

## МОДУЛЯЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ, ИОННО-ЗВУКОВЫЕ СОЛИТОНЫ ОГИБАЮЩЕЙ И ВОЛНЫ-УБИЙЦЫ В ЧЕТЫРЕХКОМПОНЕНТНОЙ ПЛАЗМЕ

© 2019 г. N. A. Chowdhury<sup>a,\*</sup>, A. Mannan<sup>a</sup>, M. M. Hasan<sup>a</sup>, A. A. Mamun<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Department of Physics, Jahangirnagar University, Savar, Dhaka-1342, Bangladesh

\* e-mail: nurealam1743phy@gmail.com

Поступила в редакцию 14.08.2018 г.

После доработки 08.10.2018 г.

Принята к публикации 25.10.2018 г.

Теоретически исследована модуляционная неустойчивость (МН) ионно-звуковых волн (ИЗВ) в плазменной системе, состоящей из инерционных адиабатических горячих ионов, изотермических позитронов, и сверхтермических электронов двух температур (холодных и горячих). Методом малых возмущений получено нелинейное уравнение Шредингера (НелУШ), определяющее модуляционную неустойчивость ионно-звуковых волн. Численный анализ НелУШ показал существование как стабильного (темная огибающая солитонов), так и нестабильного (светлая огибающая солитонов и волн-убийц) режимов ИЗВ. Показано, что основные черты ИЗВ (например, устойчивость волнового профиля и инкремент развития МН) существенно модифицированы сверхтермичностью электронов и соответствующими параметрами плазмы. Результаты настоящих исследований могут быть полезны для понимания различных нелинейных процессов как в космической (например, в магнитосфере Сатурна и межпланетном пространстве), так и в лабораторной плазмах (например, горячего катодного разряда и высокоинтенсивного лазерного излучения).

DOI: 10.1134/S0367292119050020

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В течение последних нескольких десятилетий исследования, связанные с электрон-позитрон-ионной ( $e-p-i$ ) плазмой, впечатляюще увеличивались благодаря наблюдениям (спутник Викинг [1] и миссия Фемиды [2]), показавшим существование большого количества  $e-p-i$ -плазмы в космосе, а именно: в магнитосфере Сатурна [3], магнитосфере пульсара [4], а также лабораторной плазме [5]. Для понимания физики коллективного поведения в такого сорта космической и лабораторной плазме, многие авторы рассматривали волновую динамику [6–9], например, электронно-звуковые (ЭЗВ), позитрон-звуковые (ПЗВ), ионно-звуковые (ИЗ) волны (ИЗВ), и ИЗ волн-убийцы (ИЗВУ).

Высокоэнергичные частицы могут сосуществовать с изотермически-распределенными частицами в космической и лабораторной плазмах с характеристиками, отличными от распределения Максвелла. Иногда распределение таких энергичных частиц может оказаться в хвосте высоких энергий немаксвелловского распределения, известного как обобщенный Лоренциан или каппа ( $\kappa$ ) распределение [10–12].  $\kappa$ -распределение и его связь с распределением Максвелла впервые было

описано Василуносом [12]. Такое распределение могло возникнуть в результате воздействия внешних сил на космическую плазму или взаимодействия волн с частицами. Лоренциан или  $\kappa$ -распределение сводится к распределению Максвелла в пределе больших спектральных индексов [11], т.е. при  $\kappa \rightarrow \infty$ . Ряд работ был посвящен рассмотрению модели плазмы с надтепловыми электронами одной температуры [7, 12]. Однако обнаружено, что электроны обладают двумя различными температурами как в космической, так и в лабораторных плазмах, например, плазма солнечного ветра, высокоинтенсивного лазерного излучения [13], термоядерной турбулентности, горячего катодного разряда [14] содержит электроны двух температур. Панвар и др. [3] исследовал косые ИЗ кноидальные волны в замагниченной плазме используя  $\kappa$ -распределение электронов двух температур. Балуку и Хелберг [6] исследовали ИЗ-солитоны рассматривая  $\kappa$ -распределение электронов двух температур в магнитосфере Сатурна и обнаружили, что солитоны обеих полярностей могут существовать во всем диапазоне значений отношения концентраций горячих электронов. Шахмансоури и Алинеяд [15] исследовали линейное и нелинейное возбуждение произвольных амплитуд ИЗ уединенных

волн в замагниченной плазме содержащей электроны двух температур и обнаружили, что надтепловые электроны приводят к уменьшению фазовой скорости для обеих мод. Рехман и Мишра [16] анализировали ИЗ уединенные волны в  $e-p-i$  плазме с электронами двух температур и изотермическими позитронами и обнаружили, что отношение холодной температуры электронов к горячей играет решающую роль при генерации и регулировании формы солитонов.

