ФИЗИКА ПЛАЗМЫ, 2019, том 45, № 7, с. 657–671

КОСМИЧЕСКАЯ ПЛАЗМА

УДК 533.951.8523.947

МГД-ВОЛНЫ И НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАЗМЕ

© 2019 г. Н. С. Джалилов[a], С. Ш. Гусейнов[a,]*

[a] *Шамахинская астрофизическая обсерватория НАН Азербайджана, Пиркули, Шемахы, Азербайджан*

**e-mail: sedi-huseynov@mail.ru*

Поступила в редакцию 22.10.2018 г.
После доработки 17.12.2018 г.
Принята к публикации 20.12.2018 г.

На основе 16-моментных МГД-уравнений переноса рассмотрено распространение линейных волн в анизотропной однородной космической плазме. Получено общее дисперсионное уравнение с учетом двух компонентов плазмы (электроны и протоны) и теплового потока вдоль магнитного поля. Полученное дисперсионное уравнение является обобщением ранее исследованных случаев, когда плазма являлась ионной. Более подробно анализирован случай, когда эффекты, связанные с тепловым потоком игнорируются. В пределе продольного распространения дана классификация волновых мод, которые полностью соответствуют известным модам из низкочастотной кинетической физики бесстолкновительной плазмы. Проанализированы шланговые и зеркальные неустойчивости. Показано, что учет электронов меняет инкременты и условия возникновения неустойчивостей.

DOI: 10.1134/S0367292119060040

1. ВВЕДЕНИЕ

В связи с тем, что измеряемые параметры сильноразреженной космической замагниченной плазмы (например, солнечный и звездные ветры, короны звезд, звездные диски, ионосфера и магнитосферы планет, межзвездная среда) являются макроскопическими, то МГД-описание - такой плазмы является более уместным. Вывод замкнутых МГД-уравнений для бесстолкновительной плазмы имеет свои трудности. Основная трудность связана с прерыванием цепочек бесконечных уравнений для моментов функций распределения. Это требует дополнительного физического обоснования, а также конкретного вида функций распределения частиц по скоростям. Классическими примерами таких уравнений, описывающих плазму как жидкость, являются ЧГЛ [1] и 16-ти моментные уравнения переноса [2, 3], выведенные для би-максвелловской плазмы при нулевом радиусе ларморовского вращения. Главным преимуществом 16-ти моментных МГД-уравнений переноса по сравнению с ЧГЛ-уравнениями является то, что эти уравнения учитывают тепловой поток вдоль магнитного поля. В отличие от ЧГЛ-уравнений 16-моментные уравнения дают правильное выражение критерия возникновения зеркальной неустойчивости, совпадающее с низкочастотным кинетическим результатом [4, 5]. МГД-описания плазмы по сравнению с кинетикой имеет существенный недостаток, заключающийся в том, что рассматриваются малые волновые числа, $k < \omega_{pp}/c$ (ω_{pp} – протонная плазменная частота, c – скорость света). В ряде работ были выполнены оценки модификаций МГД-неустойчивостей при учете конечной длины ларморовского радиуса (см., например, [6, 7]).

В предыдущих работах мы развивали теорию МГД-неустойчивостей на основе 16-моментных уравнений [4, 5, 8, 9]. В этих работах результаты были получены для ионной плазмы. Роль электронов сводилась только к поддержанию квазинейтральности плазмы. Строго говоря, игнорирование вкладов электронной компоненты плазмы требует условие $T_e \ll T_p$, которое в реальности встречается очень редко. Здесь мы обобщаем теорию линейных МГД-неустойчивостей с учетом электронной компоненты и ее анизотропии, исследуются пороги шланговых и зеркальной неустойчивостей в электронно-протонной анизотропной плазме.

2. МГД-УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА В АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАЗМЕ

Для кинетического описания динамических явлений в плазме, состоящей из электронов и ионов, обычно применяются эволюционные уравнения функций распределения $f_\alpha(\mathbf{u};\mathbf{r};t)$ каждого сорта $\alpha = \{e,i\}$ частиц – уравнения Больцмана–Власова. Если учитывается влияние электромагнитного поля, то к этим уравнениям добавляются уравнения Максвелла. Интересующие нас макроскопические параметры плазмы (плотность, макроскопическая скорость течения, давления, тепловой поток) определяются как интегральные моменты функций распределения в трехмерном пространстве микроскопических скоростей $\mathbf{u}$. В движущейся системе отсчета эти моменты представляются как

$$n = \int f(\mathbf{u};\mathbf{r};t)d^3\mathbf{u}, \quad n\mathbf{v} = \int \mathbf{u}f(\mathbf{u};\mathbf{r};t)d^3\mathbf{u},$$

$$p = m\int |\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 f(\mathbf{u};\mathbf{r};t)d^3\mathbf{u},$$

$$p_{\|} = m\int [(\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot\mathbf{b}]^2 f(\mathbf{u};\mathbf{r};t)d^3\mathbf{u},$$

$$S_{\|} = (m/2)\int [(\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot\mathbf{b}]^3 f(\mathbf{u};\mathbf{r};t)d^3\mathbf{u},$$

$$S_B = (m/2)\int [(\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot\mathbf{b}]|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 f(\mathbf{u};\mathbf{r};t)d^3\mathbf{u},$$

где $\mathbf{b}$ – единичный вектор вдоль магнитного поля, среднее полное давление $p = (2p_\perp + p_\|)/3$ определяется поперечными $p_\perp$ и продольными $p_\|$ давлениями, полный продольный поток тепла $S_B = S_\perp + S_\|$ определяется как сумма продольных потоков тепла, вызванных поперечными ($S_\perp$) и продольными ($S_\|$) тепловыми движениями.

