cdot \nabla R^2}{|\nabla \psi|^2} \times \\
 & \times \left[ -i \frac{\rho \bar{\omega} \Omega}{R^2 B^2} (\eta |\nabla \psi|^2 - I \zeta) + \nabla \cdot \left( \frac{\rho \Omega^2}{2} \xi \right) \right] = \\
 & = -\frac{\nabla(p'_\perp + B^2 Q_\parallel) \cdot \nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} + \mathbf{B} \cdot \nabla (\sigma Q_\psi) + \Lambda Q_\parallel + \\
 & + \left( S - \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{B}}{|\nabla \psi|^2} \right) \sigma Q_s - \frac{p'_\parallel - p'_\perp}{B^2} \times \\
 & \times \frac{(\nabla B^2 / 2 + \mathbf{j} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla \psi}{|\nabla \psi|^2}, \quad (20)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \Lambda & \equiv \frac{\nabla p_\perp \cdot \nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} + \left( 1 + \frac{p_\parallel - p_\perp}{2B^2} \right) \frac{\nabla B^2 \cdot \nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} + \\
 & + \left( 1 + \frac{p_\parallel - p_\perp}{B^2} \right) \frac{(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla \psi}{|\nabla \psi|^2}, \\
 S & \equiv \frac{\mathbf{B} \times \nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \cdot \nabla \times \left( \frac{\mathbf{B} \times \nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \right).
 \end{aligned}$$

Компоненты возмущенного магнитного поля связаны с компонентами лагранжева смещения выражениями

$$\begin{aligned}
 Q_\psi & = \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla \xi}{|\nabla \psi|^2}, \quad Q_s = \frac{|\nabla \psi|^2}{B^2} (\mathbf{B} \cdot \nabla \eta - S \xi), \\
 Q_\parallel & = -\nabla \cdot \xi + \mathbf{B} \cdot \nabla \left( \frac{\zeta}{B^2} \right) + \eta \mathbf{B} \cdot \nabla \left( \frac{I}{B^2} \right) - \\
 & - \frac{(\nabla B^2 + \mathbf{j} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla \psi}{|\nabla \psi|^2 B^2} \xi. \quad (21)
 \end{aligned}$$

В следующем разделе уравнения (13), (14), (18)–(21) будут использованы для вывода уравнений низкочастотных мод, локализованных на магнитных поверхностях токамака – уравнений непрерывного МГД-спектра.

### 3. УРАВНЕНИЯ НИЗКОЧАСТОТНОГО НЕПРЕРЫВНОГО МГД-СПЕКТРА

Упростим линеаризованные уравнения для мод возмущений плазмы, сильно локализованных вблизи выделенной магнитной поверхности  $\psi = \psi_0$ . Для таких мод предполагается, что производная собственных функций поперек магнитной поверхности,  $\nabla \psi \cdot \nabla / |\nabla \psi|$ , значительно превышает их производные вдоль двух других направлений, а также градиенты равновесных физических величин  $1/L$

$$\frac{\nabla \psi \cdot \nabla}{|\nabla \psi|} \gg \left( \frac{\mathbf{B} \times \nabla \psi \cdot \nabla}{B |\nabla \psi|}; \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla}{B}; \frac{1}{L} \right).$$

При выводе соответствующих уравнений непрерывного спектра мы будем следовать подходу, изложенному в работах [16, 23].

Производная поперек магнитной поверхности в явном виде входит только в уравнение (20), описывающее возмущенное движение плазмы перпендикулярно магнитной поверхности, и неявно (через  $\nabla \cdot \xi$ ) – в выражения, определяющие  $\rho'$ ,  $p'_\parallel$ ,  $p'_\perp$  и  $Q_\parallel$ . В случае низкочастотных мод члены с нормальной производной не могут быть компенсированы другими членами в уравнении (20), и таким образом, оно может быть удовлетворено только при выполнении равенства

$$\nabla(p'_\perp + B^2 Q_\parallel) \cdot \nabla \psi \approx 0. \quad (22)$$

Подставляя соответствующие выражения  $p'_\perp$  и  $Q_\parallel$  из уравнений (14) и (21) в уравнение (22) и интегрируя полученное уравнение по  $\psi$ , получаем

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \xi & = \frac{p_\perp + B^2}{\rho(2p_\perp + B^2)} \left\{ \mathbf{B} \cdot \nabla \left( \frac{\rho \zeta}{B^2} \right) + \eta \mathbf{B} \cdot \nabla \left( \frac{\rho I}{B^2} \right) \right\} - \\
 & - \frac{p_\perp}{2p_\perp + B^2} \frac{\xi \cdot \nabla s_\perp}{s_\perp} - \frac{\xi \cdot \nabla \rho}{\rho}. \quad (23)
 \end{aligned}$$

С другой стороны, используя разложение  $\xi$  из (17), находим

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \xi & \equiv \frac{\nabla \xi \cdot \nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} + \xi \nabla \cdot \left( \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \right) + \mathbf{B} \cdot \nabla \left( \frac{\zeta}{B^2} \right) + \\
 & + \frac{(\mathbf{B} \times \nabla \psi) \cdot \nabla \eta}{B^2} + \eta \mathbf{B} \cdot \nabla \left( \frac{I}{B^2} \right). \quad (24)
 \end{aligned}$$

Тогда из уравнений (23) и (24) следует, что они могут быть удовлетворены только при выполнении условия

$$\frac{\nabla\psi \cdot \nabla\xi_\psi}{|\nabla\psi|} \approx \left( \frac{\mathbf{B} \times \nabla\psi \cdot \nabla\xi_s}{B|\nabla\psi|}, \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla\xi_\parallel}{B} \right),$$

где  $\xi_\psi \equiv \xi/|\nabla\psi|$  – смещение плазмы поперек магнитной поверхности,  $\xi_s \equiv \eta|\nabla\psi|/B$  и  $\xi_\parallel \equiv \zeta/B$  – касательные к магнитной поверхности смещения плазмы, которые перпендикулярны и параллельны магнитной силовой линии соответственно. Таким образом, для рассматриваемых возмущений смещение плазмы поперек магнитной поверхности мало по сравнению со смещениями, касательными к магнитной поверхности,  $\xi_\psi \ll (\xi_s, \xi_\parallel)$ , и членами в правой части уравнения (23), пропорциональными  $\xi$ , можно пренебречь. Тогда находим, что возмущения массовой плотности, продольного и поперечного давлений плазмы описываются выражениями

$$\begin{aligned} \rho' &= -\frac{p_\perp + B^2}{2p_\perp + B^2} \left[ \mathbf{B} \cdot \nabla \left( \frac{\rho\zeta}{B^2} \right) + \eta \mathbf{B} \cdot \nabla \left( \frac{\rho I}{B^2} \right) \right] + \\ &\quad + \rho \frac{p_\perp}{2p_\perp + B^2} \frac{\zeta + I\eta}{B^2} \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla s_\perp}{s_\perp}, \\ p'_\perp &= -\frac{p_\perp B^2}{2p_\perp + B^2} \left\{ \frac{1}{\rho} \left[ \mathbf{B} \cdot \nabla \left( \frac{\rho\zeta}{B^2} \right) + \eta \mathbf{B} \cdot \nabla \left( \frac{\rho I}{B^2} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\zeta + I\eta}{B^2} \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla s_\perp}{s_\perp} \right\}, \\ p'_\parallel &= -\frac{p_\parallel(3B^2 + 5p_\perp)}{2p_\perp + B^2} \frac{1}{\rho} \left[ \mathbf{B} \cdot \nabla \left( \frac{\rho\zeta}{B^2} \right) + \eta \mathbf{B} \cdot \nabla \left( \frac{\rho I}{B^2} \right) \right] + \\ &\quad + p_\parallel \frac{\zeta + I\eta}{B^2} \left( -\frac{\mathbf{B} \cdot \nabla s_\parallel}{s_\parallel} + \frac{p_\perp}{2p_\perp + B^2} \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla s_\perp}{s_\perp} \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Выражения для компонент возмущенного магнитного поля также упрощаются и принимают вид

$$Q_\psi = 0, \quad Q_s = \frac{|\nabla\psi|^2}{B^2} \mathbf{B} \cdot \nabla \eta, \quad Q_\parallel = -\frac{p'_\perp}{B^2}. \quad (26)$$

Подставляем выражения (25) и (26) в уравнения (18) и (19) и окончательно получаем следующую систему уравнений, определяющую непрерывный спектр колебаний тороидально-вращающейся плазмы с анизотропным давлением

$$\begin{aligned} &\rho \bar{\omega}^2 \frac{|\nabla\psi|^2}{B^2} \eta + \mathbf{B} \cdot \nabla \left( \sigma \frac{|\nabla\psi|^2}{B^2} \mathbf{B} \cdot \nabla \eta \right) - \\ &- i \bar{\omega} \Omega \frac{\rho\zeta}{B^2} (\mathbf{B} \cdot \nabla R^2) - \left( \frac{(3p_\parallel + p_\perp)B^2 + 5p_\parallel p_\perp}{\rho B(2p_\perp + B^2)} \times \right. \\ &\quad \left. \times \mathbf{B} \cdot \nabla \left( \frac{I}{B} \right) + \frac{I\Omega^2}{2B^2} \frac{p_\perp + B^2}{2p_\perp + B^2} (\mathbf{B} \cdot \nabla R^2) \right) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\times \left\{ \mathbf{B} \cdot \nabla \left( \frac{\rho\zeta}{B^2} \right) + \eta \mathbf{B} \cdot \nabla \left( \frac{\rho I}{B^2} \right) \right\} - \\ &- \left\{ \frac{1}{B} \mathbf{B} \cdot \nabla \left( \frac{I}{B} \right) \left[ p_\parallel \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla s_\parallel}{s_\parallel} + p_\perp \frac{B^2 - p_\parallel}{2p_\perp + B^2} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla s_\perp}{s_\perp} \right] - p_\perp \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla s_\perp}{s_\perp} \frac{\rho\Omega^2}{2B^2} \frac{I(\mathbf{B} \cdot \nabla R^2)}{2p_\perp + B^2} \right\} \times \\ &\quad \times \frac{\zeta + I\eta}{B^2} = 0, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} &\bar{\omega}^2 \frac{\rho\zeta}{B^2} + \frac{1}{B} \mathbf{B} \cdot \nabla \left\{ \frac{p_\parallel(3B^2 + 5p_\perp)}{(2p_\perp + B^2)\rho} \frac{1}{B} \mathbf{B} \cdot \nabla \left( \frac{\rho\zeta}{B^2} \right) \right\} + \\ &\quad + \frac{1}{B} \mathbf{B} \cdot \nabla \left\{ \frac{p_\parallel(3B^2 + 5p_\perp)\eta}{(2p_\perp + B^2)\rho} \mathbf{B} \cdot \nabla \left( \frac{\rho I}{B^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{p_\parallel(\zeta + I\eta)}{B^3} \left( \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla s_\parallel}{s_\parallel} - \frac{p_\perp}{2p_\perp + B^2} \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla s_\perp}{s_\perp} \right) \right\} + \\ &\quad + i \frac{\rho \bar{\omega} \Omega}{B^2} (\mathbf{B} \cdot \nabla R^2) \eta - \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \nabla \left( \frac{1}{B^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{p_\parallel - p_\perp}{B^2} \mathbf{B} \cdot \nabla \frac{1}{B^2} \right\} \times \\ &\quad \times \left( \frac{p_\perp B^2}{2p_\perp + B^2} \left\{ \frac{1}{\rho} \left[ \mathbf{B} \cdot \nabla \left( \frac{\rho\zeta}{B^2} \right) + \eta \mathbf{B} \cdot \nabla \left( \frac{\rho I}{B^2} \right) \right] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\zeta + I\eta}{B^2} \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla s_\perp}{s_\perp} \right\} - \frac{\Omega^2}{2B^2} (\mathbf{B} \cdot \nabla R^2) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ \frac{p_\perp B^2}{2p_\perp + B^2} \left[ \mathbf{B} \cdot \nabla \left( \frac{\rho\zeta}{B^2} \right) + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \eta \mathbf{B} \cdot \nabla \left( \frac{\rho I}{B^2} \right) \right] - \frac{\rho p_\perp}{2p_\perp + B^2} \frac{\zeta + I\eta}{B^2} \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla s_\perp}{s_\perp} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Эта система уравнений не содержит производных смещений плазмы по отношению к  $\psi$ , а только их производные по полоидальному углу  $\vartheta$  (через оператор  $\mathbf{B} \cdot \nabla$ ). Она может рассматриваться как аналог соответствующей системы уравнений, полученной в работе ван дер Холста, Белиена и Худблуда [16] в рамках стандартной МГД-модели. В системе отсчета, вращающейся с плазмой, эта система уравнений описывает тороидальное зацепление медленных магнитозвуковых и альфвеновских возмущений, обусловленное кривизной магнитных силовых линий, эффектами из-за анизотропии давления плазмы, центробежными и кориолисовыми эффектами. Сдвинутые на доплеровскую величину частоты  $\bar{\omega} = \omega + n\Omega$  могут рассматриваться как собственные значения регулярной задачи на собственные значения, описываемой уравнениями (27) и (28).