До последнего времени число теоретических и экспериментальных исследований модуляционной неустойчивости (МН) ИЗВ постоянно росло из-за успешного ее применения как для космической [7], так и для лабораторной плазмы [17–21]. МН ИЗВ в плазме является краугольным процессом при формировании высоко энергичных ИЗВУ (благодаря взаимодействию волна-волна) или светлой огибающей солитонов в области неустойчивости, в противном случае темная огибающая солитонов может быть сформирована в области устойчивости. Нелинейное уравнение Шредингера (НелУШ) было использовано для понимания различных нелинейных явлений таких, как МН [12], ИЗВУ [8] и огибающие [7] структуры, которые наблюдаются в космической [9] и лабораторной [12] плазмах. Шалини и др. [8] исследовал ИЗВУ в неэкстенсивной плазме с электронами двух температур и обнаружил что ширина ИЗВУ уменьшается с увеличением отношения температур холодных и горячих электронов. Сабри и др. [9] изучили цилиндрические и сферические ИЗ солитоны огибающей в четырех компонентной плазме с холодными ионами, электронами с двумя различными температурами и горячими позитронами и обнаружили, что есть зависимость критического волнового числа ( $\kappa_c$ ) от концентрации позитронов. Алинеяд и др. [22] исследовал МН ИЗВ в плазме с  $\kappa$ -распределением электронов двух температур и обнаружил, что популяция горячих электронов приводит к сокращению области МН. Баха и др. [23] изучал ИЗВУ в двухкомпонентной плазменной среде в присутствии неэкстенсивных электронов и нашел, что ИЗВУ могут оказаться под кардинальным воздействием электронной неэкстенсивности. Как известно, влияние электронов с  $\kappa$ -распределением для двух температур и изотермических позитронов на МН ИЗВ в четырехкомпонентной плазме изучено не было. Таким образом, в нашей работе мы выведем НелУШ, используя метод малых возмущений (ММВ), для исследования МН ИЗВ в немагниченной  $e-p-i$  плазме в присутствии теплых адиабатических ионов, надтепловых электронов с двумя различными температурами (низкой и высокой) и изотермических позитронов.

Остальная часть рукописи организована следующим образом: основные уравнения для на-

шей плазменной модели представлены в разд. 2. МН ИЗВ и ИЗВУ исследуются в разд. 3. Солитоны огибающей показаны в разд. 4. В разд. 5 приведено краткое обсуждение.

## 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим немагниченную плазменную систему, содержащую инерционные горячие адиабатические ионы, изотермические позитроны и надтепловые электроны двух температур (горячие и холодные). В равновесии условие квазинейтральности может быть записано в виде  $Zn_{i0} + n_{p0} = n_{h0} + n_{c0}$ , где  $n_{i0}$ ,  $n_{p0}$ ,  $n_{h0}$  и  $n_{c0}$  – равновесные концентрации горячих адиабатических ионов, изотермических позитронов и надтепловых горячих и холодных электронов соответственно. Основные безразмерные уравнения для описания ИЗВ имеют вид

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n_i u_i) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + 3\alpha n_i \frac{\partial n_i}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = (1 + \mu_p - \mu_h) n_c + \mu_h n_h - \mu_p n_p - n_i, \quad (3)$$

где  $n_i$  – концентрация ионов, отнесенная к ее равновесному значению  $n_{i0}$ ,  $u_i$  – гидродинамическая скорость ионов, отнесенная к скорости ИЗ-волны  $C_i = (Zk_B T_c / m_i)^{1/2}$  (здесь  $T_c$  – температура холодных электронов,  $m_i$  – масса покоя ионов,  $k_B$  – константа Больцмана);  $\phi$  – электростатический потенциал волны, отнесенный к  $k_B T_c / e$  (здесь  $e$  – заряд электрона) время и пространственные переменные отнесены к  $\omega_{pi}^{-1} = (m_i / 4\pi Z^2 e^2 n_{c0})^{1/2}$  и  $\lambda_{Di} = (k_B T_c / 4\pi Z^2 e^2 n_{i0})^{1/2}$  соответственно,  $p_i = p_{i0} (N_i / n_{i0})^\gamma$  (здесь  $p_{i0}$  – равновесное адиабатическое давление горячих ионов и  $\gamma = (N + 2) / N$ , где  $N$  – степень свободы, для одномерного случая  $N = 1$ , таким образом  $\gamma = 3$ );  $p_{i0} = n_{i0} k_B T_i$  (здесь  $T_i$  – температура горячих ионов и  $k_B$  – константа Больцмана);  $\alpha = T_i / Z T_c$ ,  $\mu_h = n_{h0} / Z n_{i0}$  и  $\mu_p = n_{p0} / Z n_{i0}$ . Выражение для концентрации холодных электронов следует из  $\kappa$ -распределения [6, 11, 12] и может быть выражено следующим образом:

$$n_c = \left[ 1 - \frac{\phi}{\kappa_c - 3/2} \right]^{-\kappa_c + 1/2} = 1 + C_1 \phi + C_2 \phi^2 + C_3 \phi^3 + \dots, \quad (4)$$

где

$$C_1 = \frac{\kappa_c - 1/2}{\kappa_c - 3/2},$$

$$C_2 = \frac{(\kappa_c - 1/2)(\kappa_c + 1/2)}{2(\kappa_c - 3/2)^2},$$

$$C_3 = \frac{(\kappa_c - 1/2)(\kappa_c + 1/2)(\kappa_c + 3/2)}{6(\kappa_c - 3/2)^3}.$$

Здесь  $\kappa_c$  (обычные значения  $\kappa_c \approx 1.8-3$  в магнитосфере достигает значений 8–10 [6]) – надтепловой параметр для холодных электронов. Выражение для концентрации горячих электронов, следующее из  $k$ -распределения, может быть записано в виде

$$n_h = \left[ 1 - \frac{\delta\varphi}{\kappa_h - 3/2} \right]^{-\kappa_h + 1/2} =$$

$$= 1 + C_4\delta\varphi + C_5\delta^2\varphi^2 + C_6\delta^3\varphi^3 + \dots, \quad (5)$$