Количество этих интегральных моментов может быть сколь угодно большим, и они все выражаются друг через друга. Цепочка уравнений, описывающих эти моменты (уравнения переноса), также может быть бесконечной. Требуются дополнительные физически обоснованные условия разрыва цепочки уравнений. В случае плотной плазмы, когда функции распределения частиц равновесной столкновительной плазмы близки к максвелловской, эти цепочки уравнений легко прерываются. В результате получаются обычные МГД-уравнения для изотропной плазмы. Однако в случае редких столкновений и в присутствии сильного магнитного поля функции распределения частиц не описываются максвелловским распределением, и возникает трудность прерывания цепочки моментных уравнений для неравновесной плазмы. В этом случае решение кинетического уравнения для каждого сорта частиц обычно ищется в виде разложения вокруг заданной функции распределения с анизотропными температурами относительно направления внешнего магнитного поля. Если эту функцию считать би-максвелловской функцией (простейший вид для анизотропной плазмы), то при очень малых ларморовских радиусах обращения частиц вокруг силовых линий магнитного поля ($r_B \to 0$) получается система 16-ти моментных уравнений [2, 3]. В общепринятых обозначениях эти уравнения представляются как

$$\frac{d\rho_\alpha}{dt} + \rho_\alpha\nabla\cdot\mathbf{v} = 0, \tag{1}$$

$$\begin{gathered}\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{1}{4\pi}\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + \\ + \sum_\alpha\left[\nabla p_{\alpha\perp} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\left(\frac{p_{\alpha\|}-p_{\alpha\perp}}{B^2}\mathbf{B}\right)\right] = 0,\end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered}Bp_{\alpha\|}\frac{d}{dt}\ln\left(\frac{B^2p_{\alpha\|}}{n^3}\right) + \mathbf{B}\cdot\nabla S_{\alpha\|} + \\ + 2\left(S_{\alpha\perp} - \frac{1}{2}S_{\alpha\|}\right)\mathbf{B}\cdot\nabla\ln B = 0,\end{gathered} \tag{3}$$

$$Bp_{\alpha\perp}\frac{d}{dt}\ln\left(\frac{p_{\alpha\perp}}{Bn}\right) + \mathbf{B}\cdot\nabla S_{\alpha\perp} - 2S_{\alpha\perp}\mathbf{B}\cdot\nabla\ln B = 0, \tag{4}$$

$$BS_{\alpha\|}\frac{d}{dt}\ln\left(\frac{B^3S_{\alpha\|}}{2n^4}\right) + \frac{3p_{\alpha\|}}{m_\alpha}\mathbf{B}\cdot\nabla\left(\frac{p_{\alpha\|}}{n}\right) = 0, \tag{5}$$

$$\begin{gathered}BS_{\alpha\perp}\frac{d}{dt}\ln\left(\frac{S_{\alpha\perp}}{n^2}\right) + \frac{p_{\alpha\|}}{m_\alpha}\mathbf{B}\cdot\nabla\left(\frac{p_{\alpha\perp}}{n}\right) - \\ - \frac{(p_{\alpha\|}-p_{\alpha\perp})\,p_{\alpha\perp}}{nm_\alpha}\mathbf{B}\cdot\nabla\ln B = 0,\end{gathered} \tag{6}$$

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} + \mathbf{B}\nabla\cdot\mathbf{v} - (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{v} = 0, \quad \nabla\cdot\mathbf{B} = 0. \tag{7}$$

При выводе этих уравнений считается, что плазма является квазинейтральной, $n_e \approx n_i = n$, а массовые скорости ее компонентов близки, $\mathbf{v_e} \approx \mathbf{v_i} = \mathbf{v}$. Здесь $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v}\cdot\nabla$, $\rho_\alpha = nm_\alpha$ и $S_{\alpha\|}$ и $S_{\alpha\perp}$ – тепловые потоки вдоль магнитного поля, вызванные продольными и поперечными тепловыми движениями частиц сорта α. Если пренебречь этими потоками, $S_{\alpha\|} = 0$, $S_{\alpha\perp} = 0$, то получим законы изменения продольных и поперечных тепловых энергий вдоль траектории элемента жидкости (левые части уравнений (3) и (4)). Эта пара уравнений (так называемые "двойные адиабаты") и уравнения (1), (2) и (7) образуют замкнутую систему уравнений, известную как ЧГЛ-уравнения [1]. Однако если воспользоваться ЧГЛ-уравнениями, то остаются не удовлетворенными уравнения (5) и (6). Это является следствием того, что при выводе ЧГЛ-уравнений без всяких обоснований были опущены третьи моменты функции распределения, т. е. тепловые потоки не учитывались. Приведенные здесь уравнения (1)–(7) содержат тепловые потоки и являются более полными уравнениями. ЧГЛ-уравнения не следуют из этих уравнений как частный случай.

При выводе 16-моментных уравнений сохранены моменты до третьего ранга (тепловые потоки) [3]. Как было показано, в этом случае в уравнения для моментов 3-го ранга входят моменты 4-го ранга как неизвестные, которые должны подчиняться условиям Шварца. Далее все физические переменные, в том числе функция распределения частиц, разлагаются в ряд по малому ларморовскому радиусу. Для нулевого порядка уравнений предполагается, что зависимость функций распределения частиц от $\mathbf{u}$ должна быть в виде $m|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2/2$ (т. е. как энергия в системе координат, связанной с жидкостью) и от питч-угла как $\sin\lambda = (\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot\mathbf{B}/(|\mathbf{u}-\mathbf{v}|B)$. При этом допускается, что функции распределения частиц в нулевом порядке не зависят от гирофазы. Перечисленные условия являются основными требованиями к функциям распределения частиц при выводе замкнутой системы МГД-уравнений. Хотя такой вид функции распределения теряет некоторые тонкости кинетических эффектов, но они позволяют прервать ряд цепочек моментных уравнений. Функциональный вид функций распределений может быть различным: би-максвелловская, каппа и т.д. Для каждого конкретного вида этих функций получаемые конечные уравнения будут разными. В простейшем случае бимаксвелловского распределения с двумя температурами

$$f_0(|\mathbf{u}-\mathbf{v}|\lambda;\mathbf{r};t) = \left(\frac{m}{2\pi}\right)^{3/2}\frac{n^{5/2}}{p_\perp p_\parallel^{1/2}}\times$$
$$\times\exp\left[-\frac{mn|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2}{2}\left(\frac{\cos^2\lambda}{p_\perp}+\frac{\sin^2\lambda}{p_\parallel}\right)\right]$$