При выводе данной системы уравнений было сделано всего лишь два предположения – о сильной локализации возмущений поперек магнит-

ных поверхностей и об их низкочастотности по сравнению с частотой быстрого магнитного звука. При этом не делалось никаких дополнительных предположений, касающихся геометрии магнитных силовых линий и давления плазмы. В общем случае полученная система уравнений может являться основой для численных расчетов низкочастотных МГД-спектров тороидально-вращающейся плазмы с анизотропным давлением в осесимметричных системах магнитного удержания.

Уравнения (27), (28) существенно упрощаются в предельном случае токамаков с малым обратным аспектным отношением  $\epsilon \ll 1$ , низким давлением плазмы и ее сравнительно медленным (по сравнению с альфвеновской скоростью) вращением, такими, что  $(\beta_{\parallel}, \beta_{\perp}) \approx \epsilon^2$ ,  $\Omega^2 R_0^2 \lesssim (p_{\parallel}, p_{\perp})/\rho$ . Тогда, разлагая уравнения (27) и (28) по степеням малого параметра  $\epsilon$  и сохраняя главные члены разложения, приходим к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} & \rho \bar{\omega}^2 \frac{|\nabla \psi|^2}{B^2} \eta + \mathbf{B} \cdot \nabla \left( \frac{|\nabla \psi|^2}{B^2} \mathbf{B} \cdot \nabla \eta \right) - \\ & - i \bar{\omega} \Omega (\mathbf{B} \cdot \nabla R^2) \frac{\rho \zeta}{B^2} - \\ & - \frac{I}{2} \left[ \frac{3p_{\parallel} + p_{\perp}}{\rho} \mathbf{B} \cdot \nabla \left( \frac{1}{B^2} \right) + \frac{\Omega^2}{B^2} (\mathbf{B} \cdot \nabla R^2) \right] \times \quad (29) \\ & \times \left\{ \mathbf{B} \cdot \nabla \left( \frac{\rho \zeta}{B^2} \right) + I \eta \mathbf{B} \cdot \nabla \left( \frac{\rho}{B^2} \right) \right\} - \\ & - \frac{I^2 \eta}{2B^2} \mathbf{B} \cdot \nabla \left( \frac{1}{B^2} \right) \left[ p_{\parallel} \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla s_{\parallel}}{s_{\parallel}} + p_{\perp} \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla s_{\perp}}{s_{\perp}} \right] = 0, \\ & \bar{\omega}^2 \frac{\rho \zeta}{B^2} + \frac{1}{B} \mathbf{B} \cdot \nabla \left\{ \frac{3p_{\parallel}}{\rho} \frac{1}{B} \mathbf{B} \cdot \nabla \left( \frac{\rho \zeta}{B^2} \right) \right\} + \\ & + i \frac{\rho \bar{\omega} \Omega}{B^2} (\mathbf{B} \cdot \nabla R^2) \eta + \quad (30) \\ & + \frac{I}{B} \mathbf{B} \cdot \nabla \left\{ \frac{3p_{\parallel}}{\rho B} \mathbf{B} \cdot \nabla \left( \frac{\rho}{B^2} \right) + \frac{p_{\parallel}}{B^3} \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla s_{\parallel}}{s_{\parallel}} \right\} \eta = 0. \end{aligned}$$

Мы учли, что при указанных предположениях полоидальный ток можно считать постоянным на магнитной поверхности,  $I \approx F(\psi)$ . Эти уравнения будут использованы ниже при анализе непрерывных спектров зональных течений и акустико-альфвеновских спектров в токамаках.

#### 4. НЕПРЕРЫВНЫЙ МГД-СПЕКТР В ТОКАМАКАХ С БОЛЬШИМ АСПЕКТНЫМ ОТНОШЕНИЕМ И НИЗКИМ ДАВЛЕНИЕМ ПЛАЗМЫ

Применим уравнения (29) и (30) для исследования низкочастотного непрерывного МГД-спектра в токамаках с низким давлением плазмы и малым обратным аспектным отношением  $a/R_0 \ll 1$ .

Для простоты мы предполагаем, что магнитные поверхности токамака являются концентрическими и круглыми. Тогда они могут быть описаны следующими выражениями:

$$\psi = \psi(r) : R \approx R_0 + r \cos \vartheta, \quad z \approx r \sin \vartheta, \quad (31)$$

где радиальная координата  $r$  задает метку магнитной поверхности. Полоидальный ток  $I$  с требуемой точностью будет функцией радиуса  $r$ :  $I \approx I(r)$ . Амплитуда равновесного магнитного поля описывается как

$$B \approx \frac{B_s}{1 + (r/R_0) \cos \vartheta}. \quad (32)$$

Полоидальный угол  $\vartheta$  выбран таким образом, что магнитные силовые линии являются прямыми на плоскости  $(\vartheta, \varphi)$ , а коэффициент запаса устойчивости токамака  $q$  является функцией магнитной поверхности,  $q = q(r)$ . Из равновесного баланса сил вдоль магнитного поля (11) следует, что осциллирующая по полоидальному углу часть продольного давления  $p_{\parallel}$  пропорциональна  $\cos \vartheta$ . Мы также предполагаем, что для рассматриваемой конфигурации осциллирующие по  $\vartheta$  части поперечного давления  $p_{\perp}$  и массовой плотности  $\rho$  также малы как  $\epsilon$  и содержат лишь члены пропорциональные  $\cos \vartheta$  и  $\sin \vartheta$ .

##### 4.1. Дисперсионное соотношение

Собственные функции  $\eta$  и  $\zeta$  берем в виде

$$\begin{aligned} \eta &= \delta(r - r_0) \eta(\vartheta) e^{-i\omega t - i n \varphi}, \\ \zeta &= \delta(r - r_0) \zeta(\vartheta) e^{-i\omega t - i n \varphi}, \end{aligned}$$

где  $\delta$  – дельта-функция Дирака, а  $r_0$  – радиус выбранной магнитной поверхности,  $\omega = \omega(r)$  – собственная частота задачи на собственные значения, а  $\eta(\vartheta)$  и  $\zeta(\vartheta)$  – периодические функции полоидального угла  $\vartheta$ . Совокупность собственных значений  $\omega(r)$  дает непрерывный спектр МГД-возмущений плазмы.

Используя малость величины  $\epsilon$ , ограничиваемся решением задачи в трехмодовом приближении и ищем решение задачи на собственные значения в виде

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_m \delta(r - r_0) e^{im\vartheta - in\varphi - i\omega t}, \\ \zeta &= \delta(r - r_0) (\zeta_{m-1} e^{i(m-1)\vartheta - in\varphi - i\omega t} + \zeta_{m+1} e^{i(m+1)\vartheta - in\varphi - i\omega t}). \quad (33) \end{aligned}$$

В приближении прямого цилиндра в отсутствие тороидальных эффектов  $\eta_m$  соответствует альфвеновской моде с волновыми числами  $(m, n)$ , а  $\zeta_{m-1}$  и  $\zeta_{m+1}$  – двум медленным звуковым волнам с волновыми числами  $(m+1, n)$  и  $(m-1, n)$ . Тороидальные эффекты, анизотропия давления плазмы и вращение приводят к их зацеплению. Подстав-

ляя выражения (33) в уравнения (29) и (30), приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} (\omega^2 - k^2 v_A^2 - \omega_0^2) \eta_m &= i(D_+ \zeta_{m+1} + D_- \zeta_{m-1}), \\ (\omega^2 - k_{\pm}^2 c_{\parallel}^2) \zeta_{m\pm 1} &= -i c_{\parallel} \left[ \frac{1}{2} k_{\pm} c_{\parallel} \left(1 + \frac{\tau}{3}\right) \times \right. \\ &\quad \times \left. \left[ \mathbf{B} \cdot \nabla \ln \left( \frac{1}{B^2} \right) \right]_{\pm 1} + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{2} k_{\pm} c_{\parallel} M^2 + \bar{\omega} M \right) (\mathbf{B} \cdot \nabla \ln R^2)_{\pm 1} \right] R_0 \eta_m. \end{aligned}$$

Здесь  $v_A = B_s / \rho^{1/2}$  – альфвеновская скорость,  $c_{\parallel} = (3p_{\parallel} / \rho)^{1/2}$  – скорость звука,  $M = \Omega R_0 / c_{\parallel}$  – число Маха,  $\tau = p_{\perp} / p_{\parallel}$  – мера анизотропии давления,

$$k = \frac{m - nq}{qR_0}, \quad k_{\pm} = \frac{m \pm 1 - nq}{qR_0}$$

– компоненты волнового вектора вдоль равновесного магнитного поля для мод с полоидальными волновыми числами, равными  $m$  и  $m \pm 1$ , соответственно, величины  $[f]_{\pm 1}$  обозначают соответствующую полоидальную Фурье-гармонику функции  $f$ ,

