

НЕЛИНЕЙНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ РЕЗИСТИВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ТРУБЧАТОГО ПУЧКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ, ДВИЖУЩЕГОСЯ НАД ТВЕРДОТЕЛЬНЫМ ПЛАЗМЕННЫМ ЦИЛИНДРОМ

© 2019 г. Ю. О. Аверков^{a, b, *}, Ю. В. Прокопенко^{a, c, **}, В. М. Яковенко^{a, ***}

^a Институт радиофизики и электроники им. А.Я. Усикова НАН Украины, Харьков, Украина

^b Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Харьков, Украина

^c Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков, Украина

*e-mail: yuriyaverkov@gmail.com

**e-mail: prokopen@ire.kharkov.ua

***e-mail: yavm@ire.kharkov.ua

Поступила в редакцию 09.11.2018 г.

После доработки 12.12.2018 г.

Принята к публикации 20.12.2018 г.

Исследован эффект нелинейной стабилизации неустойчивости бесконечно тонкого трубчатого электронного пучка при его движении вдоль поверхности твердотельного плазменного цилиндра. Предполагается, что частота столкновений электронов плазмы цилиндра намного превышает частоты собственных плазменных волн (колебаний). В силу нерелятивистского характера движения пучка исследования выполнены в электростатическом приближении. Показано, что нелинейная стабилизация роста амплитуды волны осуществляется за счет эффекта самозахвата электронов пучка полем электростатической волны самого пучка. Обнаружена зависимость времени насыщения неустойчивости и максимальной амплитуды волны от радиуса плазменного цилиндра. Установлено, что в электродинамической системе с большим радиусом плазменного цилиндра нелинейная стадия неустойчивости начинается позже. При этом в такой системе максимальная величина амплитуды имеет большее значение.

DOI: 10.1134/S0367292119060015

1. ВВЕДЕНИЕ

Поиск механизмов генерации электромагнитных волн при движении заряженных частиц в различных электродинамических системах — актуальная проблема современной радиофизики и электроники. При этом развиваются неустойчивости, в том числе электростатического происхождения, которые представляют собой физическую основу генерации различного рода колебаний. Установление стационарного режима происходит в результате нелинейных механизмов взаимодействия заряженных частиц с собственными колебаниями электродинамических систем. Заметим, что до настоящего времени эффекты нелинейной стабилизации пучковых неустойчивостей рассматривались лишь для случаев бесстолкновительной и слабостолкновительной плазмы.

Первые работы по исследованию нелинейных волн в плазме без учета тепловых эффектов были выполнены А.И. Ахиезером, Г.Я. Любарским и Р.В. Половиным почти 50 лет назад [1–3]. В частности, ими было показано, что отсутствие зави-

симости частоты нелинейных колебаний от амплитуды сохраняется лишь в нерелятивистском пределе. В работе [3] показано, что в релятивистском случае период волны большой интенсивности растет с ростом амплитуды. К числу первых работ по нелинейной теории пучково-плазменных неустойчивостей, в которых рассматривалась стабилизация этих неустойчивостей за счет захвата электронов пучка плазменной волной, можно отнести работы [4–18]. В них рассматривались модулированные и немодулированные релятивистские пучки, взаимодействующие с плазмой, которая предполагалась холодной и бесстолкновительной или слабостолкновительной. Плотность электронов пучка считалась много меньшей плотности электронов плазмы. Было показано, что эффективность пучково-плазменного взаимодействия увеличивается с ростом релятивистского фактора, несмотря на уменьшение линейного инкремента.

Напомним результаты некоторых из перечисленных работ, аналитический подход которых был использован в настоящем исследовании. В

работах [14, 15] была построена нелинейная теория неустойчивости размытого и моноэнергетического электронных пучков в неограниченной (объемной) плазме. Так, в работе [14] для размытого электронного пучка, в котором неустойчивость является кинетической, с помощью метода медленно изменяющихся (по сравнению с периодами волн) амплитуд была получена система уравнений, описывающая временную эволюцию амплитуды волны, а также координат и скоростей электронов пучка. Было показано, что существенно нелинейно только движение резонансных частиц пучка со скоростями, близкими к фазовой скорости волны. Особенностью нелинейной стадии неустойчивости в случае размытого пучка является затухание осцилляций амплитуды вследствие эффекта фазового “размешивания” частиц пучка, захваченных полем волны. Эта особенность впервые была отмечена в работах [6, 7] и в дальнейшем подвергалась тщательным исследованиям, например, в работах [17, 19, 20]. В случае моноэнергетического пучка, как было показано в [14, 15], существенным является учет изменения со временем не только амплитуды, но и фазы поля возбуждаемой волны. Кроме того, в работе [15] были исследованы нелинейные стадии неустойчивости предварительно промодулированных нерелятивистского и релятивистского моноэнергетических пучков в плазме. В частности, было показано, что в релятивистском случае максимум энергии поля возбуждаемой волны сравним с энергией пучка.

Нелинейная стабилизация пучковой неустойчивости нерелятивистского моноэнергетического пучка в плотной безграничной столкновительной плазме была рассмотрена в работах [16, 17]. Также, как и в [14, 15], пучок моделировался дискретным ансамблем макрочастиц — заряженных плоскостей. Было показано, что столкновения в плазме приводят к тому, что частицы пучка к моменту захвата не успевают собраться в сгусток и имеют заметный разброс как по скоростям, так и по координатам. Поэтому захват частиц волной не приводит к регулярным колебаниям амплитуды волны, как, например, в случае, рассмотренном в [15].

В работе [18] была исследована электродинамическая система, близкая к рассматриваемой в настоящей работе, но для случая газовой бесстолкновительной плазмы. Именно в [18] была рассмотрена нелинейная стабилизация неустойчивости трубчатого электронного пучка конечной толщины, обдувающего плазменный цилиндр во внешнем продольном магнитном поле. Предполагалось, что система плазма-пучок находится в металлическом волноводе, а плазма является холодной и бесстолкновительной. Была рассмотрена нелинейная стабилизация аксиально-симметричной электромагнитной поверхностной

ТМ-волны. В работе [21] исследовано возбуждение поверхностных электромагнитных волн на цилиндрической поверхности проводящих сред (металл, сильно ионизованная плазма) обдувающим цилиндр релятивистским электронным пучком. Из условия нелинейного захвата электронов пучка полем поверхностной волны оценена максимальная амплитуда возбуждаемой волны.