моменты 4-го ранга, входящие в уравнения 3-го ранга, выражаются моментами более низкого ранга. Это позволяет замыкать системы моментных уравнений. Отметим, что неравновесная плазма с пучком заряженных частиц, движущихся вдоль направления магнитного поля и вращающихся вокруг него, или двухпотоковая система может описываться подобными функциями распределения частиц.

3. ВЫВОД ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Для простоты рассмотрим случай, когда невозмущенное состояние плазмы однородно и стационарно: все величины $\mathbf{v}_0$, ρ_0, $p_{\parallel0}$, $p_{\perp0}$, $\mathbf{B}_0$, $S_{\parallel0}$ и $S_{\perp0}$ для частиц сорта α не зависят от координат и времени. Уравнения (1)–(7) автоматически удовлетворяют этим условиям с ненулевыми тепловыми потоками. Рассмотрим малые возмущения физических величин относительно равновесного состояния. Например, давление представим в виде $p = p_0 + p'(r,t)$, где $p'(r,t) \sim \exp i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_0 t)$ и $|p'| \ll p_0$. Здесь $\omega_0 = \omega + (\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{k})$ является частотой колебаний в движущей совместно с плазмой системе координат, $\mathbf{k}$ – волновой вектор колебаний. Исключив из уравнений возмущения тепловых потоков

$$S'_{\alpha\perp} = \frac{k_\parallel p_{\alpha\parallel0}p_{\alpha\perp0}}{\omega\rho_{\alpha0}}\left(\frac{p'_{\alpha\perp}}{p_{\alpha\perp0}} - \frac{\rho'_\alpha}{\rho_{\alpha0}} - \frac{p_{\alpha\parallel0}-p_{\alpha\perp0}}{p_{\alpha\parallel0}}\frac{B'}{B_0}\right) + \\ + 2S_{\alpha\perp0}\frac{\rho'_\alpha}{\rho_{\alpha0}}, \qquad (8)$$

$$S'_{\alpha\parallel} = \frac{3p^2_{\alpha\parallel0}k_\parallel}{\omega\rho_{\alpha0}}\left(\frac{p'_{\alpha\parallel}}{p_{\alpha\parallel0}} - \frac{\rho'_\alpha}{\rho_{\alpha0}}\right) - S_{\alpha\parallel0}\left(3\frac{B'}{B_0} - 4\frac{\rho'_\alpha}{\rho_{\alpha0}}\right), \qquad (9)$$

получим систему уравнений для возмущенного состояния

$$\rho'_\alpha\omega - \rho_{\alpha0}\left(k_x v'_x + k_y v'_y + k_z v'_z\right) = 0, \qquad (10)$$

$$a_{\alpha0}\frac{p'_{\alpha\perp}}{p_{\alpha\perp0}} = a_{\alpha1}\frac{B'}{B_0} + a_{\alpha2}\frac{\rho'_\alpha}{\rho_{\alpha0}}; \\ b_{\alpha0}\frac{p'_{\alpha\parallel}}{p_{\alpha\parallel0}} = b_{\alpha1}\frac{B'}{B_0} + b_{\alpha2}\frac{\rho'_\alpha}{ho_{\alpha0}}, \qquad (11)$$

$$\omega\rho_0\mathbf{v}' + \frac{1}{4\pi}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_0)\mathbf{B}' - \frac{1}{4\pi}B_0B'\,\mathbf{k} - \\ - \sum_\alpha\left[\mathbf{k}p'_{\alpha\perp} + \frac{p_{\alpha\parallel0}-p_{\alpha\perp0}}{B_0^2}\times\right. \qquad (12) \\ \left.\times(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_0)\left(\mathbf{B}' - 2\frac{B'}{B_0}\mathbf{B}_0 + \frac{p'_{\alpha\parallel}-p'_{\alpha\perp}}{p_{\alpha\parallel0}-p_{\alpha\perp0}}\mathbf{B}_0\right)\right] = 0,$$

$$\omega\mathbf{B}' - \mathbf{B}_0(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}) + (\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k})\mathbf{v} = 0, \quad (\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}') = 0, \qquad (13)$$

где

$$a_{\alpha0} = 1-\eta_\alpha^2, \quad a_{\alpha1} = 1 - 2\gamma_\alpha\eta_\alpha - \bar{\varphi}_\alpha\eta_\alpha^2, \\ a_{\alpha2} = 1 + 2\gamma_\alpha\eta_\alpha - \eta_\alpha^2, \\ b_{\alpha0} = 1 - 3\eta_\alpha^2, \quad b_{\alpha1} = 2\gamma_\alpha\eta_\alpha(\varphi_\alpha - 2) - 2, \\ b_{\alpha2} = 3 + 4\gamma_\alpha\eta_\alpha - 3\eta_\alpha^2. \qquad (14)$$

Здесь для основного невозмущенного состояния были введены обозначения (нулевые индексы опущены)

$$\rho_\alpha = nm_\alpha, \quad \varphi_\alpha = \frac{p_{\alpha\perp}}{p_{\alpha\parallel}}, \quad \bar{\varphi}_\alpha = 1 - \varphi_\alpha, \quad c^2_{\alpha\parallel} = \frac{p_{\alpha\parallel}}{\rho_\alpha}, \\ c^2_{\alpha\perp} = \frac{p_{\alpha\perp}}{\rho_\alpha}, \quad \eta_\alpha \equiv \frac{c_{\alpha\parallel}k_\parallel}{\omega} = \frac{c_{\alpha\parallel}k}{\omega}\cos\theta, \qquad (15)$$