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= \frac{c_{\parallel}^2}{2R_0^2} \left\langle \frac{\partial}{\partial \vartheta} \ln \left( \frac{1}{B^2} \right) \left[ \frac{\partial}{\partial \vartheta} \ln \left( \frac{\rho s_{\parallel}^{1/3}}{B^2} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\tau}{3} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \ln \left( \frac{\rho s_{\perp}}{B^2} \right) \right] + M^2 \frac{\partial}{\partial \vartheta} \ln \left( \frac{\rho}{B^2} \right) \frac{\partial}{\partial \vartheta} \ln R^2 \right\rangle, \\ D_{\pm} &= \frac{q^2 R_0 c_{\parallel}}{r^2 B_s^2} \left\{ \frac{1}{2} k_{\pm} c_{\parallel} \left(1 + \frac{\tau}{3}\right) \left[ \mathbf{B} \cdot \nabla \ln \left( \frac{1}{B^2} \right) \right]_{\mp 1} + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{1}{2} k_{\pm} c_{\parallel} M^2 + \bar{\omega} M \right] (\mathbf{B} \cdot \nabla \ln R^2)_{\mp 1} \right\}, \end{aligned}$$

а нормированное усреднение по полоидальному углу  $\vartheta$  определяется выражением

$$\langle f \rangle \equiv \frac{R_0^2}{r^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f d\vartheta.$$

Решая эти уравнения, в конечном итоге мы приходим к следующему дисперсионному уравнению:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}^2 - k^2 v_A^2 - \omega_G^2 - \frac{c_{\parallel}^2}{2R_0^2} \frac{G_+}{\bar{\omega}^2 - k_+^2 c_{\parallel}^2} - \\ - \frac{c_{\parallel}^2}{2R_0^2} \frac{G_-}{\bar{\omega}^2 - k_-^2 c_{\parallel}^2} = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Здесь

$$\omega_G^2 = \omega_0^2 + \frac{c_{\parallel}^2}{R_0^2} M^2 \left\langle \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} \ln R^2 \right)^2 \right\rangle,$$

$$\begin{aligned} G_{\pm} &= k_{\pm}^2 c_{\parallel}^2 \left\{ \frac{1}{4} \left\langle \left[ \left(1 + \frac{\tau}{3}\right) \frac{\partial}{\partial \vartheta} \ln \left( \frac{1}{B^2} \right) + M^2 \frac{\partial}{\partial \vartheta} \ln R^2 \right]^2 \right\rangle + \right. \\ &\quad \left. + M^2 \left\langle \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} \ln R^2 \right)^2 \right\rangle \right\} + M \bar{\omega} k_{\pm} c_{\parallel} \left\langle \left[ \left(1 + \frac{\tau}{3}\right) \frac{\partial}{\partial \vartheta} \ln \left( \frac{1}{B^2} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + M^2 \frac{\partial}{\partial \vartheta} \ln R^2 \right] \frac{\partial}{\partial \vartheta} \ln R^2 \right\rangle. \end{aligned}$$

Далее мы представим анализ этого дисперсионного уравнения как для специфических тороидально- и полоидально-симметричных электростатических мод с  $(m, n) = 0$ , которые соответствуют зональным течениям и ГАМ, так и для более общих электромагнитных мод с  $(m, n) \neq 0$ .

#### 4.2. Зональные течения и ГАМ

Под зональными течениями понимают тороидально- и полоидально-симметричные возмущения с  $(m, n) = 0$ , и поэтому для них  $k = 0$ . Тогда дисперсионное уравнение (34) упрощается и принимает вид

$$\omega^4 - \left( \omega_G^2 + \frac{c_{\parallel}^2}{q^2 R_0^2} \right) \omega^2 + \frac{c_{\parallel}^4 G}{q^2 R_0^4} = 0, \quad (35)$$

где

$$\begin{aligned} G &= \frac{\tau}{6} \left\langle \frac{\partial}{\partial \vartheta} \ln \left( \frac{1}{B^2} \right) \frac{\partial}{\partial \vartheta} \ln \left( \frac{s_{\perp}}{s_{\parallel}^{1/3}} \right) \right\rangle - \\ &\quad - \frac{M^2}{2} \left\langle \frac{\partial}{\partial \vartheta} \ln R^2 \frac{\partial}{\partial \vartheta} \ln s_{\parallel}^{1/3} \right\rangle. \end{aligned}$$

Чтобы записать уравнение (35) в этом виде мы использовали тождество

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \ln \left( \frac{\rho s_{\parallel}^{1/3}}{B^2} \right) \equiv \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\tau}{3}\right) \frac{\partial}{\partial \vartheta} \ln \left( \frac{1}{B^2} \right) + \frac{M^2}{2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \ln R^2, \quad (36)$$

которое следует из уравнения равновесного баланса сил вдоль магнитного поля (11). Используя это тождество, можно показать, что дискриминант квадратного уравнения относительно  $\omega^2$  положителен, и поэтому его решения являются либо осциллирующими во времени (при  $\omega^2 > 0$ ), либо аperiodически растущими или затухающими,  $\text{Re} \omega = 0$  (при  $\omega^2 < 0$ ). Тогда из уравнения (35) следует, что зональные течения устойчивы для таких равновесий, в которых

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\tau}{3} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \ln \left( \frac{1}{B^2} \right) \left[ \frac{\partial}{\partial \vartheta} \ln \left( \frac{s_{\perp}}{s_{\parallel}^{1/3}} \right) \right] - \right. \\ \left. - M^2 \frac{\partial}{\partial \vartheta} \ln R^2 \frac{\partial}{\partial \vartheta} \ln s_{\parallel}^{1/3} \right\} d\vartheta \geq 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Отметим, что рассматриваемые в этом разделе зональные течения являются электростатическими возмущениями, и их дисперсионное уравнение

может быть получено иным способом, изначально основанным на предположении об их электростатичности и представленным в Приложении.

Используя уравнения (11), (31), (32) и определения энтропийных функций  $s_{\parallel}$  и  $s_{\perp}$ , в явном виде вычисляем усредненные по полоидальному углу величины и представляем дисперсионное уравнение (35) в виде

$$\omega^4 - A\omega^2 + C = 0, \quad (38)$$

где

$$A = \left[ \frac{1}{2} + \frac{2\tau}{3} + \frac{\tau}{3}\lambda_{\perp} + \left( \frac{7}{2} + \lambda_p \right) M^2 + \frac{1}{q^2} \right] \frac{c_{\parallel}^2}{R_0^2},$$

$$C = \left\{ \frac{\tau}{3} \left( 1 + \lambda_{\perp} - \frac{\tau}{6} \right) + \left( \frac{1}{2} + \lambda_p - \frac{\tau}{3} \right) M^2 - \frac{M^4}{2} \right\} \frac{c_{\parallel}^4}{q^2 R_0^4}, \quad (39)$$

$$\lambda_{\perp} = \frac{\langle (\partial \ln p_{\perp} / \partial \vartheta) (\partial \ln (1/B^2) / \partial \vartheta) \rangle}{\langle (\partial \ln (1/B^2) / \partial \vartheta)^2 \rangle},$$

$$\lambda_p = \frac{\langle (\partial \ln p / \partial \vartheta) (\partial \ln R^2 / \partial \vartheta) \rangle}{\langle (\partial \ln R^2 / \partial \vartheta)^2 \rangle}.$$

Дисперсионное уравнение (38) описывает две ветви зональных течений – низкочастотные зональные течения с частотой  $\omega^2 = A/2 - \sqrt{A^2/4 - C}$ , и высокочастотные зональные течения с частотой  $\omega^2 = A/2 + \sqrt{A^2/4 - C}$ . Низкочастотную ветвь зональных течений обычно коротко называют просто зональными течениями (ЗТ), а высокочастотную – ГАМ, поскольку в отсутствие вращения и анизотропии давления эта ветвь обусловлена геодезической кривизной магнитных силовых линий.

Высокочастотные зональные течения (или ГАМ) в диапазоне частот от 15 до 25 кГц наблюдаются во многих современных токамаках и стеллараторах (см., например, обзоры [31, 32]). Значительно более трудной экспериментальной задачей является идентификация низкочастотных (стационарных) зональных течений. Тем не менее соответствующие свидетельства их существования были получены в экспериментах на компактной винтовой системе (CHS) [33] и на токамаках HT-7 [34] и DIII-D [35, 36]. В этих экспериментах были обнаружены полоидально- и тороидально-симметричные возмущения электростатического потенциала плазмы в диапазоне частот 0.5–2 кГц. Обычно конечные частоты стационарных зональных течений связывают с их взаимодействием с мелкомасштабной турбулентностью плазмы. Как показывают уже грубые

оценки при  $q = 2-3$  и  $M^2 \lesssim 1$  (см., например, рис. 1), из представленной нами теории следует, что частота таких зональных течений примерно в десять раз ниже частоты ГАМ. Эти оценки согласуются с экспериментальными данными, и, таким образом, нельзя исключить, что конечность частоты низкочастотных зональных течений может быть обусловлена тороидальным вращением и анизотропией давления плазмы.

Можно легко показать, что ГАМ всегда устойчивы. Что касается ЗТ, то они неустойчивы для таких равновесий, что

$$\frac{\tau}{3} \left( 1 + \lambda_{\perp} - \frac{\tau}{6} \right) + \left( \frac{1}{2} + \lambda_p - \frac{\tau}{3} \right) M^2 - \frac{M^4}{2} < 0. \quad (40)$$

Из уравнений (38) и (40) следует, что спектр зональных течений и критерий их устойчивости существенным образом зависят от стратификации по полоидальному углу как поперечного равновесного давления плазмы, так и ее массовой плотности –  $\lambda_{\perp}$  и  $\lambda_p$ . В модели ЧГЛ оба указанных коэффициента не определяются из условия равновесия плазмы, и для их выбора требуются дополнительные аргументы или предположения.