Нелинейная теория неустойчивости прямолинейного релятивистского электронного пучка в пространственно-ограниченной плазме, развивающаяся в условиях эффекта Черенкова, приведена в работах [20–23]. В частности, рассмотрен случай плотной плазмы, когда возбуждаемая пучком неустойчивая плазменная волна является потенциальной [22]. Установлено, что нелинейные процессы, обусловленные релятивизмом пучка, препятствуют хаотизации системы на развитой нелинейной стадии неустойчивости. Напротив, в случае нерелятивистского пучка наблюдается его значительная аномальная нелинейная хаотизация.

В последнее десятилетие особое внимание уделяется цилиндрическим системам, в которых осуществляется взаимодействие электронов трубчатого потока [24, 25] или многоструйного потока кругового сечения [26–30] с обдуваемым ими твердотельным цилиндром. В работе [29] частично построена самосогласованная нелинейная теория возбуждения электромагнитного излучения азимутально-периодическим сильноточным релятивистским электронным пучком при взаимодействии с радиально-двухслойным цилиндрическим диэлектрическим резонатором (ЦДР). Нелинейный анализ возбуждения ЦДР электронным пучком показал, что основным механизмом генерации электромагнитных колебаний в резонаторе автоколебательной системы [26, 28, 30] является монотронный механизм, когда заряженные частицы пучка, пролетая через резонатор, группируются в такой фазе возбуждаемого ими электромагнитного поля, что в среднем отдают энергию собственным колебаниям резонатора. Возможность применения исследованной автоколебательной системы с приемлемыми геометрическими параметрами в субмиллиметровом диапазоне длин волн отмечена в [26, 29]. Кроме того, особый интерес представляют пучковые неустойчивости, которые возникают в электродинамических системах, содержащих диспергирующие среды. В частности, в работе [31] в линейном приближении исследована неустойчивость трубчатого электронного пучка при его взаимодействии с плазмоподобной средой, а в работе [32] — с левосторонней диспергирующей средой цилиндрической конфигурации. Взаимодействие нерелятивистского трубчатого потока заряженных частиц с немагнитным анизотропным диспергирующим твердотельным цилиндром рассмотрено в

работе [33]. Обнаружена возможность возникновения абсолютной неустойчивости объемно-поверхностных волн, обусловленная особенностями свойств анизотропного цилиндра. Резонансный характер частотных зависимостей диэлектрической проницаемости цилиндра способствует появлению участков дисперсионных кривых собственных объемно-поверхностных волн E -типа с отрицательной групповой скоростью.

Дискуссионные аспекты теории непотенциальных поверхностных волн на границе диссипативной материальной среды с частотной дисперсией рассмотрены в работе [34]. Показано, что в случае достаточно сильной диссипации энергии возмущений в среде могут возникать поверхностные волны, закон дисперсии которых кардинально отличается от общеизвестного. Их декремент имеет малое значение даже при большой диссипации в среде, а групповая и фазовая скорости таких волн превосходят скорость света в среде.

Особое место занимают работы, посвященные изучению пучковой неустойчивости в сильно-столкновительной твердотельной плазме, когда частота столкновений носителей заряда намного превышает частоту электромагнитной (электростатической) волны. Так, в работе [35] был описан эффект так называемой резистивной неустойчивости, возникающей вследствие поглощения диэлектрической среды, в которой распространяется электронный поток. Возбуждение плазменных волн в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах длин волн потоком заряженных частиц в полупроводниковой плазме исследовалось в [36, 37].

В настоящей работе в электростатическом приближении с использованием уравнений Пуассона и движения электронов построена нелинейная теория резистивной неустойчивости трубчатого электронного пучка, обдувающего твердотельный плазменный цилиндр. Целью является выявление стабилизации роста амплитуды электростатической волны пучка за счет самозахвата электронов пучка ее полем.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть твердотельный плазменный цилиндр в цилиндрической системе координат занимает область пространства $0 \leq \rho \leq \rho_0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ и $|z| < \infty$ (ось Z направлена вдоль оси цилиндра). Вдоль его поверхности движется пучок заряженных частиц с равновесной плотностью n_0 и скоростью $v_0 \ll c$ (где c — скорость света в вакууме). Такая электродинамическая система легко реализуема при расположении цилиндра в пространстве дрейфа прямолинейно движущегося трубчатого пучка с ра-

диусом $\rho_0 + a/2$. Толщину пучка a будем считать бесконечно малой, а среду за пучком ($\rho > \rho_0$) — вакуумом. Непосредственный контакт между пучком и поверхностью цилиндра отсутствует.

Система уравнений, описывающая взаимодействие электронного пучка с собственными волнами (колебаниями) диэлектрического цилиндра, представляет собой уравнения электростатики, дополненные материальным уравнением и уравнением движения электронов плазмы

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = 4\pi en(\mathbf{r}, t), \quad (2)$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + 4\pi e N_0 \int_{-\infty}^t \mathbf{u}(\mathbf{r}, t') dt', \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{e}{m} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{v} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \quad (4)$$

где $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ — напряженность электрического поля в точке с радиус-вектором $\mathbf{r}$ в момент времени t ; $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ — вектор электрической индукции; e — заряд электрона; $n(\mathbf{r}, t)$ — плотность электронов пучка; ϵ_0 , N_0 , m , $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ — диэлектрическая постоянная решетки, равновесная плотность электронов, эффективная масса электрона, частота релаксации импульса электронов плазменного цилиндра и скорость электронов плазмы соответственно.