где θ – угол между векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{B}_0$, $k_\parallel = \mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k}/B_0$. Безразмерные величины, характеризующие тепловые потоки, $\bar{S}_{\alpha\parallel} = S_{\alpha\parallel}/(p_{\alpha\parallel}c_{\alpha\parallel})$, $\bar{S}_{\alpha\perp} = S_{\alpha\perp}/(p_{\alpha\perp}c_{\alpha\parallel})$ в реальных ситуациях различаются. Однако, здесь для простоты считаем, что $\bar{S}_{\alpha\parallel} = \bar{S}_{\alpha\perp} = \gamma_\alpha$. Примем, что $\rho = \sum \rho_\alpha$ и

$$l = l_1 = \cos^2\theta, \quad l_2 = \sin^2\theta,$$
$$c_A^2 \equiv \frac{B^2}{4\pi\rho}, \quad \beta_\alpha = \frac{B^2}{4\pi p_{\alpha\parallel}},$$

$$p_{\alpha\parallel} = \frac{1}{2} n_e k_B T_{\alpha\parallel}, \quad p_{\alpha\perp} = \frac{1}{2} n_e k_B T_{\alpha\perp}, \quad \Omega \equiv \frac{c_{i\parallel}}{c_{e\parallel}} = \frac{\psi}{\sqrt{\Lambda_e}},$$

$$\Lambda_\alpha = \frac{m_i + m_e}{m_\alpha} \approx \frac{m_i}{m_\alpha}, \quad p_{i\parallel} = \Lambda_e \Omega^2 p_{e\parallel}, \tag{16}$$

$$\Lambda_e = \kappa^2 \approx 1836,$$

$$\psi^2 = \frac{p_{i\parallel}}{p_{e\parallel}} = \frac{T_{i\parallel}}{T_{e\parallel}} = \frac{1}{\tau_\parallel}, \quad c_{s\perp}^2 \equiv \left(\sum_\alpha p_{\alpha\perp}\right)/\rho,$$
$$c_{s\parallel}^2 \equiv \left(\sum_\alpha p_{\alpha\parallel}\right)/\rho.$$

Допустив, не нарушая общности постановки задачи, что в плоской декартовой системе координат

$$\mathbf{k} = (k, 0, 0), \quad \mathbf{B}_0 = (B_{0x}, 0, B_{0z}),$$
$$B_{0x} = B_0 \cos\theta, \quad B_{0z} = B_0 \sin\theta \tag{17}$$

и исключив ρ'_α, $p'_{\alpha\perp}$ и $p'_{\alpha\parallel}$, получим

$$\frac{\mathbf{B}'}{B} - \frac{\mathbf{B}}{B}\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})}{\omega} + \frac{k_\parallel}{\omega}\mathbf{v} = 0, \tag{18}$$

$$\begin{gathered}
\frac{1}{\eta_i}\frac{\mathbf{v}}{c_{i\parallel}} - \varphi_i \frac{\mathbf{k}}{k_\parallel}\left(\frac{a_{i1}}{a_{i0}}\frac{B'}{B} + \frac{a_{i2}}{a_{i0}}\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})}{\omega} + \frac{(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}')}{4\pi p_{i\perp}}\right) + \\
+ \frac{\mathbf{B}'}{B}(\beta_i - \bar{\varphi}_i) - \frac{\mathbf{B}}{B}\left[\left(\frac{b_{i1}}{b_{i0}} - \varphi_i \frac{a_{i1}}{a_{i0}} - 2\bar{\varphi}_i\right)\frac{B'}{B} + \right. \\
\left. + \left(\frac{b_{i2}}{b_{i0}} - \varphi_i \frac{a_{i2}}{a_{i0}}\right)\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})}{\omega}\right] - \\
- \tau_\parallel \left[\varphi_e \frac{\mathbf{k}}{k_\parallel}\left(\frac{a_{e1}}{a_{e0}}\frac{B'}{B} + \frac{a_{e2}}{a_{e0}}\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})}{\omega}\right) + \frac{\mathbf{B}'}{B}\bar{\varphi}_e + \right. \\
+ \frac{\mathbf{B}}{B}\left[\left(\frac{b_{e1}}{b_{e0}} - \varphi_e \frac{a_{e1}}{a_{e0}} - 2\bar{\varphi}_e\right)\frac{B'}{B} + \right. \\
\left.\left. + \left(\frac{b_{e2}}{b_{e0}} - \varphi_e \frac{a_{e2}}{a_{e0}}\right)\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})}{\omega}\right]\right] = 0,
\end{gathered} \tag{19}$$

y-компонента этой системы сводится к

$$\begin{gathered}
\frac{B'_y}{B} + \eta_i \frac{v_y}{c_{i\parallel}} + \frac{B'_y}{B} + \eta_e \frac{v_y}{c_{e\parallel}} = 0, \\
p_{i\parallel}\frac{1}{\eta_i}\frac{v_y}{c_{i\parallel}} + p_{i\parallel}(\beta_i - \bar{\varphi}_i)\frac{B'_y}{B} - p_{e\parallel}\bar{\varphi}_e \frac{B'_y}{B} = 0,
\end{gathered} \tag{20}$$

откуда легко получается дисперсионное уравнение для несжимаемых мод:

$$\sum_\alpha \frac{\eta_\alpha^2}{\Lambda_\alpha}\left(\frac{1}{2}\beta_\alpha + \varphi_\alpha - 1\right) = 1, \tag{21}$$