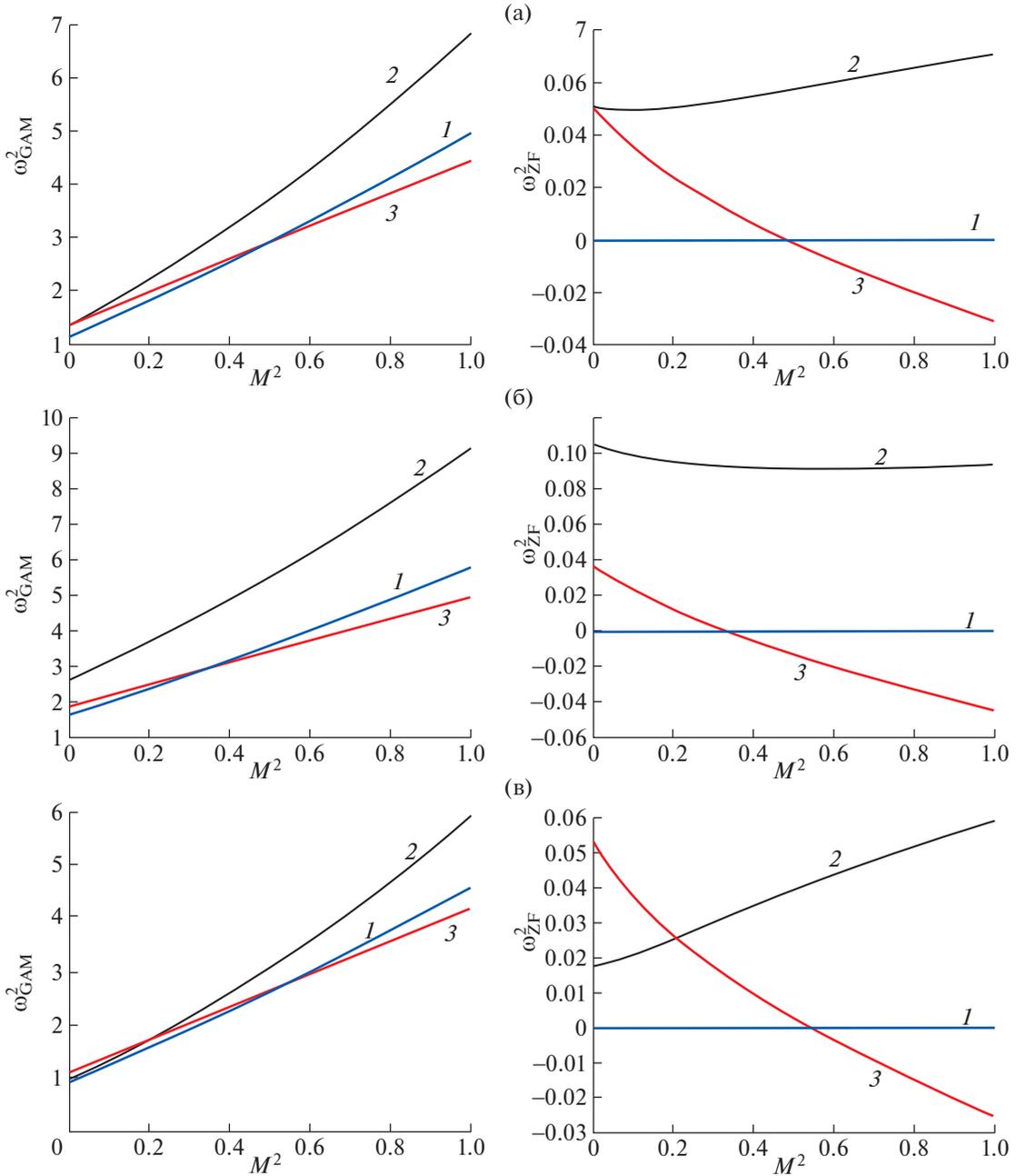
При наличии медленного равновесного полоидального вращения плазмы из уравнений (6) и (7) следует, что функции продольной и поперечной энтропий должны быть однородными на магнитных поверхностях,  $s_{\parallel} = s_{\parallel}(\psi)$ ,  $s_{\perp} = s_{\perp}(\psi)$ . Для такого равновесия  $\lambda_p = M^2/2 + \tau/6 - 1/2$ ,  $\lambda_{\perp} = \lambda_p - 1/2$ , и из дисперсионного уравнения следует, что частота ЗТ равна нулю,  $\omega = 0$ , а частота ГАМ определяется выражением

$$\omega^2 = \left[ \frac{1}{2} + \frac{\tau}{3} + \frac{\tau^2}{18} + \left( 3 + \frac{\tau}{3} \right) M^2 + \frac{M^4}{2} + \frac{1}{q^2} \right] \frac{c_{\parallel}^2}{R_0^2}. \quad (41)$$

Таким образом, частота ГАМ растет с увеличением как скорости тороидального вращения, так и отношения поперечного давления плазмы к ее продольному давлению  $\tau = p_{\perp}/p_{\parallel}$ .

Для часто используемого при описании анизотропной плазмы равновесия с постоянством суммарного давления плазмы на магнитных поверхностях,  $p_{\parallel} + p_{\perp} = P(\psi)$  получаем  $\lambda_{\perp} = (1 - \tau)/2\tau - 3M^2/2\tau$ . При этом величина  $\lambda_p$  по-прежнему не определена и может быть произвольной. Для такого класса равновесий частоты зональных течений описываются дисперсионным уравнением

$$\omega^4 - \left[ \frac{2}{3} + \frac{\tau}{2} + (3 + \lambda_p) M^2 + \frac{1}{q^2} \right] \frac{c_{\parallel}^2}{R_0^2} \omega^2 + \left\{ \frac{1}{6} \left( 1 + \tau - \frac{\tau^2}{3} \right) + \left( \lambda_p - \frac{\tau}{3} \right) M^2 - \frac{M^4}{2} \right\} \frac{c_{\parallel}^4}{q^2 R_0^4} = 0. \quad (42)$$



**Рис. 1.** Зависимости собственных частот ГАМ ( $\omega_{GAM}$ ) и ЗТ ( $\omega_{ZF}$ ) от квадрата числа Маха  $M^2$  для различных равновесий: 1 – равновесие с  $s_{||} = s_{||}(\psi)$ ,  $s_{\perp} = s_{\perp}(\psi)$ ; 2 – giroкинетическое равновесие (43); 3 – равновесие с  $p_{||} + p_{\perp} = P(\psi)$ ,  $\rho = \rho(\psi)$ . Вычисления проведены при  $q = 2$  для различных отношений поперечного и продольного давлений  $\tau$ :  $\tau = 1$  (а);  $\tau = 2$  (б);  $\tau = 1/2$  (в). Собственные частоты нормированы на величину  $c_{||}/R_0$ .

Если дополнительно предположить, что магнитные поверхности являются изохорическими,  $\rho = \rho(\psi)$ , то в этом случае  $\lambda_{\rho} = 0$ , и тороидальное вращение плазмы является дестабилизирующим фактором. При таких скоростях вращения, что

$$M^2 > \frac{1}{3}(\sqrt{3(1 + \tau)} - \tau)$$

низкочастотное ЗТ аperiодически неустойчиво. Ранее в рамках стандартной идеальной МГД-модели подобный дестабилизирующий эффект тороидального вращения на зональные течения для равновесия с изотропным давлением плазмы и изохорическими магнитными поверхностями был предсказан в работах [21, 24].

В недавней работе [37] зональные течения в тороидально-вращающейся плазме токамаков исследовались в рамках гирокинетического подхода. В рамках такого подхода ранее для двухтемпературных максвелловских функций распределения с использованием дрейфового приближения были получены уравнения равновесного состояния в виде (см., например, [30])

$$p_{\parallel} = \rho T_{\parallel}(\psi), \quad p_{\perp} = \rho T_{\perp}(B, \psi) = \frac{\rho T_{\parallel}(\psi) B}{B - B_0(\psi)}. \quad (43)$$

Учитывая условие равновесия плазмы вдоль магнитного поля (11), находим, что для такого гирокинетического равновесия  $\lambda_{\rho} = (\tau - 1)/2 + 3M^2/2$ ,  $\lambda_{\perp} = \tau - 1 + 3M^2/2$ . В этом случае дисперсионное уравнение (38) записывается в виде

$$\omega^4 - \left[ \frac{1}{2} + \frac{\tau}{3} + \frac{\tau^2}{3} + (3 + \tau)M^2 + \frac{3}{2}M^4 + \frac{1}{q^2} \right] \times \\ \times \frac{c_{\parallel}^2}{R_0^2} \omega^2 + \left( \frac{5\tau^2}{18} + \frac{2\tau}{3}M^2 + M^4 \right) \frac{c_{\parallel}^4}{q^2 R_0^4} = 0. \quad (44)$$

Из данного уравнения следует, что для обсуждаемого равновесия обе ветви зональных течений устойчивы. В предельном случае  $q^2 \gg 1$  частота ГАМ определяется выражением

$$\omega_{\text{ГАМ}}^2 = \left( \frac{1}{2} + \frac{\tau}{3} + \frac{\tau^2}{3} + (3 + \tau)M^2 + \frac{3}{2}M^4 \right) \frac{c_{\parallel}^2}{R_0^2}. \quad (45)$$

Это выражение идентично частоте ГАМ, найденной в работе [37] и описываемой выражением (29) этой работы, если в нем перейти к пределу холодных электронов,  $T_e/T_{\parallel} \rightarrow 0$ . Таким образом, модель ЧГЛ обеспечивает вполне точное описание движений плазмы поперек магнитного поля. В то же время, хорошо известно, что оно не дает столь же точного описания движений плазмы вдоль магнитного поля. Поэтому следует с предосторожностью относиться к полученным эффектам, связанным с продольным движением плазмы. Строго говоря, их описание требует кинетического рассмотрения.

На рис. 1 представлены зависимости частот ЗТ и ГАМ от числа Маха  $M$  для приведенных выше равновесий плазмы при различных значениях параметра  $\tau$ .

#### 4.3. Общий акустико-альфвеновский спектр при $(m, n) \neq 0$

В общем случае при  $(m, n) \neq 0$  после усреднения в нем соответствующих коэффициентов по

полоидальному углу дисперсионное уравнение (34) принимает вид

$$\bar{\omega}^2 - k^2 v_A^2 - \frac{c_{\parallel}^2}{R_0^2} \left[ \frac{1}{2} + \frac{2\tau}{3} + \frac{\tau}{3} \lambda_{\perp} + \left( \frac{7}{2} + \lambda_{\rho} \right) M^2 \right] - \\ - \frac{c_{\parallel}^2}{R_0^2} \frac{g_1 k_+^2 c_{\parallel}^2 + g_2 \bar{\omega} k_+ c_{\parallel}}{\bar{\omega}^2 - k_+^2 c_{\parallel}^2} - \frac{c_{\parallel}^2}{R_0^2} \frac{g_1 k_-^2 c_{\parallel}^2 + g_2 \bar{\omega} k_- c_{\parallel}}{\bar{\omega}^2 - k_-^2 c_{\parallel}^2} = 0. \quad (46)$$

Здесь

$$g_1 = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{\tau}{3} + M^2 \right)^2 + M^2, \quad g_2 = M \left( 1 + \frac{\tau}{3} + M^2 \right).$$

Отметим, что дисперсионное уравнение инвариантно относительно преобразований  $\bar{\omega} \rightarrow \bar{\omega}$ ,  $k \rightarrow -k$ ,  $M \rightarrow -M$  и  $\bar{\omega} \rightarrow -\bar{\omega}$ ,  $k \rightarrow -k$ ,  $M \rightarrow M$ .

Из этого уравнения следует, что сильное тороидальное зацепление альфвеновских и медленных звуковых возмущений имеет место только для мод, локализованных вблизи резонансной магнитной поверхности  $r = r_s$ ,  $m - nq(r_s) = 0$ . При локализации возмущений вдали от  $r = r_s$  решения уравнения (46) в системе отсчета, вращающейся с плазмой, приближаются к частотам альфвеновских волн с полоидальным волновым числом  $m$ ,  $\bar{\omega}^2 \rightarrow k^2 v_A^2$ , и к частотам медленных звуковых волн с полоидальными числами  $m + 1$  и  $m - 1$ ,  $\bar{\omega}^2 \rightarrow k_{\pm}^2 c_{\parallel}^2$ .