где  $\delta = T_c/T_h$  (здесь  $T_h$  – температура горячих электронов и  $T_h > T_c$ ) и

$$C_4 = \frac{\kappa_h - 1/2}{\kappa_h - 3/2},$$

$$C_5 = \frac{(\kappa_h - 1/2)(\kappa_h + 1/2)}{2(\kappa_h - 3/2)^2},$$

$$C_6 = \frac{(\kappa_h - 1/2)(\kappa_h + 1/2)(\kappa_h + 3/2)}{6(\kappa_h - 3/2)^3}.$$

Здесь  $\kappa_h$  (обычно лежит в пределах 7–10) – надтепловой параметр для горячих электронов [6]. И наконец, выражение для концентрации изотермических позитронов имеет вид

$$n_p = \exp(-\lambda\varphi) = 1 - \lambda\varphi + \frac{\lambda^2\varphi^2}{2} - \frac{\lambda^3\varphi^3}{6} + \dots, \quad (6)$$

где  $\lambda = T_c/T_p$  (здесь  $T_p$  – температура изотермических позитронов). Итак, подставляя (4)–(6) в (3) и раскладывая выражение по степеням  $\varphi$  до третьего порядка малости, получаем

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + n_i = 1 + \gamma_1\varphi + \gamma_2\varphi^2 + \gamma_3\varphi^3 + \dots, \quad (7)$$

где

$$\gamma_1 = (1 + \mu_p - \mu_h)C_1 + \mu_h C_4\delta + \mu_p\lambda,$$

$$\gamma_2 = (1 + \mu_p - \mu_h)C_2 + \mu_h C_5\delta^2 - \mu_p\lambda^2/2,$$

$$\gamma_3 = (1 + \mu_p - \mu_h)C_3 + \mu_h C_6\delta^3 + \mu_p\lambda^3/6.$$

Отметим, что слагаемые в правой части обусловлены вкладом компонент позитронов, холодных и горячих электронов.

Для изучения модуляции ИЗВ выразим НелУШ, используя ММВ [12]. Итак, сначала вводим растянутые координаты

$$\xi = \varepsilon(x - v_g t), \quad (8)$$

$$\tau = \varepsilon^2 t, \quad (9)$$

где  $v_g$  – групповая скорость,  $\varepsilon$  – малый параметр. Далее можно выразить зависимые переменные в виде [12]

$$n_i = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^{(m)} \sum_{l=-\infty}^{\infty} n_{il}^{(m)}(\xi, \tau) \exp[il(kx - \omega t)], \quad (10)$$

$$u_i = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^{(m)} \sum_{l=-\infty}^{\infty} u_{il}^{(m)}(\xi, \tau) \exp[il(kx - \omega t)], \quad (11)$$

$$\varphi = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^{(m)} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \varphi_l^{(m)}(\xi, \tau) \exp[il(kx - \omega t)], \quad (12)$$

где  $k(\omega)$  – действительная переменная, соответствующая волновому числу (частоте) несущей волны. Операторы дифференцирования в обоих случаях трактуются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon v_g \frac{\partial}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi}. \quad (14)$$

Теперь, подставляя (10)–(14) в (1), (2) и (7) и объединяя слагаемые, содержащие  $\varepsilon$  в первом приближении ( $m = 1, l = 1$ ), выражаем уравнения следующим образом:

$$iku_{i1}^{(1)} - i\omega n_{i1}^{(1)} = 0, \quad (15)$$

$$ik\varphi_1^{(1)} + ik\Omega n_{i1}^{(1)} - i\omega u_{i1}^{(1)} = 0, \quad (16)$$

$$n_{i1}^{(1)} - k^2\varphi_1^{(1)} - \gamma_1\varphi_1^{(1)} = 0, \quad (17)$$

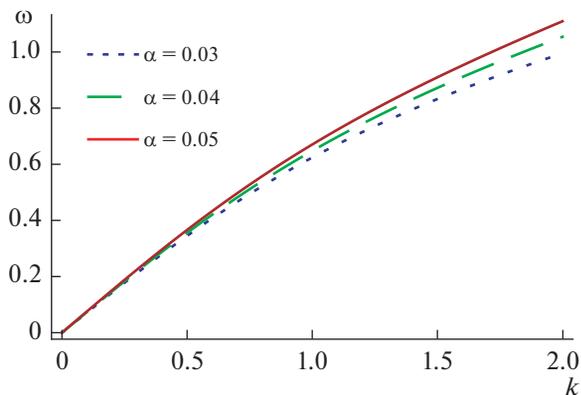
где  $\Omega = 3\alpha$ . Эти уравнения сводятся к следующим:

$$n_{i1}^{(1)} = \frac{k^2}{S}\varphi_1^{(1)}, \quad (18)$$

$$u_{i1}^{(1)} = \frac{k\omega}{S}\varphi_1^{(1)}, \quad (19)$$

где  $S = \omega^2 - \Omega k^2$ . Таким образом, мы получаем дисперсионное соотношение для ИЗВ

$$\omega^2 = \frac{k^2}{k^2 + \gamma_1} + \Omega k^2. \quad (20)$$



**Рис. 1.** Зависимость  $\omega$  от  $k$  для различных значений  $\alpha$ ;  $\delta = 0.2$ ,  $\kappa_c = 2$ ,  $\kappa_h = 5$ ,  $\lambda = 0.1$ ,  $\mu_h = 0.7$  и  $\mu_p = 0.3$ .