из которого следует, что

$$\frac{\omega^2}{c_{i\parallel}^2 k^2} = l\left(\beta_i + \varphi_i - 1 + \frac{\varphi_e - 1}{\psi^2}\right). \tag{22}$$

В размерных величинах это соответствует известному результату

$$\omega^2 = c_A^2 k_\parallel^2 \left(1 - 4\pi \sum_\alpha \frac{p_{\alpha\parallel} - p_{\alpha\perp}}{B^2}\right). \tag{23}$$

Это является прототипом дисперсионного уравнения альфвеновских колебаний в изотропной плазме. При выполнении

$$\beta_i + \varphi_i + \varphi_e/\psi^2 < 1 + 1/\psi^2 \tag{24}$$

альфвеновские моды становятся неустойчивыми, возникает шланговая неустойчивость. В двух случаях инкремент шланговой неустойчивости переходит к известному случаю: при $\psi^2 \gg 1$ (холодные электроны, $T_{e\parallel} \ll T_{i\parallel}$) и при изотропных электронах, $\varphi_e = 1$. Если электронный компонент плазмы анизотропный, $\varphi_e \neq 1$, то при $\varphi_e > 1$ ($T_{e\perp} > T_{e\parallel}$) шланговая неустойчивость подавляется, а при обратном случае, $\varphi_e < 1$ ($T_{e\perp} < T_{e\parallel}$), наоборот, неустойчивость усиливается.

Другие x и z компоненты системы уравнений (18)–(19) имеют вид

$$\begin{gathered}
q_{i1}\frac{v_x}{c_{i\parallel}} - q_{i2}\,\mathrm{tg}\,\theta \frac{B'_z}{B} + \tau_\parallel q_{e1}\frac{v_x}{c_{e\parallel}} - \tau_\parallel q_{e2}\,\mathrm{tg}\,\theta\frac{B'_z}{B} = 0, \\
\frac{B'_z}{B} - \eta_\alpha\,\mathrm{tg}\,\theta\frac{v_x}{c_{\alpha\parallel}} + \eta_\alpha \frac{v_z}{c_{\alpha\parallel}} = 0, \\
\frac{1}{\eta_i}\frac{v_z}{c_{i\parallel}} - q_{i3}\,\mathrm{tg}\,\theta\frac{v_x}{c_{i\parallel}} + q_{i4}\frac{B'_z}{B} - \tau_\parallel q_{e3}\,\mathrm{tg}\,\theta\frac{v_x}{c_{e\parallel}} + \tau_\parallel q_{e4}\frac{B'_z}{B} = 0,
\end{gathered} \tag{25}$$

где

$$\begin{gathered}
q_{i4} = \beta_i - \bar{\varphi}_i - l_2 q_{i0}, \quad q_{e4} = -\bar{\varphi}_e - l_2 q_{e0}, \\
q_{i2} = \varphi_i \frac{a_{i1}}{a_{i0}} + \beta_i + l_1 q_{i0}, \quad q_{e2} = \varphi_e \frac{a_{e1}}{a_{e0}} + l_1 q_{e0}, \\
q_{i1} = \frac{1}{\eta_i} - \eta_i \frac{\varphi_i}{l_1}\frac{a_{i2}}{a_{i0}} - q_{i3}, \quad q_{e1} = -\eta_e \frac{\varphi_e}{l_1}\frac{a_{e2}}{a_{e0}} - q_{e3}, \\
q_{i3} = \eta_i\left(\frac{b_{i2}}{b_{i0}} - \varphi_i \frac{a_{i2}}{a_{i0}}\right), \quad q_{e3} = \eta_e\left(\frac{b_{e2}}{b_{e0}} - \varphi_e\frac{a_{e2}}{a_{e0}}\right), \\
q_{i0} = \frac{b_{i1}}{b_{i0}} - \varphi_i\frac{a_{i1}}{a_{i0}} - 2\bar{\varphi}_i, \quad q_{e0} = \frac{b_{e1}}{b_{e0}} - \varphi_e \frac{a_{e1}}{a_{e0}} - 2\bar{\varphi}_e.
\end{gathered} \tag{26}$$

Детерминант этой системы дает дисперсионное уравнение для сжимаемых мод:

$$\sum_\alpha l_1 \frac{\eta_\alpha q_{\alpha 1}}{\Lambda_\alpha}\left(1-\sum_\alpha \frac{\eta_\alpha^2 q_{\alpha 4}}{\Lambda_\alpha}\right)- -\sum_\alpha l_2 \frac{\eta_\alpha^2 q_{\alpha 2}}{\Lambda_\alpha}\left(1-\sum_\alpha \frac{\eta_\alpha q_{\alpha 3}}{\Lambda_\alpha}\right)=0 \quad (27)$$

Учитывая, что $\eta_i = \Omega\eta_e$, $c_{e\|}^2\rho_e = p_{i\|}/(\Lambda_e\Omega^2)$ дисперсионное уравнение для сжимаемых мод (27) представляется в виде

$$\left(x^2-1\right)\left(x^2-3\right)\left(\Omega^2x^2-3\right)\left(\Omega^2x^2-1\right)Z=0, \quad (28)$$

где $x = 1/\eta_i$. Легко можно доказать, что корни множителей $(x^2-1)(x^2-3)(\Omega^2x^2-3)(\Omega^2x^2-1)$ являются ложными (см. (11)). Последний множитель $Z=0$ в (28) является дисперсионным уравнением для сжимаемых мод. Это полиномиальное уравнение 12-го порядка для нормированной фазовой скорости $x = \omega/k_\| c_{i\|}$

$$U_{12}x^{12}+U_{10}x^{10}+U_8x^8+U_6x^6+U_4x^4+ +U_2x^2+U_0+\gamma_\alpha\left[U_9x^9+U_7x^7+U_5x^5+ +U_3x^3+U_1x\right]=0, \quad (29)$$

которое является общим дисперсионным уравнением сжимаемых волновых мод в однородной бесконечной анизотропной замагниченной двухкомпонентной плазме. Здесь учтены тепловые потоки вдоль магнитного поля, переносимые частицами сорта α. Коэффициенты уравнения U_{0-12} являются сложными действительными функциями параметров задачи, которые были получены в работе [10]. Эти коэффициенты приведены в Приложении.