Для мод, локализованных в области вблизи рациональной магнитной поверхности  $r = r_s$ , таковой, где  $kv_A \lesssim c_{\parallel}/R_0$ , но при этом  $k \ll 1/qR_0$ , дисперсионное уравнение (46) можно переписать в виде

$$\left( \bar{\omega}^2 - \frac{c_{\parallel}^2}{q^2 R_0^2} \right) (\bar{\omega}^4 - U \bar{\omega}^2 + W) + \dots = 0,$$

где

$$U = \left( \frac{1}{2} + \frac{2\tau}{3} + \frac{\tau}{3} \lambda_{\perp} + \left( \frac{7}{2} + \lambda_{\rho} \right) M^2 + \frac{1}{q^2} \right) \frac{c_{\parallel}^2}{R_0^2} + k^2 v_A^2,$$

$$W = \frac{c_{\parallel}^2}{q^2 R_0^2} \left\{ \left[ \frac{\tau}{3} \left( 1 + \lambda_{\perp} - \frac{\tau}{6} \right) + \left( \frac{1}{2} + \lambda_{\rho} - \frac{\tau}{3} \right) M^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{M^4}{2} \right] \frac{c_{\parallel}^2}{R_0^2} + k^2 v_A^2 \right\},$$

а ... означают члены, пропорциональные  $k^2 c_{\parallel}^2$ . Это дисперсионное уравнение описывает шесть ветвей возмущений плазмы, характеризующихся частотами

$$\bar{\omega}_{1,2} = \pm \omega_+, \quad \bar{\omega}_{3,4} = \pm \omega_-,$$

$$\bar{\omega}_{5,6} = \pm \frac{c_{\parallel}}{qR_0} \left[ 1 + O(k^2 R_0^2) \right],$$

где

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left( U \pm \sqrt{U^2 - 4W} \right).$$

Очевидно, что для мод, локализованных строго на рациональной поверхности  $r = r_s$ , частоты  $\bar{\omega}$  первых четырех ветвей возмущений описываются тем же самым дисперсионным уравнением (38), что и частоты зональных течений.

Для мод, локализованных вдали от рациональной поверхности, для которых  $k^2 \gg (\beta_{\perp}, \beta_{\parallel})/R_0^2$ , частоты мод, описываемых вблизи  $r = r_s$  как  $\bar{\omega}_{1,2}$ , приближаются к альфвеновским частотам,  $\bar{\omega}_{1,2} \rightarrow \rightarrow \pm k v_A$ . Частоты других четырех ветвей, соответствующих  $\bar{\omega}_{3,4}$  и  $\bar{\omega}_{5,6}$ , приближаются к частотам звуковых волн, причем

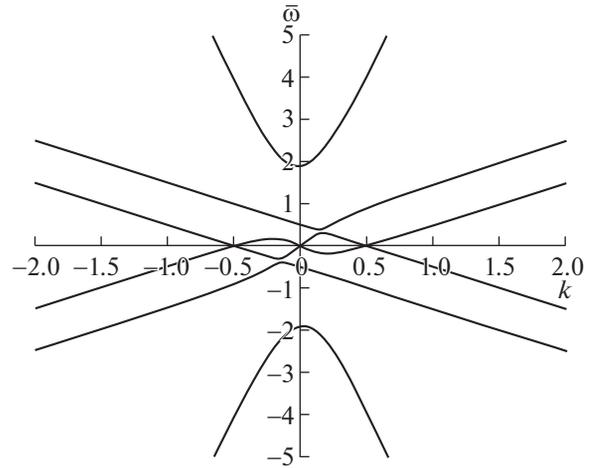
$$\bar{\omega}_{3,4} \rightarrow \pm \left| k \right| - \frac{1}{q R_0} c_{\parallel}, \quad \bar{\omega}_{5,6} \rightarrow \pm \left| k \right| + \frac{1}{q R_0} c_{\parallel}.$$

Для монотонно растущего профиля коэффициента запаса устойчивости  $q$ ,  $q'(r) > 0$ , продольный волновой вектор  $k$  положителен в области  $r < r_s$ ,  $k(r) > 0$ , и отрицателен — в области  $r > r_s$ ,  $k(r) < 0$ . Тогда при  $r < r_s$  частоты мод, описываемых  $\bar{\omega}_{3,4}$ , асимптотически приближаются к звуковым волнам с волновыми числами  $(m - 1, n)$ ,  $\bar{\omega}_{3,4} \rightarrow \pm k_{-} c_{\parallel}$ , а при  $r > r_s$  — к частотам звуковых волн с волновыми числами  $(m + 1, n)$ ,  $\bar{\omega}_{3,4} \rightarrow \pm k_{+} c_{\parallel}$ . Наоборот,  $\bar{\omega}_{5,6} \rightarrow \pm k_{+} c_{\parallel}$  при  $r < r_s$ , и  $\bar{\omega}_{5,6} \rightarrow \pm k_{-} c_{\parallel}$  при  $r > r_s$ . Заметим, что для мод с локализацией вдали от рациональной поверхности  $r = r_s$  на любом радиусе  $|\bar{\omega}_{5,6}| > |\bar{\omega}_{3,4}|$ .

Обусловленные эффектом Кориолиса члены, пропорциональные  $g_2$  в дисперсионном уравнении (46), приводят к асимметрии МГД-спектра относительно продольного волнового числа  $k$  (в отличие от МГД-спектра плазмы в отсутствие тороидального вращения). Эта асимметрия наиболее ярко выражена при  $|k| \lesssim (c_{\parallel}/v_A) R_0^{-1}$ .

Низкочастотный акустико-альфвеновский спектр для равновесия плазмы с  $s_{\parallel} = s_{\parallel}(\psi)$  и  $s_{\perp} = s_{\perp}(\psi)$  схематически представлен на рис. 2. Предполагается, что полоидальное и тороидальное волновые числа являются большими,  $(m, n) \gg 1$ . Продольная компонента волнового вектора  $k$  изменяется из-за радиальной зависимости коэффициента запаса устойчивости  $q$  (вблизи  $q = 2$ ), а остальные физические величины в уравнении (46) предполагаются независимыми от радиуса  $r$ .

Для равновесий плазмы, для которых выполняется условие (40), собственные частоты  $\bar{\omega}_3$  и  $\bar{\omega}_4$  в



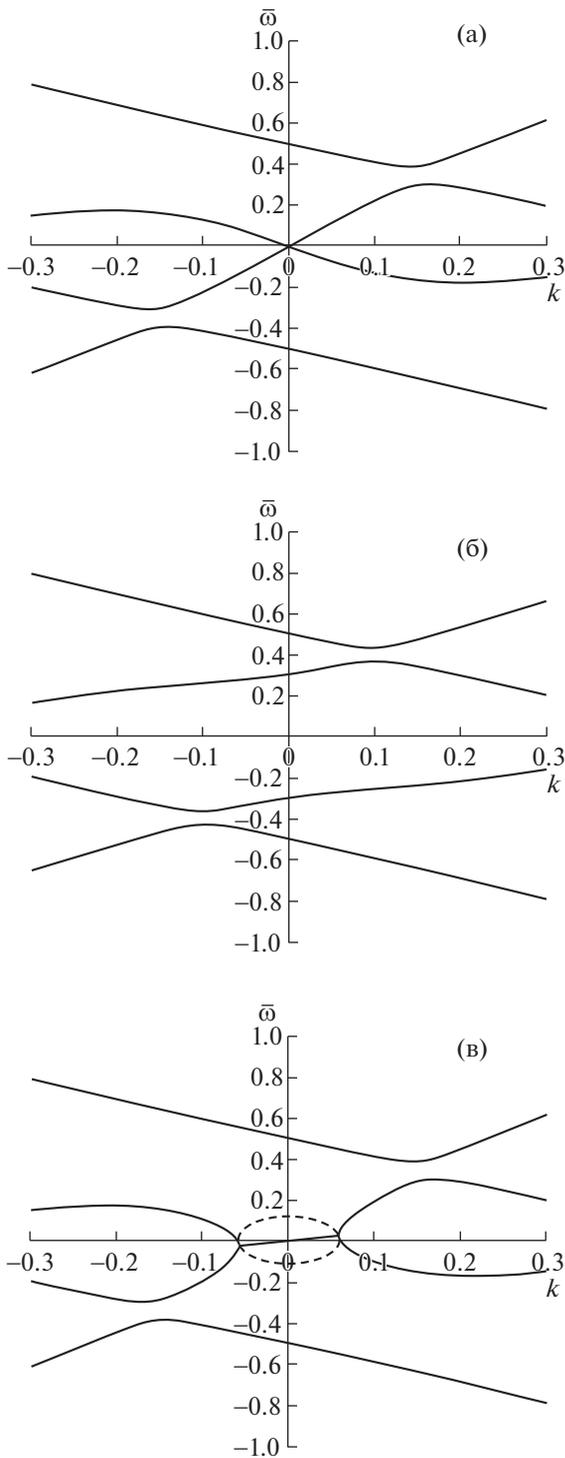
**Рис. 2.** Акустико-альфвеновский спектр для равновесия с  $s_{\parallel} = s_{\parallel}(\psi)$  и  $s_{\perp} = s_{\perp}(\psi)$ . Здесь  $\tau = 2$ ,  $M^2 = 0.5$ ,  $q \approx 2$ ,  $c_{\parallel}^2/v_A^2 = 1/50$ . Собственная частота  $\bar{\omega}$  нормирована на величину  $c_{\parallel}/R_0$ , а продольный волновой вектор  $k$  — на величину  $1/R_0$ .

окрестности рациональной магнитной поверхности  $r = r_s$  становятся комплексными, и, таким образом, МГД-спектр неустойчив. Неустойчивость является аperiodической для мод, локализованных строго на рациональной магнитной поверхности  $r = r_s$ , для которых  $k = 0$ . При  $k \neq 0$  неустойчивая мода обладает ненулевой действительной частью собственной частоты  $\bar{\omega}$ ,  $\text{Re} \bar{\omega} \neq 0$ , и, таким образом, является осциллирующей.

Неустойчивый спектр существенным образом зависит от направления скорости тороидального вращения. При  $\Omega > 0$  частота  $\bar{\omega}_3$ , которая положительна при  $k < -k_0$ , пересекает ось  $\bar{\omega} = 0$  при  $k = -k_0$ , где

$$k_0 = \frac{1}{R_0 v_A} \left[ \frac{M^4}{2} - \left( \frac{1}{2} + \lambda_p - \frac{\tau}{3} \right) M^2 - \frac{\tau}{3} \left( 1 + \lambda_{\perp} - \frac{\tau}{6} \right) \right]^{1/2}.$$

При дальнейшем увеличении  $k$  частоты  $\bar{\omega}_3$  и  $\bar{\omega}_4$  становятся равными друг другу в некоторой точке  $k(r) = -k_* < 0$ ,  $k_* < k_0$ . При этом  $\bar{\omega}_3(-k_*) = \bar{\omega}_4(-k_*) < 0$ . Эта точка  $k = -k_*$  определяет границу неустойчивости, которая имеет место при  $k > -k_*$ . Действительные части этих собственных частот растут по мере увеличения величины  $k$ , и на рациональной поверхности при  $k = 0$  становятся равными нулю,  $\text{Re} \bar{\omega}_{3,4}(0) = 0$ . При дальнейшем росте  $k$  в область положительных значений действительные части собственных частот становятся положительными,  $\text{Re} \bar{\omega}_{3,4} > 0$ , и неустойчивость стабилизируется при  $k = k_*$ . В этой точке



**Рис. 3.** Низкочастотная часть акустико-альфвеновского спектра вблизи рациональной магнитной поверхности для различных равновесий плазмы:  $s_{||} = s_{||}(\psi)$ ,  $s_{\perp} = s_{\perp}(\psi)$  (а); giroкинетическое равновесие (43) (б);  $p_{||} + p_{\perp} = P(\psi)$ ,  $\rho = \rho(\psi)$  (в). Здесь  $\tau = 2$ ,  $M^2 = 0.5$ ,  $q \approx 2$ ,  $c_{||}^2/v_A^2 = 1/50$ ; частота нормирована на величину  $c_{||}/R_0$ , продольный волновой вектор  $k$  — на  $1/R_0$ . Сплошные е линии показывают действительные части частоты  $\bar{\omega}$ ; штриховые линии — мнимые части  $\bar{\omega}$ .