Теперь мы проведем численный анализ для того, чтобы определить линейные дисперсионные свойства ИЗВ для различных значений  $\alpha$  (см. рис. 1). Как только мы увеличиваем значение  $T_i$  при постоянных значениях  $Z$  и  $n_{i0}$ , увеличивается угловая скорость (через  $\alpha$ ). Уравнения второго порядка малости ( $m = 2$ ,  $l = 1$ ) имеют вид

$$n_{i1}^{(2)} = \frac{k^2}{S} \varphi_1^{(2)} + \frac{2ik\omega(v_g k - \omega)}{S^2} \frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial \xi}, \quad (21)$$

$$u_{i1}^{(2)} = \frac{k\omega}{S} \varphi_1^{(2)} + \frac{i(v_g k - \omega)(\omega^2 + k^2 \Omega)}{S^2} \frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial \xi} \quad (22)$$

с условием совместимости

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\omega^2 - S^2}{k\omega}. \quad (23)$$

Найдено, что амплитуды гармоник второго порядка пропорциональны  $|\varphi_1^{(1)}|^2$

$$\begin{aligned} n_{i2}^{(2)} &= C_7 |\varphi_1^{(1)}|^2, & n_{i0}^{(2)} &= C_{10} |\varphi_1^{(1)}|^2, \\ u_{i2}^{(2)} &= C_8 |\varphi_1^{(1)}|^2, & u_{i0}^{(2)} &= C_{11} |\varphi_1^{(1)}|^2, \\ \varphi_2^{(2)} &= C_9 |\varphi_1^{(1)}|^2, & \varphi_0^{(2)} &= C_{12} |\varphi_1^{(1)}|^2, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} C_7 &= \frac{\Omega k^6 + 3\omega^2 k^4 + 2C_9 S^2 k^2}{2S^3}, \\ C_8 &= \frac{\omega C_7 S^2 - \omega k^4}{k S^2}, \\ C_9 &= \frac{\Omega k^6 + 3\omega^2 k^4 - 2\gamma_2 S^3}{2S^3(4k^2 + \gamma_1) - 2S^2 k^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{10} &= \frac{2\omega v_g k^3 + \Omega k^4 + \omega^2 k^2 + C_{12} S^2}{S^2(v_g^2 - \Omega)}, \\ C_{11} &= \frac{v_g C_{10} S^2 - 2\omega k^3}{S^2}, \\ C_{12} &= \frac{2\omega v_g k^3 + \Omega k^4 + \omega^2 k^2 + 2\gamma_2 S^2(v_g^2 - \Omega)}{\gamma_1 S^2(v_g^2 - \Omega) - S^2}. \end{aligned}$$

И наконец, рассмотрение моды третьей гармоники ( $m = 3$ ) и ( $l = 1$ ) с помощью (18)–(24) приводит к системе уравнений, которую можно свести к следующему НелУШ:

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + P \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + Q |\Phi|^2 \Phi = 0, \quad (25)$$

где  $\Phi = \varphi_1^{(1)}$  для упрощения. Дисперсионный коэффициент  $P$  имеет вид

$$P = \frac{v_g \Omega^2 k^5 - 3v_g k \omega^4 + F1}{2\omega^2 k^2},$$

где  $F1 = 4\Omega k^2 \omega^3 + 2v_g \Omega \omega^2 k^3 - 4\omega \Omega^2 k^4$ . Нелинейный коэффициент  $Q$  имеет вид

$$Q = \frac{2\gamma_2 S^2 (C_9 + C_{12}) + 3\gamma_3 S^2 - F2}{2\omega k^2},$$

где  $F2 = (\omega^2 k^2 + \Omega k^4)(C_7 + C_{10}) + 2\omega k^3 (C_8 + C_{11})$ .

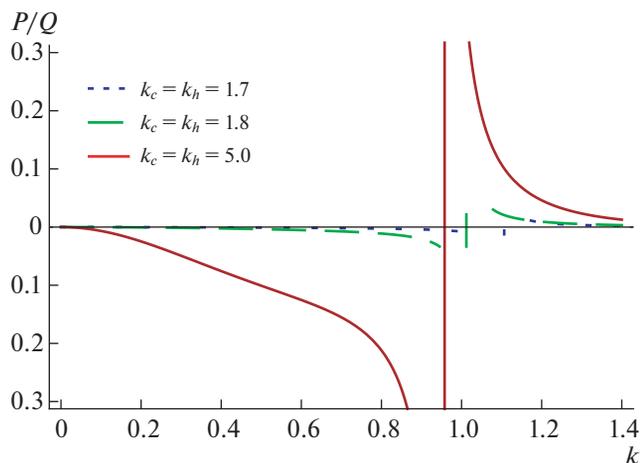
### 3. МН И ИЗВУ

Давайте рассмотрим линейное решение НелУШ

(25) в виде  $\Phi = \hat{\Phi} e^{iQ|\hat{\Phi}|^2 \tau} + c.c.$ , где  $\hat{\Phi} = \hat{\Phi}_0 + \epsilon \hat{\Phi}_1$  и  $\hat{\Phi}_1 = \hat{\Phi}_{1,0} \exp[i(\tilde{k}\xi - \tilde{\omega}\tau)] + c.c.$  (здесь  $\tilde{\omega}$  – частота и  $\tilde{k}$  – волновое число возмущения). Следовательно, нелинейное дисперсионное соотношение для модуляции амплитуды [7, 24, 25] имеет вид

$$\tilde{\omega}^2 = P^2 \tilde{k}^2 \left( \tilde{k}^2 - \frac{2|\hat{\Phi}_0|^2}{P/Q} \right). \quad (26)$$