В частном случае, при переходе к однокомпонентной ионной плазме $\psi \to \infty$ общее дисперсионное уравнение (29) переходит в

$$C_8x^8+C_6x^6+C_4x^4+C_2x^2+C_0+ +\gamma_i\left[C_5x^5+C_3x^3+C_1x\right]=0, \quad (30)$$

которое точно совпадает с результатами работы [4].

В общем случае уравнение (29) сложное. Оно включает в себя эффекты анизотропии как ионного, так и электронного компонентов. Взаимодействие ионных и электронных колебаний усложняется присутствием тепловых потоков вдоль магнитного поля в обоих компонентах.

4. ВОЛНЫ В БЕСПОТОКОВОМ РЕЖИМЕ

Для идентификации волновых мод исключим эффекты, связанные с тепловыми потоками. Пусть $\gamma_\alpha = 0$. Для простоты обозначим $t = x^2$, $v_{ph}^2 \equiv \omega^2/c_{i\|}^2k^2 = lt$. Тогда уравнение (29) представляется в виде

$$U_{12}t^6+U_{10}t^5+U_8t^4+U_6t^3+U_4t^2+U_2t+U_0=0. \quad (31)$$

4.1. Параллельное распространение волн

В случае параллельного распространения волн относительного магнитного поля, $l=1$, уравнение (31) удается представить в виде множителей

$$(t-1)\left(-\psi^2t+\kappa^2\right)\times \times\left(\psi^2t-\psi^2\beta_i-\psi^2\varphi_i+\psi^2-\varphi_e+1\right)\bar{Z}=0, \quad (32)$$

где

$$\bar{Z}\equiv-\psi^4t^3+3\kappa^2\psi^2t^2+6\psi^4t^2-18\kappa^2\psi^2t- -3\psi^4t+9\kappa^2\psi^2+3\psi^2t^2-3\kappa^2t-9\psi^2t+9\kappa^2. \quad (33)$$

В (32) первое решение $t=1$ соответствует медленным ионно-акустическим модам (*SIA*), для которых $\omega^2 = c_{i\|}^2k_\|^2$. Второй множитель $\left(-\psi^2t+\kappa^2\right)=0$ соответствует медленным электронно-акустическим модам (*SEA*), для которых $\omega^2 = c_{e\|}^2k_\|^2$. Третий множитель в (32) $\psi^2t-\psi^2\beta_i-\psi^2\varphi_i+\psi^2-\varphi_e+1 = 0$ описывает ускоренные магнитозвуковые моды (*FMS*), для которых $\omega^2 = c_{i\|}^2k_\|^2(\varphi_i\psi^2+\beta_i\psi^2-\psi^2+\varphi_e-1)/\psi^2$, которую можно представить в виде $\omega^2 = c_A^2k_\|^2\left(1-4\pi\sum_\alpha\frac{p_{\alpha\|}-p_{\alpha\perp}}{B^2}\right)$. Ускоренные магнитозвуковые моды при параллельном распространении становятся несжимаемыми, и дисперсионное уравнение совпадает с уравнением для альфвеновских волн (23).

Четвертый множитель в (32) $\bar{Z}=0$ это кубическое уравнение. Сложных точных формул для решения кубического уравнения здесь приводить не будем. Воспользуемся разложением по малому параметру $1/\kappa^2 = \epsilon \ll 1$. Пусть $\psi^2 = \mu$, тогда

$$\bar{Z}\equiv-\epsilon\mu t\left[\mu t^2-3(2\mu+1)t+3(\mu+3)\right]+ +3\left[\mu t^2-(6\mu+1)t+3(\mu+1)\right]=0. \quad (34)$$

При $\epsilon \to 0$ получим

$$t_{1,2}=\frac{6\mu+1\pm\sqrt{(6\mu+1)^2-12(\mu+1)\mu}}{2\mu}, \quad (35)$$

или

$$\omega^2=\frac{6+\tau_\|\pm\sqrt{24+\tau_\|^2}}{2}c_{i\|}^2k_\|^2. \quad (36)$$

Здесь первое решение (верхний знак) описывает медленные звуковые моды (SS). Это решение можно представить в виде

$$\omega^2 = \frac{6 + \tau_{\parallel} + \sqrt{24 + \tau_{\parallel}^2}}{2\left(1 + \tau_{\parallel}\right)} c_{s\parallel}^2 k_{\parallel}^2. \qquad (37)$$

При $\tau_{\parallel} \to 1$ (изотермическая плазма) $\omega^2 = 3c_{s\parallel}^2 k_{\parallel}^2$, а при $\tau_{\parallel} \to \infty$ (холодные ионы) $\omega^2 = c_{s\parallel}^2 k_{\parallel}^2$. Второе решение (нижний знак) описывает быстрые ионно-акустические моды (FIA)

$$\omega^2 = \frac{6 + \tau_{\parallel} - \sqrt{24 + \tau_{\parallel}^2}}{2} c_{i\parallel}^2 k_{\parallel}^2. \qquad (38)$$

При $\tau_{\parallel} \to 1$ (изотермическая плазма) $\omega^2 = c_{i\parallel}^2 k_{\parallel}^2$, а при $\tau_{\parallel} \to \infty$ (холодные ионы) $\omega^2 = 3c_{i\parallel}^2 k_{\parallel}^2$.

Третье решение (34)

$$t_3 \approx \frac{1}{\epsilon}\frac{3}{\mu} = \frac{3\kappa^2}{\psi^2}, \qquad (39)$$

что соответствует быстрым электронно-акустическим модам (FEA), $\omega^2 = 3c_{e\parallel}^2 k_{\parallel}^2$.