Плотность электронов пучка $n(\mathbf{r}, t)$ определяется выражением

$$n(\mathbf{r}, t) = n(z, t) \delta(\rho - \rho_0),$$

где $n(z, t)$ — поверхностная плотность электронов пучка; $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, причем

$$n(z, t) = \int f(z, t, v_z) dv_z. \quad (5)$$

Функция распределения электронов пучка $f(z, t, v_z)$ в выражении (5) удовлетворяет уравнению Власова

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(z, t, v_z)}{\partial t} + v_z(t) \frac{\partial f(z, t, v_z)}{\partial z} + \\ + \frac{e}{m_0} E_z(\rho_0, z, t) \frac{\partial f(z, t, v_z)}{\partial v_z} = 0, \end{aligned}$$

где m_0 — масса свободного электрона, а электрическое поле $E_z(\rho_0, z, t)$ берется на поверхности пучка $\rho = \rho_0$.

В начальный момент времени $t = 0$, т. е. до начала развития неустойчивости, функция распределения $f(z, 0, v_z)$ имеет вид

$$f(z, 0, v_z) \equiv f_0(v_z) = n_0 a \delta(v_z - v_0),$$

где n_0 — объемная равновесная плотность электронов пучка. В дальнейшем ограничимся рас-

смотрением азимутально-симметричных электростатических волн и введем потенциал $\psi(\rho, z, t)$ электрического поля такой, что

$$\mathbf{E}(\rho, z, t) = -\nabla\psi(\rho, z, t). \quad (6)$$

Потенциал волны $\psi(\rho, z, t)$ и его производная по радиальной координате $\partial\psi(\rho, z, t)/\partial\rho$ удовлетворяют граничным условиям на поверхности цилиндра: непрерывности потенциала и скачку его производной вследствие наличия поверхностного заряда пучка $en(z, t)$. Напомним, что эти условия эквивалентны условиям непрерывности z -компоненты электрического поля и скачка радиальной компоненты вектора электрической индукции

$$\begin{aligned} E_z(\rho_0 + 0, z, t) &= E_z(\rho_0 - 0, z, t), \\ E_\rho(\rho_0 + 0, z, t) - D_\rho(\rho_0 - 0, z, t) &= 4\pi en(z, t). \end{aligned}$$

Условие непрерывности потенциала на границе цилиндра имеет вид

$$\psi(\rho_0 - 0, z, t) = \psi(\rho_0 + 0, z, t). \quad (7)$$

Для того, чтобы получить условие для скачка величины $\partial\psi(\rho, z, t)/\partial\rho$, возьмем производную по времени от обеих частей уравнения (2) и, воспользовавшись уравнениями (3) и (4) для случая “сильных” столкновений, т. е. когда выполняется условие

$$v|\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)| \gg \left| \frac{\partial\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right|,$$

получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial\rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \frac{\partial\psi(\rho, z, t)}{\partial t} = \\ = -\frac{\omega_p^2}{v} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial\rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \psi(\rho, z, t) - 4\pi e \frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \end{aligned}$$

где $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 N_0/m}$ — плазменная частота среды цилиндра. Граничное условие для производной потенциала $\partial\psi(\rho, z, t)/\partial\rho$ получается путем вычисления интегралов вида

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\rho_0 - \eta}^{\rho_0 + \eta} (...) \rho d\rho$$

от обеих частей приведенного выше равенства по бесконечно малой толщине пучка η . После выполнения указанного интегрирования получим следующее граничное условие для производной потенциала по радиальной координате:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial\psi(\rho, z, t)}{\partial\rho} \right|_{\rho=\rho_0+0} - \varepsilon_0 \left. \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial\psi(\rho, z, t)}{\partial\rho} \right|_{\rho=\rho_0-0} = \\ = \frac{\omega_p^2}{v} \left. \frac{\partial\psi(\rho, z, t)}{\partial\rho} \right|_{\rho=\rho_0-0} - 4\pi e \frac{\partial n(z, t)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (8)$$

Следуя работам [14, 15, 38], поверхностную плотность $n(z, t)$ можно представить в виде

$$n(z, t) = \frac{2\pi n_0 a}{qM} \sum_{p=1}^M \delta[z - z_p(z_0, v_0, t)]. \quad (9)$$

Выражение (9) показывает тот факт, что непрерывный трубчатый поток электронов представляется в виде набора макрочастиц (заряженных колец), число которых равно M на длине волны. Координата $z_p(z_0, v_0, t)$ описывает положение отдельной p -й макрочастицы. Отметим, что координата $z_p(z_0, v_0, t)$ и скорость $v_{zp}(z_0, v_0, 0)$ p -й макрочастицы являются решениями системы характеристических уравнений

$$\begin{cases} \frac{dz(z_0, v_0, t)}{dt} = v_z(z_0, v_0, t) \\ \frac{dv_z(z_0, v_0, t)}{dt} = -\frac{e}{m_0} \frac{\partial\psi(\rho, z, t)}{\partial z} \end{cases}$$

с начальными условиями

$$z(z_0, v_0, 0) = z_0, \quad v_z(z_0, v_0, 0) = v_0. \quad (10)$$

В дальнейшем анализ временной эволюции амплитуды и фазы волны, а также координат и скоростей макрочастиц будем проводить в системе координат, связанной с пучком. Для этого выполним замену

$$z_p(z_0, v_0, t) = v_0 t + \tilde{z}_p(z_0, v_0, t), \quad (11)$$

$$v_{zp}(z_0, v_0, t) = v_0 + \tilde{v}_{zp}(z_0, v_0, t), \quad (12)$$

где $\tilde{z}_p(z_0, v_0, t)$ и $\tilde{v}_{zp}(z_0, v_0, t)$ — возмущения координаты и продольной скорости p -й макрочастицы. Тогда начальные условия (10) переписутся в виде

$$\tilde{z}_p(z_0, v_0, 0) = \tilde{z}_{p0}, \quad \tilde{v}_{zp}(z_0, v_0, 0) = 0.$$