имеет место равенство соответствующих собственных частот,  $\bar{\omega}_3(k_*) = \bar{\omega}_4(k_*) > 0$ . При  $k > k_*$  частота  $\bar{\omega}_4$  является убывающей функцией  $k$  и пересекает ось  $\bar{\omega} = 0$  при  $k = k_0$ , становясь отрицательной в области, в которой  $k > k_0$ .

Зеркальная картина относительно  $k = 0$  (или же рациональной магнитной поверхности) имеет место в случае вращения плазмы в противоположном направлении, т.е. при  $\Omega < 0$ . В этом случае действительные части собственных частот  $\bar{\omega}_3$  и  $\bar{\omega}_4$  положительны при  $-k_0 < k < 0$  и отрицательны при  $0 < k < k_0$ . Таким образом, при  $|k| < k_0$  ( $k \neq 0$ ) продольные фазовые скорости таких возмущений во вращающейся с плазмой системе координат,  $v_{ph} = \text{Re}\bar{\omega}_{3,4}/k$ , имеют тот же знак, что и угловая скорость вращения плазмы,  $\Omega v_{ph} > 0$ .

На рис. 3 изображена низкочастотная часть акустико-альфвеновского спектра в окрестности рациональной магнитной поверхности. Для типичных устойчивых равновесий (рис. 3а, б) и неустойчивого равновесия (рис. 3в) показаны только четыре низкочастотные ветви возмущений, частоты которых стремятся к величинам  $\pm\omega_{\perp}$  и  $\pm c_{||}/qR_0$  при  $k \rightarrow 0$ . В частности, на рис. 3а в области малых  $|k|$  в более крупном масштабе представлена низкочастотная часть спектра, изображенного выше на рис. 2.

### 5. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе представлено исследование низкочастотного МГД-спектра тороидально-вращающейся плазмы с анизотропным давлением в осесимметричных тороидальных системах магнитного удержания. Проведенный анализ базируется на идеальной МГД-модели Чу–Голдбергер–Лоу, в которой термодинамическое равновесие плазмы описывается посредством двух адиабат. Для самого общего равновесия тороидально-вращающейся плазмы с анизотропным давлением, удовлетворяющего уравнениям ЧГЛ, получена система двух дифференциальных уравнений второго порядка относительно полярного угла  $\vartheta$  (27) и (28), описывающая низкочастотные моды, сильно локализованные на магнитных поверхностях. Она описывает тороидальное зацепление медленных магнитозвуковых и альфвеновских возмущений, обусловленное эффектами кривизны магнитного поля, анизотропии давления плазмы, центробежными и кориолисовыми эффектами. В систему уравнений входят две составляющие лагранжевого смещения элемента плазмы, лежащие на магнитной поверхности — параллельная силовым линиям равновесного магнитного поля,  $\zeta$ , и перпендикуляр-

ная по отношению к ним  $\eta$ . Эта система уравнений обобщает уравнения, ранее полученные в работе [25], с учетом эффектов равновесного тороидального вращения плазмы. Полученные нами уравнения также могут рассматриваться как аналог уравнений ван дер Холста и др. [16] применительно к тороидально-вращающейся плазме с анизотропным давлением.

В качестве иллюстрации упрощенный вариант полученных уравнений применен для детального анализа МГД-спектра тороидально-вращающейся плазмы с анизотропным низким давлением  $(\beta_{\parallel}, \beta_{\perp}) \sim \epsilon^2$  в токамаке с большим аспектным отношением,  $\epsilon = a/R_0 \ll 1$ , и круглыми магнитными поверхностями. Используя малость обратного аспектного отношения,  $\epsilon \ll 1$ , при исследовании непрерывного низкочастотного акустико-альфвеновского спектра нами было использовано трехмодовое приближение, в котором учтены только основная гармоника лагранжевого смещения плазмы поперек магнитного поля  $\eta$  с полоидальным волновым числом  $m$  и сателлитные гармоники продольного смещения  $\zeta$  с полоидальными волновыми числами  $m \pm 1$ . В такой постановке задачи аналитически получено общее дисперсионное уравнение для описания непрерывного МГД-спектра (34).

Для полоидально и тороидально симметричных мод с  $(m, n) = 0$  показано существование двух ветвей зональных течений. Такие возмущения с точностью до эффектов порядка  $\beta_{\parallel}, \beta_{\perp}$  являются электростатическими. Показано, что условие их устойчивости и их частоты сильно зависят от стратификации по полоидальному углу равновесных поперечного давления и массовой плотности плазмы на магнитных поверхностях. Получено условие устойчивости зональных течений (37), которое включает в себя кривизну магнитных силовых линий, эффекты тороидального вращения и полоидальную стратификацию продольной и поперечной энтропийных функций. Низкочастотное зональное течение или просто ЗТ имеет конвективную природу и связано с полоидальной стратификацией продольной и поперечной энтропийных функций на магнитных поверхностях. Показано также, что высокочастотные зональные течения (или ГАМ) всегда устойчивы, а низкочастотные зональные течения ЗТ неустойчивы для класса равновесий, описываемого неравенством (40).

В настоящее время нет экспериментальных данных о распределении плотности и давления плазмы по полоидальному углу на магнитных поверхностях токамака. В этой связи не представляется возможным прямое сравнение теоретических предсказаний с результатами эксперимента. Существуют только численные реконструкции

разрядов на основе моделей, учитывающих анизотропию давления плазмы. Например, в недавней работе [38] с использованием кода HELENA+ATF в конфигурации типа токамака MAST для giroкинетического равновесия, описываемого уравнением (43), было показано, что  $p_{\perp}$  может измениться в полоидальном направлении на величину до 20%.

Для электромагнитных возмущений с  $(m, n) \neq 0$  и локализованных строго на рациональной магнитной поверхности  $m - nq(r_s) = 0$  дисперсионное уравнение (46) совпадает с дисперсионным уравнением зональных течений. При локализации возмущений в окрестности рациональной поверхности  $r = r_s$  оно описывает шесть ветвей колебаний. На рациональной поверхности частоты четырех из этих ветвей равны частотам зональных течений. Частоты оставшихся двух ветвей равны частотам сателлитных звуковых волн с полоидальными волновыми числами  $m \pm 1$ ,  $\bar{\omega}_{5,6} = \pm c_{\parallel}/qR_0$ . Для мод, локализованных в области вдали от рациональной поверхности, где доминируют альфвеновские эффекты, тороидальное зацепление мод является слабым, и решения дисперсионного уравнения стремятся к частотам альфвеновских волн с волновыми числами  $(m, n)$  и частотам сателлитных звуковых волн с волновыми числами  $(m \pm 1, n)$ .

В случае равновесий с неустойчивой полоидальной стратификацией плазмы, описываемых условием (40), четыре ветви колебаний с наивысшими по абсолютной величине частотами являются устойчивыми. При этом одна из мод с самыми низкими собственными частотами  $\bar{\omega}_{3,4}$ , переходящими на рациональной магнитной поверхности в собственные частоты низкочастотных зональных течений, неустойчива в окрестности рациональной поверхности при  $|k| < k_* \approx (c_{\parallel}/v_A)R_0^{-1}$ , а другая мода затухает. При  $|k| \geq k_*$  неустойчивость подавляется посредством натяжения магнитных силовых линий (альфвеновским эффектом). При локализации моды строго на рациональной магнитной поверхности при  $r = r_s$  неустойчивость является аperiодической во вращающейся системе координат,  $\text{Re}\bar{\omega}_{3,4} = 0$ . Неустойчивые моды, локализованные в окрестности рациональной поверхности, так, что  $|k| < k_*$ ,  $k \neq 0$ , имеют конечную частоту,  $\text{Re}\bar{\omega} \neq 0$ , и являются осциллирующими. Их продольная фазовая скорость во вращающейся системе координат  $v_{ph}$  имеет тот же знак, что и угловая скорость тороидального вращения  $\Omega$ .

Согласно экспериментальным данным, полученным на токамаке T-10, в разрядах с мощным дополнительным нагревом плазмы [39] частота

возмущений, ассоциируемых с ГАМ, быстро нарастает в процессе дополнительного нагрева и впоследствии существенно медленнее релаксирует к некоторому новому значению, которое превышает частоту ГАМ до включения дополнительного нагрева. Можно предполагать, что такое поведение частоты может быть обусловлено анизотропизацией плазмы при дополнительном нагреве с последующей столкновительной изотропизацией давления, которые приводят к изменению частоты ГАМ в соответствии с выражением для высокочастотного корня уравнения (38). Безусловно, эта предварительная гипотеза требует тщательной проверки.

Работа частично поддержана грантом Российского научного фонда (проект № 14-22-00193), при финансовой поддержке которого получены результаты, приведенные в разделе 4.2, и грантом Российского фонда фундаментальных исследований № 18-29-21041. Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН “5-100”.