Таким образом, в беспотоковом режиме при параллельном распространении общее дисперсионное уравнение (29) переходит в (32), которое описывает шесть мод: быстрые магнитозвуковые, медленные звуковые, быстрые/медленные ионно-акустические и быстрые/медленные электронно-акустические моды. Из них только быстрые магнитозвуковые волны могут стать неустойчивыми при выполнении условий развития шланговой неустойчивости (24).

4.2. Перпендикулярное распространение волн

При квазиперпендикулярном распространении волн ($l \to 0$) из дисперсионного уравнения (31) для медленных звуковых волн получим

$$\omega^2 = k^2\left(c_A^2 + 2c_{s\perp}^2\right), \qquad (40)$$

которое является устойчивым. Для остальных мод колебаний $\omega^2 \sim l \to 0$.

4.3. Наклонное распространение волн

В общем случае, когда волны распространяются под произвольным углом $0 < l < 1$, дисперсионное уравнение (31) решается численно. Коэффициенты этого уравнения являются действительными функциями пяти параметров: l — параметр угла распространения волны относительно направления магнитного поля, β_i — параметр интенсивности магнитного поля, ψ — степень неизотермичности плазмы, φ_e и φ_i — степени анизотропии электронной и ионной составляющих плазмы. При выборе набора параметров выделим два характерных случая, когда шланговая неустойчивость возникает (условие (24) выполняется), и когда шланговая неустойчивость не возникает (условие (24) не выполняется). На рис. 1 показана зависимость нормированного квадрата фазовой скорости v_{ph}^2 от l. На кривых указаны названия волновых мод, полученных в предыдущем разделе для продольного распространения. Если $v_{ph}^2 < 0$, то возникает неустойчивость. При заданных на рис. 1 параметрах альфвеновские волны (A) для всех углов становятся неустойчивыми (шланговая неустойчивость), а быстрые магнитозвуковые моды (FMS) становятся неустойчивыми только при квазипродольном распространении (вторая шланговая неустойчивость). Порог неустойчивости FMS-мод определяется условием $U_0(l, \psi, \beta_i, \varphi_e, \varphi_i) = 0$, где функция U_0 определена в [10]. Для устойчивых мод фазовые скорости располагаются в следующем порядке: $A < FMS < SIA < FIA < SS < SEA < FEA$.

При другом наборе параметров, когда условие шланговой неустойчивости (24) не выполняется, может возникать зеркальная неустойчивость при больших углах распространения. Такой пример показан на рис. 2, где на ветке быстрых ион-акустик мод (FIA) развивается зеркальная неустойчивость. Для зеркальной неустойчивости также существует порог.

Увеличение интенсивности магнитного поля ($\beta_i \sim B^2$) подавляет рассматриваемые неустойчивости. Это видно из примеров, показанных на рис. 3.

5. КРИТЕРИИ ВОЗНИКНОВЕНИЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Как видно из общего дисперсионного уравнения (29) при отсутствии теплового потока ($\gamma_\alpha = 0$) вблизи порога неустойчивости

$$x^2 \approx -\frac{U_0}{U_2}. \qquad (41)$$

Здесь функции $U_0 = U_0(\varphi_i, \varphi_e, \psi, \beta_i, l)$ и $U_2 = U_2(\varphi_i, \varphi_e, \psi, \beta_i, l)$ определены в [10]. Критерий возникновения неустойчивости в общем виде определяется как $U_0/U_2 > 0$. Учитывая, что для наклонных волн функции U_0 и U_2 являются линейными функциями параметра $l = \cos^2\theta$, то

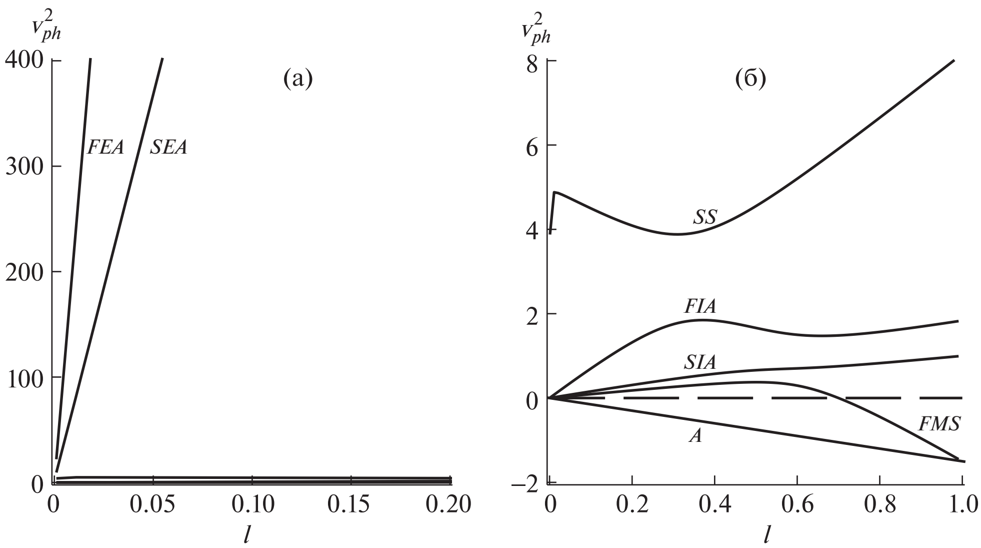

Рис. 1. Зависимость квадрата фазовой скорости распространения волн от параметра угла распространения $l = \cos^2\theta$ в случае возникновения шланговой неустойчивости, когда выполняется условие (24): $\varphi_e = \varphi_i = 0.5$, $\beta_i = 1$, $\psi = 0.5$. Неустойчивость возникает, если $v_{ph}^2 < 0$. Неустойчивыми становятся альфвеновские (*A*) и быстрые магнитозвуковые (*FMS*) моды. (а) – электронные акустические волны, (б) – все остальные волновые ветви.