Очевидно, что, если  $P/Q < 0$ , то  $\tilde{\omega}$  всегда действительная при всех значениях  $\tilde{k}$ , следовательно, в этой области ИЗВ устойчивы при наличии малых возмущений. С другой стороны, когда  $P/Q > 0$ ,  $\tilde{\omega}$  становится мнимой и ИЗВ оказываются неустойчивыми для  $\tilde{k} < k_c = \sqrt{2Q|\hat{\Phi}_0|^2/P}$ , где  $k_c$  – это критическое значение волнового числа модуляции, и  $\hat{\Phi}_0$  – амплитуда несущей волны. Из рис. 2 видно, что для ИЗВ можно определить области модуляционной устойчивости и неустойчивости. Когда  $P/Q \rightarrow \pm\infty$ , соответствующие



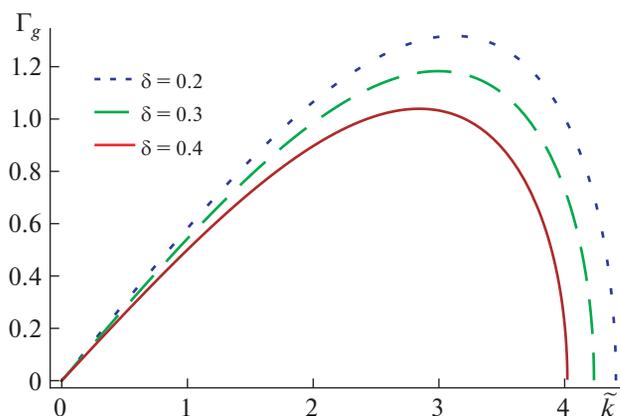
**Рис. 2.** Зависимость  $P/Q$  от  $k$  для различных значений  $\kappa_c$  и  $\kappa_h$ ;  $\alpha = 0.03$ ,  $\delta = 0.2$ ,  $\lambda = 0.1$ ,  $\mu_h = 0.7$  и  $\mu_p = 0.3$ .

значения  $k$  ( $= k_c$ ) называются критическими или пороговыми волновыми числами для начала развития МН. Эти значения  $k_c$  разграничивают области неустойчивости ( $P/Q > 0$ ) и устойчивости ( $P/Q < 0$ ). Эффект сверхтермичности (через  $\kappa_c$  и  $\kappa_h$ ) чрезвычайно высок, чтобы изменить стабильную область ИЗВ. Из рис. 2 видно, что с увеличением  $\kappa_c$  и  $\kappa_h$ ,  $k_c$  сдвигается в сторону меньших величин. Этот результат находится в хорошем соответствии с ранее полученными результатами в работах Алинеяда и др. [22] и Султана и Куракиса [7]. В области  $P/Q > 0$  и  $\tilde{k} < k_c$  инкремент развития ( $\Gamma_g$ ) МН имеет вид

$$\Gamma_g = |P| \tilde{k}^2 \sqrt{\frac{k_c^2}{\tilde{k}^2} - 1}. \quad (27)$$

Численный анализ инкремента развития МН ИЗВ приведен на рис. 3 и 4 и, очевидно, из этих рисунков, следует: 1) из рис. 3 – с увеличением  $T_h$  для фиксированного значения  $T_c$  максимальное значение инкремента развития, по-видимому, увеличивается (через  $\delta$ ); 2) из рис. 4 – если мы увеличиваем значение концентрации горячих электронов  $n_{h0}$  для фиксированного значения заряда  $Z$  и концентрации  $n_{i0}$  ионов, то увеличивается максимальное значение инкремента развития (через  $\mu_h$ ). Похожий эффект с надтепловыми горячими электронами наблюдался при изучении ИЗВ в работе Алинеяда и др. [22].

Для волн-убийц рациональное решение НелУШ (25) первого порядка (полученное с помощью схемы трансформации Дарбу) в неустой-

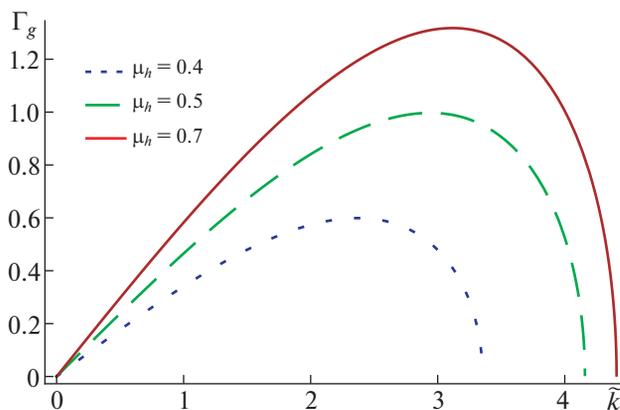


**Рис. 3.** График зависимости инкремента развития МН ( $\Gamma_g$ ) от  $\tilde{k}$  для различных значений  $\delta$ ;  $\alpha = 0.03$ ,  $\kappa_c = 2$ ,  $\kappa_h = 5$ ,  $\lambda = 0.1$ ,  $\mu_h = 0.7$  и  $\mu_p = 0.3$ ,  $k = 1.1$  и  $\Phi_0 = 0.5$ .