Потенциал $\psi(\rho, z, t)$ представим в виде

$$\psi(\rho, z, t) = \psi_0(\rho) \psi_A(t) \exp\{i[q_z z - \omega t + \alpha(t)]\}, \quad (13)$$

где q_z и ω — волновой вектор и частота электростатической волны связаны со скоростью электронов пучка условием резонанса Вавилова—Черенкова $\omega = q_z v_0$. Величины $\psi_A(t)$ и $\alpha(t)$ в (13) представляют собой медленно изменяющиеся во времени амплитуду и фазу электростатической волны. Соответствующие условия “медленности” имеют вид

$$\frac{1}{\psi_A(t)} \frac{\partial\psi_A(t)}{\partial t} \ll \omega, \quad \frac{1}{|\alpha(t)|} \left| \frac{\partial\alpha(t)}{\partial t} \right| \ll \omega.$$

С учетом представления (13) из уравнений (3) и (4) для рассматриваемого случая сильных столкновений получим $\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$, где

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + \frac{4\pi i \sigma}{\omega}, \quad (14)$$

$\sigma = e^2 N_0 / m v$ — проводимость плазменного цилиндра. Величина $\psi_0(\rho)$ удовлетворяет уравнению Лапласа, в которое трансформируется уравнение (1) после подстановки в него выражений (6) и (13):

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi_0(\rho)}{\partial \rho} \right) - q_z^2 \psi_0(\rho) = 0. \quad (15)$$

С учетом конечности величины $\psi_0(\rho)$ при $\rho \rightarrow 0$ и $\rho \rightarrow \infty$ решение уравнения (15) можно представить в виде

$$\psi_0(\rho) = \begin{cases} I_0(q\rho), & \rho < \rho_0, \\ K_0(q\rho), & \rho > \rho_0, \end{cases} \quad (16)$$

где $q = |q_z|$, $I_0(q\rho)$ и $K_0(q\rho)$ — модифицированные функции Бесселя нулевого порядка первого (функция Инфельда) и второго (функция Макдональда) рода соответственно [39].

Наша задача заключается в том, чтобы исследовать временную эволюцию величин $\psi_A(t)$ и $\alpha(t)$.

Воспользовавшись выражениями (13) и (16), из граничного условия (7) получим следующие соотношения для амплитуд потенциалов $\psi_A(t)$ и фаз $\alpha(t)$ в области цилиндра и вакуума:

$$\psi_A(t)|_{\rho_0-0} = \frac{K_0(q\rho_0)}{I_0(q\rho_0)} \psi_A(t)|_{\rho_0+0}, \quad (17)$$

$$\alpha(t)|_{\rho_0-0} = \alpha(t)|_{\rho_0+0}. \quad (18)$$

В дальнейшем будем анализировать временную эволюцию амплитуды $\psi_A(t)$ и фазы $\alpha(t)$ потенциальной волны в области вакуума (т. е. в области $\rho > \rho_0$).

Воспользовавшись выражениями (13), (15) и соотношениями (17), (18), перепишем граничное условие (8) в виде

$$\left[\Delta_0 \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\omega_p^2}{v} \Delta_1 \right] \psi_A(t) \exp\{i[q_z z - \omega t + \alpha(t)]\} = \frac{4\pi e}{q K_0(q\rho_0)} \frac{\partial n(z, t)}{\partial t}, \quad (19)$$

где $\Delta_0 = \varepsilon_0 \frac{I'_0(q\rho_0)}{I_0(q\rho_0)} - \frac{K'_0(q\rho_0)}{K_0(q\rho_0)}$, $\Delta_1 = \frac{I'_0(q\rho_0)}{I_0(q\rho_0)}$. Символ “штрих” означает производную по аргументу от соответствующей специальной функции.

Далее, следуя методике работы [16], подставим (9) в (19) и выполняем интегрирование полученного уравнения по периоду колебаний $2\pi/\omega$ с учетом условия резонанса Вавилова—Черенкова $\omega = q_z v_0$. Затем разделив действительные и мнимые части и учтя соотношения (11) и (12), получим систему уравнений, описывающую времен-

ную эволюции амплитуды и фазы волны, а также координат и скоростей макрочастиц

$$\begin{cases} \frac{d\psi_A(t)}{dt} = -\frac{\omega_p^2}{v} \frac{\Delta_1}{\Delta_0} \psi_A(t) - \\ - \frac{4\pi e n_0 a \omega}{q \Delta_0 K_0(q\rho_0) M} \sum_{p=1}^M \sin[q_z \tilde{z}_p(t) + \alpha(t)], \\ \frac{d\alpha(t)}{dt} = \omega - \frac{4\pi e n_0 a \omega}{q \Delta_0 K_0(q\rho_0) \psi_A(t) M} \times \\ \times \sum_{p=1}^M \cos[q_z \tilde{z}_p(t) + \alpha(t)], \\ \frac{d^2 \tilde{z}_p(t)}{dt^2} = \frac{e q_z K_0(q\rho_0)}{m_0} \psi_A(t) \times \\ \times \sin[q_z \tilde{z}_p(t) + \alpha(t)]. \end{cases} \quad (20)$$

Последнее уравнение в (20) описывает движение макрочастицы с номером p в системе отсчета пучка. В дальнейшем эту систему уравнений удобно анализировать в следующих безразмерных переменных:

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{\psi_A(t)}{\psi_{\max}}, \quad \xi_p = q_z \tilde{z}_p(t), \quad \eta_p = \frac{\tilde{v}_{zp}(t)}{v_0}, \\ \Omega &= \frac{\omega}{\omega_p}, \quad \tau = \omega t, \quad \alpha \equiv \alpha(t), \end{aligned} \quad (21)$$

где $\psi_{\max}$ — некоторое максимальное значение потенциала волны, при котором происходит захват частиц пучка в потенциальную яму волны. Выражение для $\psi_{\max}$ будет приведено ниже.