ПРИЛОЖЕНИЕ

АЛЬТЕРНАТИВНЫЙ ВЫВОД  
ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ  
ЗОНАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Считаем, что возмущения являются осесимметричными и электростатическими, зависят от времени как  $\exp(-i\omega t)$ , от полоидального магнитного потока  $\psi$ , а также являются периодическими функциями полоидального угла  $\vartheta$  (с периодом  $2\pi$ ). В рамках модели ЧГЛ такие возмущения описываются системой уравнений

$$-i\omega\rho' + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}') = 0, \quad \rho[-i\omega\mathbf{v}' + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}' + (\mathbf{v}' \cdot \nabla)\mathbf{v}] + \quad (A1)$$

$$+ \rho'(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p'_\perp - \nabla \cdot \left( (p'_\parallel - p'_\perp)\mathbf{b} \right)\mathbf{b} - (p'_\parallel - p'_\perp)(\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{b} + \frac{1}{c}\mathbf{j}' \times \mathbf{B}, \quad (A2)$$

$$\mathbf{v}' \times \mathbf{B} = \nabla\Phi', \quad (A3)$$

$$-i\omega \left( \frac{p'_\parallel}{\rho_\parallel} - \frac{3\rho'}{\rho} \right) + \mathbf{v}' \cdot \nabla \ln s_\parallel = 0, \quad (A4)$$

$$-i\omega \left( \frac{p'_\perp}{\rho_\perp} - \frac{\rho'}{\rho} \right) + \mathbf{v}' \cdot \nabla \ln s_\perp = 0, \quad (A5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j}' = 0. \quad (A6)$$

Здесь  $\Phi'$  – возмущенный электростатический потенциал. Из уравнения (A3) следует, что  $\mathbf{B} \cdot \nabla\Phi' = 0$ , так что  $\Phi' = \Phi'(\psi)$  и возмущение

скорости плазмы лежит строго на магнитной поверхности,  $\mathbf{v}' \cdot \nabla\psi = 0$ , и представляется в виде

$$\mathbf{v}' = \frac{1}{B^2} \frac{d\Phi'}{d\psi} \mathbf{B} \times \nabla\psi + U\mathbf{B} \equiv \left( \frac{I}{B^2} \frac{d\Phi'}{d\psi} + U \right) \mathbf{B} - R^2 \frac{d\Phi'}{d\psi} \nabla\varphi, \quad (A7)$$

где  $U/B$  – возмущенная скорость плазмы вдоль магнитного поля. Тогда уравнения (A1), (A4), (A5) переписываются в виде

$$i\omega\rho' = \mathbf{B} \cdot \nabla \left\{ \rho \left( \frac{I}{B^2} \frac{d\Phi'}{d\psi} + U \right) \right\}, \quad i\omega \left( \frac{p'_\parallel}{\rho_\parallel} - \frac{3\rho'}{\rho} \right) = \left( \frac{I}{B^2} \frac{d\Phi'}{d\psi} + U \right) \mathbf{B} \cdot \nabla \ln s_\parallel, \quad (A8)$$

$$i\omega \left( \frac{p'_\perp}{\rho_\perp} - \frac{\rho'}{\rho} \right) = \left( \frac{I}{B^2} \frac{d\Phi'}{d\psi} + U \right) \mathbf{B} \cdot \nabla \ln s_\perp.$$

Из уравнения (A1) следует, что баланс возмущенных сил вдоль магнитного поля описывается уравнением

$$i\omega\rho UB^2 = \left( \rho\Omega \frac{d\Phi'}{d\psi} - \frac{\rho' \Omega^2}{2} \right) \mathbf{B} \cdot \nabla R^2 + \mathbf{B}\mathbf{B} \cdot \nabla \left( \frac{p'_\parallel}{B} \right) - p'_\perp \mathbf{B}\mathbf{B} \cdot \nabla \left( \frac{1}{B} \right). \quad (A9)$$

Возмущение плотности тока представляем в виде разложения

$$\mathbf{j}' = \frac{\mathbf{j}' \cdot \nabla\psi}{|\nabla\psi|^2} \nabla\psi + \frac{\mathbf{j}' \cdot (\mathbf{B} \times \nabla\psi)}{B^2 |\nabla\psi|^2} \mathbf{B} \times \nabla\psi + \frac{\mathbf{j}' \cdot \mathbf{B}}{B^2} \mathbf{B}. \quad (A10)$$

Подставляя это разложение в уравнение (A6) и учитывая осевую симметрию рассматриваемых возмущений, получаем

$$\nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{j}' \cdot \nabla\psi}{|\nabla\psi|^2} \nabla\psi \right) + \mathbf{B} \cdot \nabla \left\{ I \frac{\mathbf{j}' \cdot (\mathbf{B} \times \nabla\psi)}{B^2 |\nabla\psi|^2} + \frac{\mathbf{j}' \cdot \mathbf{B}}{B^2} \right\} = 0. \quad (A11)$$

Оператор  $\mathbf{B} \cdot \nabla$  для осесимметричного равновесия и осесимметричных возмущений представляется в виде

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \equiv \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial\vartheta},$$

где  $J = ((\nabla\varphi \times \nabla\psi) \cdot \nabla\vartheta)^{-1}$  – якобиан перехода от цилиндрических координат  $\{R, Z, \varphi\}$  к тороидальным потоковым координатам  $\{\psi, \vartheta, \varphi\}$ . Умножая

уравнение (A11) на  $J$  и интегрируя по  $\vartheta$  с учетом периодичности равновесных и возмущенных функций по полоидальному углу, приходим к следующему уравнению

$$\int_0^{2\pi} J \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{j}' \cdot \nabla \Psi}{|\nabla \Psi|^2} \nabla \Psi \right) d\vartheta = 0,$$

или же, упрощая далее с учетом очевидного тождества

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{a} &= \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \Psi} [J(\mathbf{a} \cdot \nabla \Psi)] + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \vartheta} [J(\mathbf{a} \cdot \nabla \vartheta)] + \\ &+ \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \varphi} [J(\mathbf{a} \cdot \nabla \varphi)], \end{aligned}$$

получаем

$$\frac{d}{d\Psi} \int_0^{2\pi} J(\mathbf{j}' \cdot \nabla \Psi) d\vartheta = 0. \quad (\text{A12})$$

Из уравнения (A2) находим

$$\mathbf{j}' \cdot \nabla \Psi = -\frac{c\mathbf{B} \times \nabla \Psi \cdot \mathbf{F}}{B^2},$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \rho[-i\omega \mathbf{v}' + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}' + (\mathbf{v}' \cdot \nabla) \mathbf{v}] - \\ &- \frac{\rho' \Omega^2}{2} \nabla R^2 + \nabla p'_\perp + (p'_\parallel - p'_\perp)(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b}. \end{aligned}$$

С учетом выражения для возмущенной скорости  $\mathbf{v}'$  (A7), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{j}' \cdot \nabla \Psi &= -i\rho\omega c \frac{|\nabla \Psi|^2}{B^2} \frac{d\Phi'}{d\Psi} - \frac{I\rho' c\Omega^2}{2B^2} \mathbf{B} \cdot \nabla R^2 + \\ &+ \frac{Ic}{B^2} \mathbf{B} \cdot \nabla p'_\perp - \frac{c(p'_\parallel - p'_\perp)}{B} \mathbf{B} \cdot \nabla \left( \frac{I}{B} \right) - \\ &- \rho c \Omega U \mathbf{B} \cdot \nabla R^2. \end{aligned} \quad (\text{A13})$$

Подставляем выражение (A13) в уравнение (A12) и, интегрируя по частям, а также пренебрегая полоидальными осцилляциями  $I$ , считая  $I \approx I(\Psi)$ , окончательно приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\Psi} \int_0^{2\pi} J \left( i\rho\omega \frac{|\nabla \Psi|^2}{B^2} \frac{d\Phi'}{d\Psi} + \frac{I\rho' \Omega^2}{2B^2} \mathbf{B} \cdot \nabla R^2 + \right. \\ \left. + \frac{I(p'_\parallel + p'_\perp)}{2B^2} \mathbf{B} \cdot \nabla \ln \left( \frac{1}{B^2} \right) + \rho \Omega U \mathbf{B} \cdot \nabla R^2 \right) d\vartheta = 0. \end{aligned} \quad (\text{A14})$$

Замкнутая система уравнений (A8), (A9), (A14) описывает возмущения тороидально-вращающейся плазмы в виде зональных течений.

Далее, в качестве иллюстрации мы применим эту систему уравнений для вывода дисперсионного уравнения зональных течений при тех же предположениях, что и в разд. 4. Тогда уравнения

(A8), (A9) упрощаются и с необходимой точностью принимают вид

$$\begin{aligned} i\omega \rho' &= \frac{I\rho}{B^2} \frac{d\Phi'}{d\Psi} \mathbf{B} \cdot \nabla \ln \left( \frac{\rho}{B^2} \right) + \rho \mathbf{B} \cdot \nabla U, \\ i\omega p'_\parallel &= \frac{3Ip'_\parallel}{B^2} \frac{d\Phi'}{d\Psi} \mathbf{B} \cdot \nabla \ln \left( \frac{\rho s'_\parallel}{B^2} \right) + 3p'_\parallel \mathbf{B} \cdot \nabla U, \\ i\omega p'_\perp &= \frac{Ip'_\perp}{B^2} \frac{d\Phi'}{d\Psi} \mathbf{B} \cdot \nabla \ln \left( \frac{\rho s'_\perp}{B^2} \right) + p'_\perp \mathbf{B} \cdot \nabla U, \\ i\omega \rho U B^2 &= \rho \Omega \frac{d\Phi'}{d\Psi} \mathbf{B} \cdot \nabla R^2 + \mathbf{B} \cdot \nabla p'_\parallel. \end{aligned} \quad (\text{A15})$$

Исключая возмущение продольного давления плазмы, выражаем величину  $U$ , определяющую продольную возмущенную скорость, через возмущенный электростатический потенциал  $\Phi'$

$$\begin{aligned} \left( \omega^2 - \frac{c_\parallel^2}{q^2 R^2} \right) U &= -\frac{i\omega \Omega}{B^2} \frac{d\Phi'}{d\Psi} \mathbf{B} \cdot \nabla R^2 - \\ &- \frac{Ic_\parallel^2}{B^4} \frac{d\Phi'}{d\Psi} (\mathbf{B} \cdot \nabla)^2 \ln \left( \frac{\rho s'_\parallel}{B^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{A16})$$

Умножаем уравнение (A14) на  $-i\omega$  и подставляем в него выражения для возмущений продольного и поперечного давлений (A15). В результате оно принимает вид

$$\frac{d}{d\Psi} \int_0^{2\pi} J (\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3) d\vartheta = 0, \quad (\text{A17})$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \rho \frac{d\Phi'}{d\Psi} \left\{ \frac{|\nabla \Psi|^2}{B^2} \omega^2 - \frac{I^4 c_\parallel^2}{2q^2 R^4 B^4} \times \right. \\ &\times \left( M^2 \frac{\partial}{\partial \vartheta} \ln R^2 \frac{\partial}{\partial \vartheta} \ln \left( \frac{\rho}{B^2} \right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \ln \left( \frac{1}{B^2} \right) \times \right. \\ &\times \left. \left[ \frac{\partial}{\partial \vartheta} \ln \left( \frac{\rho s'_\parallel}{B^2} \right) + \frac{\tau}{3} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \ln \left( \frac{\rho s'_\perp}{B^2} \right) \right] \right\}, \\ \Lambda_2 &= -\frac{I^3 c_\parallel^2}{2q^2 R^4 B^2} \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \times \\ &\times \left\{ \left( 1 + \frac{\tau}{3} \right) \frac{\partial}{\partial \vartheta} \ln \left( \frac{1}{B^2} \right) + M^2 \frac{\partial}{\partial \vartheta} \ln R^2 \right\}, \\ \Lambda_3 &= -i\omega \rho M c_\parallel U \frac{I}{qR} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \ln R^2. \end{aligned}$$

Из уравнения (A16) следует, что  $U = U^{(1)} + U^{(2)}$ , где

$$U^{(1)} = -\frac{i\omega M c_\parallel}{\omega^2 - c_\parallel^2 / q^2 R^2} \frac{I}{qR B^2} \frac{d\Phi'}{d\Psi} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \ln R^2,$$

$$U^{(2)} = -\frac{c_{\parallel}^2}{\omega^2 - c_{\parallel}^2/q^2 R^2} \frac{I^3}{q^2 R^4 B^4} \frac{d\Phi'}{d\psi} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \ln \left( \frac{\rho \delta_{\parallel}^{1/3}}{B^2} \right).$$