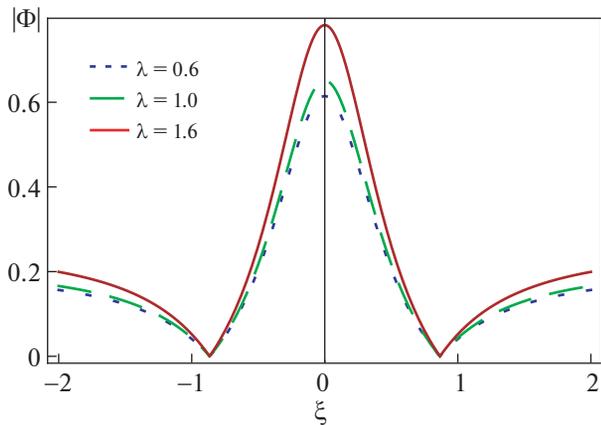
чивой области ( $P/Q > 0$ ) может быть записано в виде [26]

$$\Phi(\xi, \tau) = \sqrt{\frac{2P}{Q}} \left[ \frac{4(1 + 4iP\tau)}{1 + 16P^2\tau^2 + 4\xi^2} - 1 \right] \exp(2iP\tau). \quad (28)$$

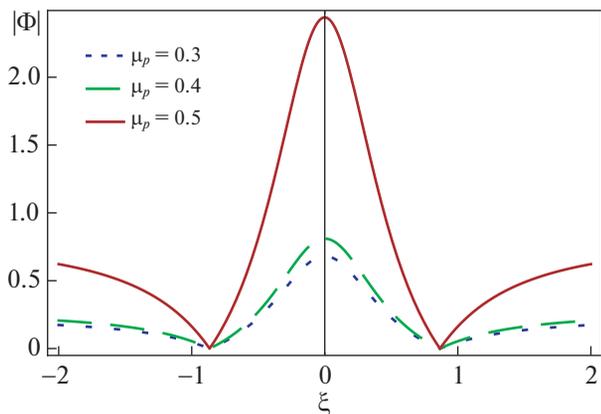
Мы численно проанализировали рациональное решение НелУШ (25) на рис. 5 и 6, и из рис. 5 видно, что нелинейность плазменной системы, которая приводит к увеличению амплитуды и ширины ИЗВУ, увеличивается с увеличением температуры холодных электронов  $T_c$  при постоянной температуре позитронов  $T_p$  (через  $\lambda$ ). На рис. 6 ярко выделено влияние концентрации позитронов на формирование ИЗВУ. В этом случае амплитуда ИЗВУ возрастает с увеличением концентрации



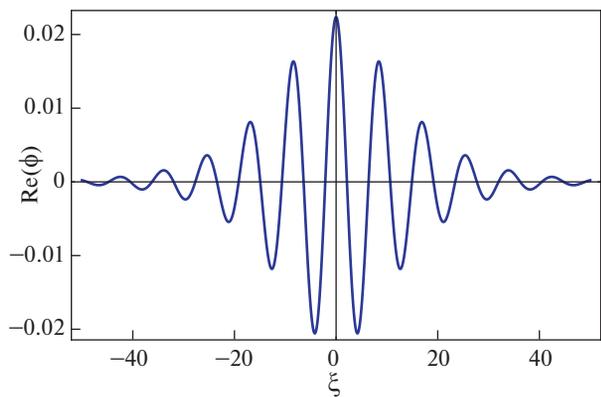
**Рис. 4.** График зависимости инкремента развития МН ( $\Gamma_g$ ) от  $\tilde{k}$  для различных значений  $\mu_h$ ;  $\alpha = 0.03$ ,  $\delta = 0.2$ ,  $\kappa_c = 2$ ,  $\kappa_h = 5$ ,  $\lambda = 0.1$ ,  $\mu_h = 0.7$  и  $\mu_p = 0.3$ ,  $k = 1.1$  и  $\Phi_0 = 0.5$ .



**Рис. 5.** Зависимость  $|\Phi|$  от  $\xi$  для различных значений  $\lambda$ ;  $\alpha = 0.03$ ,  $\delta = 0.2$ ,  $\kappa_c = 2$ ,  $\kappa_h = 5$ ,  $\mu_h = 0.7$  и  $\mu_p = 0.3$ ,  $k = 1.1$  и  $\tau = 0$ .



**Рис. 6.** Зависимость  $|\Phi|$  от  $\xi$  для различных значений  $\mu_p$ ;  $\alpha = 0.03$ ,  $\delta = 0.2$ ,  $\kappa_c = 2$ ,  $\kappa_h = 5$ ,  $\lambda = 0.1$ ,  $\mu_h = 0.7$ ,  $k = 1.1$  и  $\tau = 0$ .