Для численного анализа систему уравнений (20) запишем в безразмерных переменных (21) в виде следующей системы четырех дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{d\tau} = -A\phi - \frac{B}{M} \sum_{p=1}^M \sin(\xi_p + \alpha), \\ \frac{d\alpha}{d\tau} = 1 - \frac{B}{\phi M} \sum_{p=1}^M \cos(\xi_p + \alpha), \\ \frac{d\xi_p}{d\tau} = \eta_p, \\ \frac{d\eta_p}{d\tau} = C\phi \sin(\xi_p + \alpha), \end{cases} \quad (22)$$

где $A = \omega_p^2 \Delta_1 / v \omega$, $B = \sqrt{1 + A^2 / \Delta_0^2}$, $C = a q \omega_b^2 / \omega^2 \sqrt{A^2 + \Delta_0^2}$.

Величина $\psi_{\max}$ определяется из условия захвата частиц пучка в потенциальную яму волны [16]

$$K_0(q\rho_0) \psi_{\max} \propto \frac{m_0}{e} (v_0 - v_{ph})^2,$$

где v_{ph} — фазовая скорость волны с учетом частотного сдвига, вызванного взаимодействием поля волны с электронным пучком.

Используя результаты работы [40], дисперсионное уравнение связанных волн пучка и плазменного цилиндра для рассматриваемого случая можно представить в виде

$$\Delta(\omega - q_z v_0)^2 = a q \omega_b^2, \quad (23)$$

где $\omega_b = \sqrt{4\pi e^2 n_0 / m_0}$ — плазменная частота электронов пучка;

$$\Delta = \varepsilon(\omega) \frac{I'_0(q\rho_0)}{I_0(q\rho_0)} - \frac{K'_0(q\rho_0)}{K_0(q\rho_0)},$$

в котором $\varepsilon(\omega)$ определяется выражением (14). Заметим, что уравнение $\Delta = 0$ не имеет действительных решений и описывает так называемую максвелловскую релаксацию электростатического поля в столкновительной плазме. Для нахождения поправки к резонансной частоте $\omega_0 = q_z v_0$ решение уравнения (23) будем искать в виде

$$\omega = \omega_0 + \delta\omega, \quad (24)$$

где $|\delta\omega| \ll \omega_0$. Подставив (24) в (23) и следуя методике работы [41], получим

$$\delta\omega = \pm \omega_b \frac{(aq)^{1/2}}{(A^2 + \Delta_0^2)^{1/4}} (\cos \varphi_0 - i \sin \varphi_0), \quad (25)$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} \arctg \frac{A}{\Delta_0}.$$

Решение (25) с отрицательным знаком мнимой части приводит к нарастанию амплитуды симметричной связанной волны цилиндра и пучка с инкрементом

$$\gamma = \omega_b \frac{(aq)^{1/2}}{(A^2 + \Delta_0^2)^{1/4}} \sin \varphi_0.$$

При этом фазовая скорость связанной волны имеет вид

$$v_{ph} = v_0 - \frac{\omega_b(aq)^{1/2}}{(A^2 + \Delta_0^2)^{1/4}} \cos \varphi_0. \quad (26)$$

Согласно (26), неустойчивость присуща медленной связанной волне. В результате получаем следующее выражение для $\Psi_{\max}$:

$$\Psi_{\max} = \frac{m_0 v_0^2 a q}{e K_0(q\rho_0) \sqrt{A^2 + \Delta_0^2}} \left(\frac{\omega_b}{\omega} \right)^2 \cos^2 \varphi_0.$$

Заметим, что в силу определения величины φ_0 она не превышает единицы и, следовательно, $\cos \varphi_0 > 0$. Заметим также, что использованное линейное приближение для электронов плазмы оправдано тем, что для электронного пучка малой

плотности, когда $n_0 \ll N_0$, амплитуда возбуждаемой потенциальной волны мала и выполняется условие $e\Psi_{\max} \ll m_0 v_0^2$ [38].

В следующем разделе будут приведены результаты численного анализа системы уравнений (22) и фазовый портрет макрочастиц пучка, свидетельствующий об образовании сгустков на нелинейной стадии неустойчивости.

3. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

В качестве материала плазменного цилиндра выберем полупроводник GaAs с $\varepsilon_0 = 13.2$, $m = 0.063 m_0$, $v = 10^{13} \text{ с}^{-1}$, и $N_0 = 10^{13} \text{ см}^{-3}$. Анализ проведем для цилиндров с радиусами ρ_0 равными 0.5 см, 1 см и $\rho_0 \rightarrow \infty$ (предельный случай плоской границы раздела сред). Значения равновесной концентрации электронов пучка n_0 , толщины стенки пучка a и скорости направленного движения электронов пучка v_0 выберем следующими: $n_0 = 10^{10} \text{ см}^{-3}$, $a = 0.01 \text{ см}$ и $v_0 = 0.1c$ соответственно. В этом случае $\omega_b/\omega_p \approx 8 \times 10^{-3}$. Выберем резонансную длину волны $\lambda = 2 \text{ см}$, которой соответствуют значения резонансной частоты $\omega = 1.7 \times 10^{10} \text{ с}^{-1}$ и инкремента $\gamma \approx 10^8 \text{ с}^{-1}$, для которых $\gamma/\omega \approx 0.01$.

На рис. 1 приведены зависимости $\phi \equiv \phi(\tau)$ от безразмерного времени τ для цилиндров с радиусами $\rho_0 = 0.5 \text{ см}$ (кривая 1), $\rho_0 = 1 \text{ см}$ (кривая 2) и $\rho_0 \rightarrow \infty$ (кривая 3). Напомним, что кривая 3 соответствует плоской поверхности раздела сред.

Решение системы уравнений (22) было выполнено численно методом Рунге—Кутты. Пучок электронов моделировался отдельными макрочастицами (в форме колец), равномерно распределенными в начальный момент времени в интервале $0 \leq \xi_p \leq 2\pi$. Число макрочастиц M было равно 500. Отметим, что использовавшаяся программа вычислений позволяла проводить интегрирование с переменным шагом путем задания относительной погрешности на каждом шаге. Начальное значение амплитуды ϕ полагалось равным $\phi_0 = 10^{-4}$. Начальные значения медленной фазы α и ее производной $d\alpha/d\tau$ полагались равными нулю.