Производим усреднение члена с  $\Lambda_1$  по полоидальному углу, учитывая, что  $J \approx J(r)$ ,  $I \approx RB$ ,  $|\nabla\psi|^2/B^2 \approx r^2/q^2$ . В результате получаем

$$\int_0^{2\pi} J \Lambda_1 d\vartheta \approx 2\pi \rho J \frac{r^2}{q^2} (\omega^2 - \omega_0^2) \frac{d\Phi'}{d\psi}. \quad (A18)$$

Что касается вклада двух членов, связанных с продольным движением плазмы, то при интегрировании по полоидальному углу  $\vartheta$  вклад в член пропорциональный  $\Lambda_2$  дает только  $U^{(2)}$ , а вклад в связанный с силой Кориолиса член, пропорциональный  $\Lambda_3$  — только  $U^{(1)}$ . Интегрируя по  $\vartheta$ , получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} J \Lambda_2 d\vartheta &\approx -2\pi \rho J \frac{r^2}{q^2} \frac{c_{\parallel}^4}{q^2 R^4} \frac{G^{(1)}}{\omega^2 - c_{\parallel}^2/q^2 R^2} \frac{d\Phi'}{d\psi}, \\ \int_0^{2\pi} J \Lambda_3 d\vartheta &\approx -2\pi \rho J \frac{r^2}{q^2} \frac{M^2 c_{\parallel}^2}{R^2} \times \\ &\times G^{(2)} \left( 1 + \frac{c_{\parallel}^2/q^2 R^2}{\omega^2 - c_{\parallel}^2/q^2 R^2} \right) \frac{d\Phi'}{d\psi}, \end{aligned} \quad (A19)$$

где

$$\begin{aligned} G^{(1)} &= \frac{1}{4} \left\langle \left[ \left( 1 + \frac{\tau}{3} \right) \frac{\partial}{\partial \vartheta} \ln \left( \frac{1}{B^2} \right) + M^2 \frac{\partial}{\partial \vartheta} \ln R^2 \right]^2 \right\rangle, \\ G^{(2)} &= \left\langle \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} \ln R^2 \right)^2 \right\rangle. \end{aligned}$$

При усреднении по полоидальному углу члена, пропорционального  $\Lambda_2$  в уравнение (A19), было использовано тождество (36).

Подставляя выражения (A18)–(A19) в уравнение (A17), получаем дисперсионное уравнение зональных течений в анизотропной тороидально-вращающейся плазме

$$\omega^2 - \omega_G^2 - \frac{c_{\parallel}^4}{q^2 R^4} \frac{G}{\omega^2 - c_{\parallel}^2/q^2 R^2}, \quad (A20)$$

где

$$G = G^{(1)} + M^2 G^{(2)}.$$

Это уравнение можно переписать в виде, эквивалентном дисперсионному уравнению (35).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fasoli A., Gormenzano C., Berk H.L., Breizman B., Briguglio S., Darrow D.S., Gorelenkov N., Heidbrink W.W., Jaun A., Kononov S.V., Nazikian R., Noterdaeme J.-M.,

- Sharapov S., Shinohara K., Testa D., Tobita K., Todo Y., Vlad G., Zonca F. // Nucl. Fusion. 2007. V. 47. P. S264.
2. Vlasenkov V.S., Kulygin V.M., Leonov V.M., Merezhkin V.G., Mukhovatov V.S., Semashko N.N., Sinitsyna L.D., Panasenkov A.A., Tulinin G.N. // Plasma Phys. Control. Nucl. Fusion Res. (Proc. 6th Int. Conf., Berchtesgaden, 1976). Vienna: IAEA. V. 1. P. 85.
3. Andryukhina E.D., Danilkin I.S., Dyabilin K.S., Fedyanin O.I. // Proc. 12th Eur. Conf. Controlled Fusion and Plasma Phys. (Budapest, 1985). ECA. V. 9F. Part I. P. 481.
4. Cotrell C.A., Start D.F.H. // Nuclear Fusion. 1991. V. 31. P. 61.
5. Yamada H., Ida K., Iguchi H., Morita S., Kaneko O., Arimoto H., Hosokawa M., Idei H., Kubo S., Matsuoaka K., Nishimura K., Okamura S., Takeiri Y., Takita Y., Takahashi C., Hanatani K., Howe H.C., Hirshman S.P., Lee D.K. // Nucl. Fusion. 1992. V. 32. P. 25.
6. Zwingmann W., Ericsson L.G., Stubberfield P. // Plasma Phys. Controlled Fusion. 2001. V. 43. P. 1441.
7. Yamaguchi T., Watanabe K.Y., Sakakibara S., Narushima Y., Narihara K., Tokuzawa T., Tanaka K., Yamada I., Osakabe M., Yamada H., Kawahata K., Yamazaki K., LHD Experimental Group // Nucl. Fusion. 2005. V. 45. P. L33.
8. Watanabe K., Suzuki Y., Sakakibara S., Yamaguchi T., Narushima Y., Nakamura Y., Ida K., Nakajima N., Yamada H., LHD Experiment Group // Fusion Sci. Technol. 2010. V. 58. P. 160.
9. Asahi Y., Suzuki Y., Watanabe K., Cooper W.A. // Plasma Fusion Res. 2011. V. 6. P. 2403123.
10. Hole M.J., von Nessi G., Fitzgerald M., McClements K.G., Svensson J., the MAST team // Plasma Phys. Controlled Fusion. 2011. V. 53. P. 074021.
11. de Grassie J.S. // Plasma Phys. Controlled Fusion. 2009. V. 51. P. 124047.
12. Ida K., Rice J.E. // Nuclear Fusion. 2014. V. 54. P. 045001.
13. Rice J.E. // Plasma Phys. Controlled Fusion. 2016. V. 58. P. 083001.
14. Goedbloed J.P. // Phys. Fluids. 1975. V. 18. P. 1258.
15. van der Holst B., Beliën A.J.C., Goedbloed J.P. // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. P. 2865.
16. van der Holst B., Beliën A.J.C., Goedbloed J.P. // Phys. Plasmas. 2000. V. 7. P. 4208.
17. Goedbloed J.P., Beliën A.J.C., van der Holst B., Kerpens R. // Phys. Plasmas. 2004. V. 11. P. 28.
18. Wang S. // Phys. Rev. Lett. 2006. V. 97. P. 085002.
19. Wahlberg C. // Phys. Rev. Lett. 2008. V. 101. P. 115003.
20. Wahlberg C. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2009. V. 51. P. 085006.
21. Lakhin V.P., Ilgisonis V.I., Smolyakov A.I. // Phys. Lett. A. 2010. V. 374. P. 4872.
22. Ilgisonis V.I., Lakhin V.P., Smolyakov A.I., Sorokina E.A. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2011. V. 53. P. 065008.
23. Lakhin V.P., Ilgisonis V.I. // Phys. Plasmas. 2011. V. 18. P. 092103.
24. Haverkort J.W., de Blank H.J., Koren B. // J. Comp. Phys. 2012. V. 231. P. 981.

25. *Lakhin V.P., Sorokina E.A.* // Phys. Plasmas. 2018. V. 25. P. 072111.
26. *Gorelenkov N.N., Berk H.L., Fredrickson E., Sharapov S.E., JET EFDA Contributors* // Phys. Lett. A. 2007. V. 370. P. 70.
27. *Chew G.F., Goldberger M.L., Low F.E.* // Proc. R. Soc. London Ser. A. 1956. V. 236. P. 112.
28. *Захаров Л.Е., Шафранов В.Д.* Вопросы теории плазмы / Под ред. М. А. Леонтовича и Б.Б. Кадомцева. М.: Энергоиздат, 1982. Вып. 11. С. 118.
29. *Igisonis V.I.* // Phys. Plasmas. 1996. V. 3. P. 4577.
30. *Iacono R., Bondeson A., Troyon F., Gruber A.* // Phys. Fluids B. 1990. V. 2. P. 1794.
31. *Fujisawa A., Ido T., Shimizu A., Okamura S., Matsuoka K., Iguchi H., Hamada Y., Nakano H., Ohshima S., Itoh K., Hoshino K., Shinohara K., Miura Y., Nagashima Y., Itoh S.-I., Shats M., Xia H., Dong J.Q., Yan L.W., Zhao K.J., Conway G.D., Stroth U., Melnikov A.V., Eliseev L.G., Lysenko S.E., Perfilov S.V., Hidalgo C., Tynan G.R., Holland C., Diamond P.H., McKee G.R., Fonck R.J., Gupta D.K., Schoch P.M.* // Nuclear Fusion. 2007. V. 47. P. S718.
32. *Fujisawa A.* // Nucl. Fusion. 2009. V. 49. P. 013001.
33. *Fujisawa A., Itoh K., Iguchi H., Matsuoka K., Okamura S., Shimizu A., Minami T., Yoshimura Y., Nagaoka K., Takahashi C., Kojima M., Nakano H., Ohshima S., Nishimura S., Isobe M., Suzuki C., Akiyama T., Ida K., Toi K., Itoh S.-I., Diamond P.H.* // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 93. P. 165002.
34. *Xu G.S., Wan B.N., Song M., Li J.* // Phys. Rev. Lett. 2003. V. 91. P. 125001.
35. *Gupta D.K., Fonck R.J., McKee G.R., Schlossberg D.J., Shafer M.W.* // Phys. Rev. Lett. 2006. V. 97. P. 125002.
36. *McKee G.R., Gohil P., Schlossberg D.J., Boedo J.A., Burrell K.H., deGrassie J.S., Groebner R.J., Moyer R.A., Petty C.C., Rhodes T.L., Schmitz L., Shafer M.W., Solomon W.M., Umansky M., Wang G., White A.E., Xu X.* // Nucl. Fusion 2007. V. 49. P. 115016.
37. *Ren H.* // Phys. Plasmas. 2015. V. 22. P. 072502.
38. *Qu Z.S., Fitzgerald M., Hole M.J.* // Plasma Phys. Controlled Fusion. 2014. V. 56. P. 075007.
39. *Мельников А.В.* 2018 (личное сообщение).

## Low-Frequency Continuous MHD Spectrum of Toroidally Rotating Tokamak Plasmas with Anisotropic Pressure

V. P. Lakhin<sup>a, b</sup> and E. A. Sorokina<sup>a, b, \*</sup>

<sup>a</sup> National Research Center "Kurchatov Institute", Moscow, 123182 Russia

<sup>b</sup> Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, 117198 Russia

**Abstract**—Continuous-spectrum equations for low-frequency ideal magnetohydrodynamic perturbations in toroidally rotating plasmas with anisotropic pressure in axisymmetric tokamaks are derived in the framework of the Chew–Goldberger–Low model. In the rotating coordinate system, these equations describe the toroidal coupling of Alfvén and slow magnetosonic modes due to the curvature of magnetic field lines, the pressure anisotropy, and the centrifugal and Coriolis effects. The derived general equations are applied to study the spectra of both the zonal flows and the general electromagnetic modes in low-pressure large-aspect-ratio tokamaks. The condition for the instability of zonal flows due to plasma stratification over the poloidal angle on a magnetic surface is obtained. It is shown that a similar instability takes place for the general modes localized in the vicinities of rational magnetic surfaces. Stabilization of this instability by the Alfvén effect for the modes localized far from rational surfaces is shown.