**Рис. 7.** Светлый солитон огибающей для  $k = 1.1$ ;  $\alpha = 0.03$ ,  $\delta = 0.2$ ,  $\kappa_c = 2$ ,  $\kappa_h = 5$ ,  $\lambda = 0.1$ ,  $\mu_h = 0.7$ ,  $\mu_p = 0.3$ ,  $\psi_0 = 0.0005$ ,  $U = 0.2$ ,  $\tau = 0$  и  $\Omega_0 = 0.4$ .

позитронов  $n_{p0}$  при фиксированном значении  $Z$  и  $n_{i0}$  (через  $\mu_p$ ).

Здесь важно отметить, что в настоящей работе обсуждается метод малых возмущений, примененный для вывода НелУШ, которое описывает при определенных условиях увеличение до малых, но конечных амплитуд волн-убийц [12, 27]. Тем не менее для изучения произвольных амплитуд волн-убийц мы нашли некоторые другие методы (а именно метод псевдопотенциалов [28–30]), которые справедливы для больших/произвольных амплитуд волн-убийц. Последнее, безусловно, является существенно важной задачей, однако выходит за рамки нашей настоящей работы.

### 4. СОЛИТОНЫ ОГИБАЮЩЕЙ

Знак отношения  $P/Q$  определяет формирование светлого или темного солитона огибающей.

#### 4.1. Светлые солитоны

Когда  $P/Q > 0$  мы получаем светлые солитоны огибающей, чья основная аналитическая форма имеет вид [7, 24, 25]

$$\Phi(\xi, \tau) = \left[ \psi_0 \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\xi - U\tau}{W} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \times \exp \left[ \frac{i}{2P} \left\{ U\xi + \left( \Omega_0 - \frac{U^2}{2} \right) \tau \right\} \right], \tag{29}$$

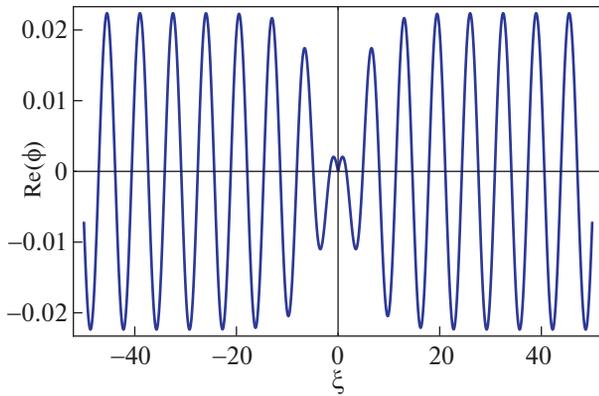
где  $U$  – это скорость распространения,  $W$  – ширина солитона, и  $\Omega_0$  – частота колебаний для  $U = 0$ . Светлый солитон огибающей [полученный численным анализом (29)] изображен на рис. 7.

#### 4.2. Темные солитоны

Когда  $P/Q < 0$  мы получаем темные солитоны огибающей, чья основная аналитическая форма имеет вид [7, 24, 25]

$$\Phi(\xi, \tau) = \left[ \psi_0 \tanh^2 \left( \frac{\xi - U\tau}{W} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \times \exp \left[ \frac{i}{2P} \left\{ U\xi - \left( \Omega_0 - \frac{U^2}{2} \right) \tau \right\} \right]. \tag{30}$$

Соотношение между шириной солитона  $W$  и постоянной максимальной амплитудой  $\psi_0$  связано соотношением  $W = \sqrt{2|P/Q|/\psi_0}$ . Отношение  $P/Q$  определяет ширину солитона  $W$  как  $\psi_0 W \approx (P/Q)^{1/2}$ . Таким образом, более низкие значения определяют более узкие солитоны и наобо-



**Рис. 8.** Темный солитон огибающей для  $k = 0.3$ ;  $\alpha = 0.03$ ,  $\delta = 0.2$ ,  $\kappa_c = 2$ ,  $\kappa_h = 5$ ,  $\lambda = 0.1$ ,  $\mu_h = 0.7$ ,  $\mu_p = 0.3$ ,  $\psi_0 = 0.0005$ ,  $U = 0.2$ ,  $\tau = 0$  и  $\Omega_0 = 0.4$ .

рот. Темный солитон огибающей, полученный численным анализом (30), изображен на рис. 8.

### 5. ОБСУЖДЕНИЕ

В этой работе мы рассмотрели незамагниченную четырехкомпонентную плазму, состоящую из инерционных горячих адиабатических ионов, изотермических позитронов и сверхтермических электронов двух температур (горячих и холодных). Используя ММВ получено НелУШ, которое определяет эволюцию ИЗВ. Мы обнаружили существование областей устойчивости и неустойчивости для ИЗВ и связанный с ними инкремент развития МН в области неустойчивости. Результаты, полученные нами в этом исследовании, можно резюмировать следующим образом.

1. ИЗВ будут устойчивыми (неустойчивыми) в случае длинных (коротких) длин волн, для которых отношение  $P/Q$  отрицательное (положительное)  $P/Q < 0$  ( $P/Q > 0$ ).

2. Если мы увеличиваем значение концентрации горячих электронов  $n_{h0}$  при фиксированных значениях заряда  $Z$  и концентрации  $n_{i0}$  ионов, то максимальное значение инкремента увеличивается (через  $\mu_h$ ).  $\Gamma_g$  увеличивается с  $T_h$  при фиксированных значениях  $T_c$  (через  $\delta$ ).