Из рис. 1 следует, что максимальное значение амплитуды $\phi_{\max}$, соответствующее моменту насыщения неустойчивости, оказывается тем больше, чем больше радиус цилиндра. Так, для цилиндра с радиусом $\rho_0 = 0.5 \text{ см}$ имеем $\phi_{\max} \approx 0.58$, а для $\rho_0 = 1 \text{ см}$ — $\phi_{\max} = 0.64$. Кроме того, для цилиндра с меньшим радиусом медленная амплитуда достигает своего максимального значения $\phi_{\max}$ раньше

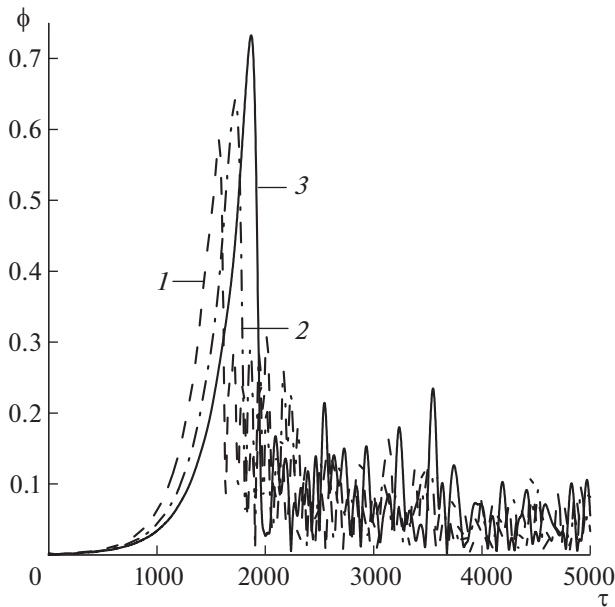


Рис. 1. График зависимости амплитуды потенциальной волны от безразмерного времени для трех значений радиуса плазменного цилиндра.

(при $\tau \equiv \tau_{\max} \approx 1569$, что соответствует времени $t \equiv t_{\max} \approx 16\gamma^{-1}$), чем для цилиндра с большим радиусом (при $\tau \equiv \tau_{\max} \approx 1718$, что соответствует времени $t \equiv t_{\max} \approx 17\gamma^{-1}$). Отметим, что с ростом радиуса цилиндра зависимости $\phi(\tau)$ стремятся к некоторому общему пределу (кривая 3), соответствующему значениям $\Delta_0 \rightarrow \epsilon_0 + 1$ и $\Delta_1 \rightarrow 1$. Физически этот предел соответствует случаю плоской границы пучок—плазма.

Из рис. 1 также следует, что при $\tau > \tau_{\max}$ величина ϕ осциллирует около некоторого среднего значения. Эти осцилляции носят существенно нерегулярный (хаотический) характер, обусловленный тем, что к моменту захвата макрочастицы не успевают собраться в сгусток и имеют заметный разброс как по скоростям, так и по координатам. Качественно такое поведение зависимости $\phi(\tau)$ напоминает аналогичную зависимость в работе [16], в которой рассматривалась нелинейная стадия пучковой неустойчивости в слабо-столкновительной безграничной плазме. Под “слабыми” понимаются такие столкновения, частота которых меньше частоты плазменной волны, но значительно больше величины инкремента неустойчивости. Заметим, что зависимость $\phi(\tau)$ в работе [16] имела характер биений, связанный с наличием в системе двух характерных времен — времени колебания сгустка макрочастиц в потенциальной яме волны и времени изменения самой потенциальной ямы. В отличие от работы [16] в рассматриваемой нами твердотельной плазме ча-

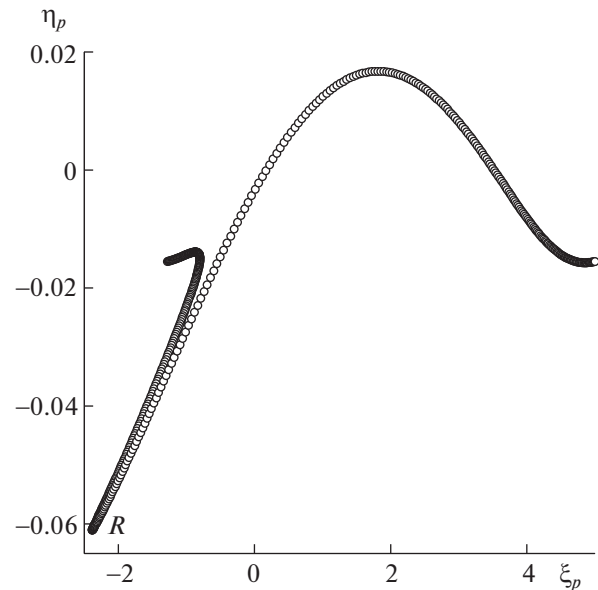


Рис. 2. Фазовый портрет системы из M макрочастиц в момент насыщения неустойчивости ($\tau = 1570$).

стота релаксации импульса электронов удовлетворяет условию $v \gg \omega \gg \gamma$. Это приводит к тому, что к моменту захвата макрочастицы вообще не формируют сгустки и в потенциальных ямах волны происходят колебания отдельных макрочастиц.

Еще одним принципиальным отличием рассматриваемого случая твердотельной плазмы от работы [16, 17] является то, что сильно-столкновительная плазма не поддерживает собственные колебания, и поэтому захват частиц пучка осуществляется плазменной волной самого пучка. Такое явление в работе [38] названо самозахватом. Именно эффект самозахвата электронов пучковой волной, как было отмечено в [38], приводит к хаотизации электронного пучка и исчезновению регулярных осцилляций резонансной гармоники. Именно такое поведение демонстрирует приведенная на рис. 1 зависимость $\phi(\tau)$.

Эффект самозахвата электронов пучка и последующую их хаотизацию демонстрируют фазовые портреты макрочастиц, изображенные на рис. 2—4 для $\rho_0 = 0.5$ см.

Из рис. 2 видно, что к моменту насыщения неустойчивости появляется группа отраженных макрочастиц, отмеченная буквой R . Макрочастицы отражаются от “горбов” потенциальной волны самого пучка. Интересно отметить, что эффект самозахвата электронов пучка полем самой пучковой волной возникает на нелинейной стадии неустойчивости квазимонохроматического начального возмущения при коллективном эффекте Вавилова—Черенкова [38].

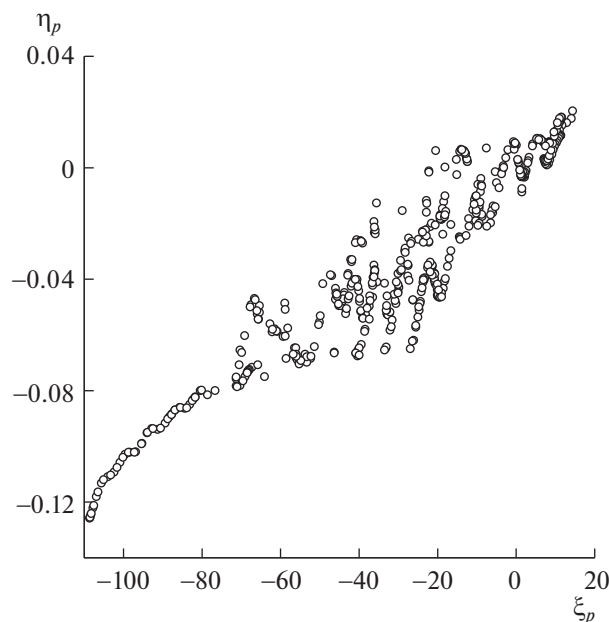


Рис. 3. Фазовый портрет системы из M макрочастиц в момент времени $\tau = 2550$.

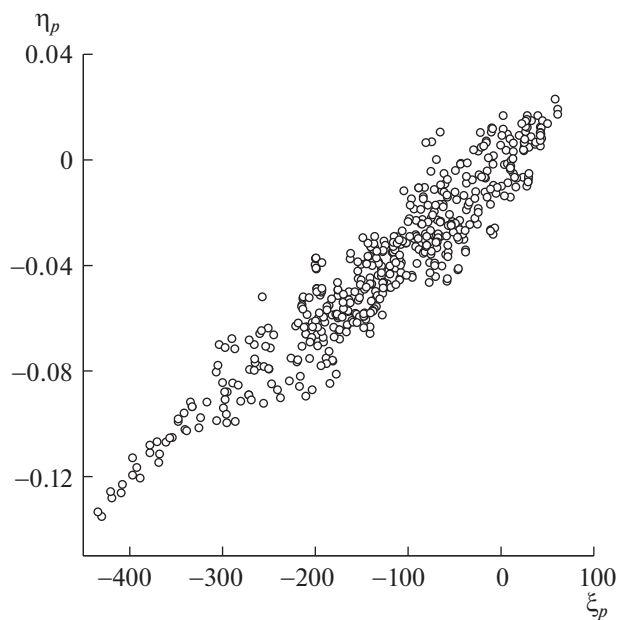


Рис. 4. Фазовый портрет системы из M макрочастиц в момент времени $\tau = 5000$.

На рис. 3 и рис. 4 приведены фазовые портреты макрочастиц для моментов времени $\tau = 2550$ и $\tau = 5000$, соответствующих хаотическим осцилляциям медленной амплитуды. Видно, что с течением времени после момента насыщения неустойчивости макрочастицы занимают все большую часть фазовой плоскости и их распределение по этой плоскости становится все более равномерным. Физически, как было отмечено выше, это соответствует хаотизации электронного пучка. Группы макрочастиц, соответствующие захваченным электронным сгусткам, не возникают, в отличие от слабостолкновительного случая, рассмотренного в работе [16].

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе решена задача о нелинейной стабилизации неустойчивости трубчатого электронного пучка при его движении вдоль поверхности твердотельного плазменного цилиндра. Предполагалось, что пучок нерелятивистский, плазма цилиндра сильно столкновительная, а возбуждаемая пучком волна электростатическая. Показано, что нелинейная стабилизация возникающей резистивной неустойчивости происходит за счет эффекта самозахвата электронов пучковой волной. Проанализирована закономерность времени насыщения неустойчивости и максимальной амплитуды волны от радиуса плазменного цилиндра. Установлено, что чем больше радиус плазменного цилиндра, тем позже начинается нелинейная стадия неустойчивости и тем больше

максимальное значение медленной амплитуды. Рассмотрен предельный случай плоской границы раздела сред пучок—плазма твердого тела. Результаты исследований расширяют наши представления о физических свойствах систем с плазмоподобными средами и систематизируют знания о механизмах возбуждения потенциальных поверхностных волн в электродинамических системах, составляющих основу микроволновых генераторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахиезер А.И., Любарский Г.Я. // Доклады АН СССР. 1951. Т. 80. С. 193.
2. Ахиезер А.И., Половин Р.В. // Доклады АН СССР. 1955. Т. 102. С. 919.
3. Ахиезер А.И., Половин Р.В. // ЖЭТФ. 1956. Т. 30. С. 915.
4. Файнберг Я.Б., Шапиро В.Д. // ЖЭТФ. 1965. Т. 47. С. 1389.
5. Файнберг Я.Б., Шапиро В.Д. // 4-я конф. по физике плазмы и проблемам управляемого термоядерного синтеза. Киев, 1963. С. 92.
6. Мазитов Р.К. // Прикладная механика и техническая физика. 1965. № 1. С. 27.
7. O'Neil T. // Phys. Fluids. 1965. V. 8. P. 2255.
8. Fainberg Ya.B. // Czechoslovak J. Physics. 1968. V. 18B. P. 652.
9. Файнберг Я.Б., Шапиро В.Д., Шевченко В.И. // ЖЭТФ. 1970. Т. 57. С. 966.
10. Курилко В.И. // ЖЭТФ. 1970. Т. 57. С. 885.