3. Амплитуда ИЗВУ увеличивается с ростом концентрации позитронов  $n_{p0}$  при фиксированных  $Z$  и  $n_{i0}$  (через  $\mu_p$ ).

Большое количество наблюдений [1, 2] ясно показывает существование сверхтермических электронов в различных природных средах (например, магнитосфере Сатурна [6, 11], хвосте магнитосферы, авроральных зонах, ионосфере, солнечном ветре и сильном излучении в межзвездной или межпланетной среде и т.д.) и лабо-

раторной плазмах (например, высокоинтенсивном лазерном излучении [13] и горячем катодном разряде [14]). Мы надеемся, что наш нелинейный анализ будет полезен для понимания нелинейных структур (волн-убийц, светлых и темных солитонов огибающей) как в космической, так и в лабораторной плазмах.

Авторы благодарны анонимному рецензенту за конструктивные предложения, которые значительно улучшили качество рукописи. Н.А. Чоудхури благодарит Пуджу Саркер за ее поддержку в улучшении языка рукописи.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Temerin M., Cerny K., Lotko W., Mozer F.S.* // Phys. Rev. Lett. 1982. V. 48. P. 1175.
2. *Ergun R.E., Carlson C.W., McFadden J.P., Mozer F.S., Delory G.T., Peria W., Chaston C.C., Temerin M., Elphic R., Strangeway R., Pfaff R., Cattell C.A., Klumppar D., Shelley E., Peterson W., Moebius E., Kistler L.* // Geophys. Res. Lett. 1998. V. 25. P. 2061.
3. *Panwar A., Ryu C.M., Bains A.S.* // Phys. Plasmas. 2014. V. 21. P. 122105.
4. *Michel F.C.* // Rev. Mod. Phys. 1982. V. 54. P. 1.
5. *Marklund M., Shukla P.K.* // Rev. Mod. Phys. 2006. V. 78. P. 591.
6. *Baluku T.K., Hellberg M.A.* // Phys. Plasmas. 2012. V. 19. P. 012106.
7. *Sultana S., Kourakis I.* // Plasma Phys. Control. Fusion. 2011. V. 53. P. 045003.
8. *Shalini, Saini N.S., Misra A.P.* // Phys. Plasmas. 2015. V. 22. P. 092124.
9. *Sabry R., Moslem W.M., Shukla P.K., Saleem H.* // Phys. Rev. E. 2009. V. 79. P. 056402.
10. *Vasyliunas V.M.* // J. Geophys. Res. 1968. V. 73. P. 2839.
11. *Hellberg M.A., Mace R.L.* // Phys. Plasmas. 2002. V. 9. P. 1495.
12. *Chowdhury N.A., Mannan A., Mamun A.A.* // Phys. Plasmas. 2017. V. 24. P. 113701.
13. *Estabrook K., Kruer W.L.* // Phys. Rev. Lett. 1978. V. 40. P. 42.
14. *Goswami B.N., Buti B.* // Phys. Lett. A. 1976. V. 57. P. 149.
15. *Shahmansouri M., Alinejad H.* // Phys. Plasmas. 2013. V. 20. P. 082130.
16. *Rehman M.A., Mishra M.K.* // Phys. Plasmas. 2016. V. 23. P. 012302.
17. *Vladimirov S.V., Tsytovich V.N., Popel S.I., Khakimov F.Kh. Modulational Interactions in Plasmas.* Dordrecht, Kluwer Academic Publ., 1995.
18. *Vedenov A.A., Rudakov L.I.* // Sov. Phys. Doklady. 1965. V. 9. P. 1073.
19. *Vedenov A.A., Rudakov L.I.* // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1964. V. 159. P. 767.
20. *Gailitis A.K.* Ph.D. Thesis, P.N. Lebedev Institute. 1964 (in Russian).

21. *Gailitis A.K.* Izv. AN Latv. SSR: Phys. Tech. Nauki. 1965. V. 4. P. 13 (in Russian).
22. *Alinejad H., Mahdavi M., Shahmansouri M.* // *Astrophys. Space Sci.* 2014. V. 352. P. 571.
23. *Bacha M., Boukhalfa S., Tribeche M.* // *Astrophys. Space Sci.* 2012. V. 341. P. 591.
24. *Fedele R.* // *Phys. Scr.* 2002. V. 65. P. 502.
25. *Fedele R., Schamel H.* // *Eur. Phys. J. B.* 2002. V. 27. P. 313.
26. *Akhmediev N., Ankiewicz A., Soto-Crespo J.M.* // *Phys. Rev. E.* 2009. V. 80. P. 026601.
27. *Chowdhury N.A., Mannan A., Hasan M.M., Mamun A.A.* // *Chaos.* 2017. V. 27. P. 093105.
28. *Bernstein I.B., Greene G.M., Kruskal M.D.* // *Phys. Rev.* 1957. V. 108. P. 546.
29. *Cairns R.A., Mamun A.A., Bingham R., Boström R., Dendy R.O., Nairn C.M.C., Shukla P.K.* // *Geophys. Res. Lett.* 1995. V. 22. P. 2709.
30. *Lu G., Liu Y., Wang Y., Stenflo L., Popel S.I., Yu M.Y.* // *J. Plasma Phys.* 2010. V. 76. P. 267.