11. *Drummond W.E., Malmberg J.H., O'Neil T.M., Thompson J.R.* // Phys. Fluids. 1970. V. 13. P. 2422.
12. *Ковтун Р.И., Рухадзе А.А.* // ЖЭТФ. 1970. Т. 58. С. 1709.
13. *Брейзман Б.Н., Рютов Д.Д.* // ЖЭТФ. 1971. Т. 60. С. 408.
14. *Онищенко И.Н., Линецкий А.Р., Мациборко Н.Г., Шапиро В.Д., Шевченко В.И.* // Письма в ЖЭТФ. 1970. Т. 12. С. 407.
15. *Onishchenko I.N., Shapiro V.D., Shevchenko V.I.* // PlasmaPhys. 1972. V. 14. P. 591.
16. *Иванов А.А., Параил В.В., Соболева Т.К.* // ЖЭТФ. 1973. Т. 63. С. 1678.
17. *Иванов А.А.* Физика сильно неравновесной плазмы. М.: Атомиздат, 1977. 352 с.
18. *Альтеркоп Б.А., Росинский С.Е., Тараканов В.П.* // Физика плазмы. 1979. Т. 5. С. 291.
19. *Кузелев М.В., Рухадзе А.А., Стрелков П.С.* Плазменная релятивистская СВЧ-электроника. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 544 с.
20. *Бобылёв Ю.В., Кузелев М.В.* Нелинейные явления при электромагнитных взаимодействиях электронных пучков с плазмой. М.: Физматлит, 2009. 456 с.
21. *Кукушкин А.В., Рухадзе А.А.* // Физика плазмы. 2017. Т. 43. С. 776.
22. *Бобылев Ю.В., Кузелев М.В., Рухадзе А.А.* // Физика плазмы. 2004. Т. 30. С. 419.
23. *Бобылев Ю.В., Кузелев М.В., Рухадзе А.А.* // Физика плазмы. 2008. Т. 34. С. 122.
24. *Shlapakovski A.S., Artemenko S.N., Avgustinovich V.A., Mashchenko A.I., Matvienko V.M., Mityushkina V.Yu., Vintizenko I.I., Jiang W., Schamiloglu E.* // 14th Symposium on High Current Electronics. Tomsk, 2006. P. 359.
25. *Августинович В.А., Артеменко С.Н., Машенко А.И., Шлапаковский А.С., Юшков Ю.Г.* // Письма в ЖТФ. 2010. Т. 36. С. 103.
26. *Кириченко А.Я., Лонин Ю.Ф., Папкович В.Г., Пономарев А.Г., Прокопенко Ю.В., Уваров В.Т., Филиппов Ю.Ф.* // ВАНТ. Сер. Ядерно-физические исследования. Вып. 53. 2010. № 2 (66). С. 135.
27. *Galaydych K.V., Lonin Yu.F., Ponomarev A.G., Prokopenko Yu.V., Sotnikov G.V.* // Problems of Atomic Science and Technology. Ser.: Plasma Phys. Iss. 16. 2010. № 6. P. 123.
28. *Дормидонтов А.В., Кириченко А.Я., Лонин Ю.Ф., Пономарев А.Г., Прокопенко Ю.В., Сотников Г.В., Уваров В.Т., Филиппов Ю.Ф.* // Письма в ЖТФ. 2012. Т. 38. С. 65.
29. *Galaydych K.V., Lonin Yu.F., Ponomarev A.G., Prokopenko Yu.V., Sotnikov G.V.* // Problems of Atomic Science and Technology. Ser. Plasma Phys. Iss. 18. 2012. № 6(82). P. 158.
30. *Галайдыч К.В., Лонин Ю.Ф., Пономарев А.Г., Прокопенко Ю.В., Сотников Г.В., Уваров В.Л.* // ВАНТ. Сер. Ядерно-физические исследования. Вып. 58. 2012. № 3 (79). С. 174.
31. *Аверков Ю.О., Прокопенко Ю.В., Яковенко В.М.* // Радиофизика и электроника. 2016. Т. 7(21). С. 28.
32. *Averkov Yu.O., Prokopenko Yu.V., Yakovenko V.M.* // Phys. Rev. E. 2017. V. 96. P. 013205(12).
33. *Averkov Yu.O., Prokopenko Yu.V., Yakovenko V. M.* // Problems of Atomic Science and Technology. Ser. Plasma Electronics and New Methods of Acceleration. Iss. 10. 2018. № 4(116). P. 3.
34. *Карташов И.Н., Кузелев М.В.* // Физика плазмы. 2014. Т. 40. С. 749.
35. *Лопухин В.М., Веденов А.А.* // УФН. 1954. Т. 53. С. 69.
36. *Бородкин А.И., Яковенко В.М., Левин Г.Я., Майстренко Ю.В.* // ФТТ. 1970. Т. 12. С. 1515.
37. *Корнилов Е.А., Некрашевич С.А., Файнберг Я.Б., Шоховцов Н.А.* // Письма в ЖЭТФ. 1970. Т. 11. С. 284.
38. *Кузелев М.В., Лазутченко О.В., Рухадзе А.А.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1999. Т. 42. Вып. 10. С. 958.
39. *Справочник по специальным функциям. С формулами, графиками и таблицами / Под. ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.*
40. *Аверков Ю.О., Прокопенко Ю.В., Яковенко В.М.* // Радиофизика и электроника. 2016. Т. 7 (21). С. 68.
41. *Ахиезер А.И., Ахиезер И.А., Половин Р.В., Ситенко А.Г., Степанов К.Н.* Электродинамика плазмы / Под. ред. А.И. Ахиезера. М.: Наука, 1974. 720 с.