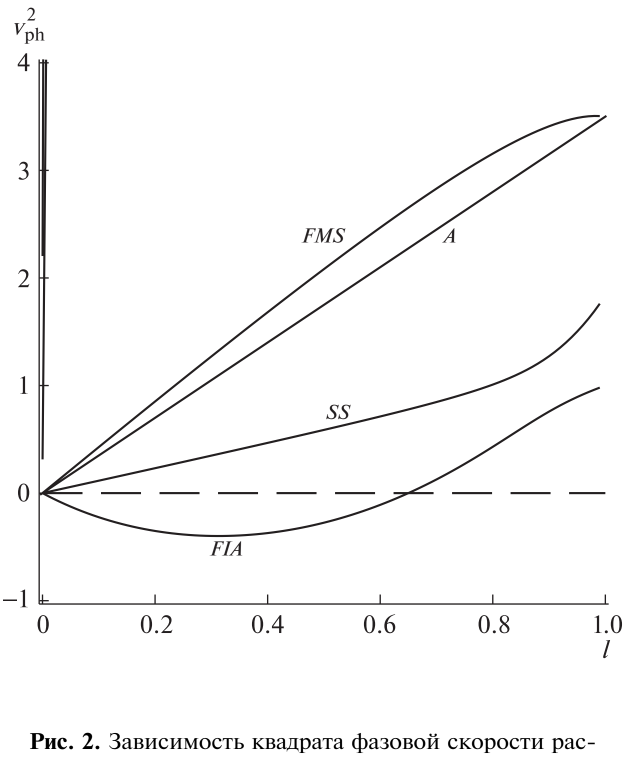

Рис. 2. Зависимость квадрата фазовой скорости распространения волн от параметра угла распространения $l = \cos^2\theta$ в случае, когда шланговая неустойчивость не возникает (условие (24) не выполняется): $\varphi_e = \varphi_i = 1.5$, $\beta_i = 1$, $\psi = 0.5$. В этом случае возможна зеркальная неустойчивость, которая развивается у быстрых ионно-акустических (*FIA*) мод при квазипоперечном распространении.

$x^2 \approx -(a + bl)/(c + dl)$, где a, b, c, d легко определяются из выражений для U_0 и U_2:

$$\begin{aligned} a = {} & -18\kappa^4\psi^4\varphi_i^2 + 9\kappa^4\psi^4\beta_i + 18\kappa^4\psi^4\varphi_i - \\ & - 9\kappa^4\psi^2\varphi_e^2 - 18\kappa^4\psi^2\varphi_e\varphi_i - 9\kappa^4\psi^2\varphi_i^2 + 9\kappa^4\psi^2\beta_i + \\ & + 18\kappa^4\psi^2\varphi_e + 18\kappa^4\psi^2\varphi_i - 18\kappa^4\varphi_e^2 + 18\kappa^4\varphi_e, \end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned} b = {} & 18\kappa^4\psi^4\varphi_i^2 - 9\kappa^4\psi^4\varphi_i - 9\kappa^4\psi^4 + 9\kappa^4\psi^2\varphi_e^2 + \\ & + 18\kappa^4\psi^2\varphi_e\varphi_i + 9\kappa^4\psi^2\varphi_i^2 - 9\kappa^4\psi^2\varphi_e - \\ & - 9\kappa^4\psi^2\varphi_i - 18\kappa^4\psi^2 + 18\kappa^4\varphi_e^2 - 9\kappa^4\varphi_e - 9\kappa^4, \end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned} c = {} & 30\kappa^4\psi^4\varphi_i^2 + 24\kappa^2\psi^6\varphi_i^2 - 27\kappa^4\psi^4\beta_i - \\ & - 54\kappa^4\psi^4\varphi_i - 12\kappa^2\psi^6\beta_i - 24\kappa^2\psi^6\varphi_i + \\ & + 27\kappa^4\psi^2\varphi_e^2 + 24\kappa^4\psi^2\varphi_e\varphi_i + 3\kappa^4\psi^2\varphi_i^2 + \\ & + 3\kappa^2\psi^4\varphi_e^2 + 24\kappa^2\psi^4\varphi_e\varphi_i + 18\kappa^2\psi^4\varphi_i^2 - \\ & - 12\kappa^4\psi^2\beta_i - 54\kappa^4\psi^2\varphi_e - 24\kappa^4\psi^2\varphi_i - \\ & - 18\kappa^2\psi^4\beta_i - 24\kappa^2\psi^4\varphi_e - 36\kappa^2\psi^4\varphi_i + \\ & + 24\kappa^4\varphi_e^2 + 21\kappa^2\psi^2\varphi_e^2 - 24\kappa^4\varphi_e - 36\kappa^2\psi^2\varphi_e, \end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned} d = {} & -30\kappa^4\psi^4\varphi_i^2 - 24\kappa^2\psi^6\varphi_i^2 + 27\kappa^4\psi^4\varphi_i + \\ & + 12\kappa^2\psi^6\varphi_i + 18\kappa^4\psi^4 - 27\kappa^4\psi^2\varphi_e^2 - \\ & - 24\kappa^4\psi^2\varphi_e\varphi_i - 3\kappa^4\psi^2\varphi_i^2 + 12\kappa^2\psi^6 - \\ & - 3\kappa^2\psi^4\varphi_e^2 - 24\kappa^2\psi^4\varphi_e\varphi_i - 18\kappa^2\psi^4\varphi_i^2 + \\ & + 27\kappa^4\psi^2\varphi_e + 12\kappa^4\psi^2\varphi_i + 12\kappa^2\psi^4\varphi_e + \end{aligned} \tag{45}$$

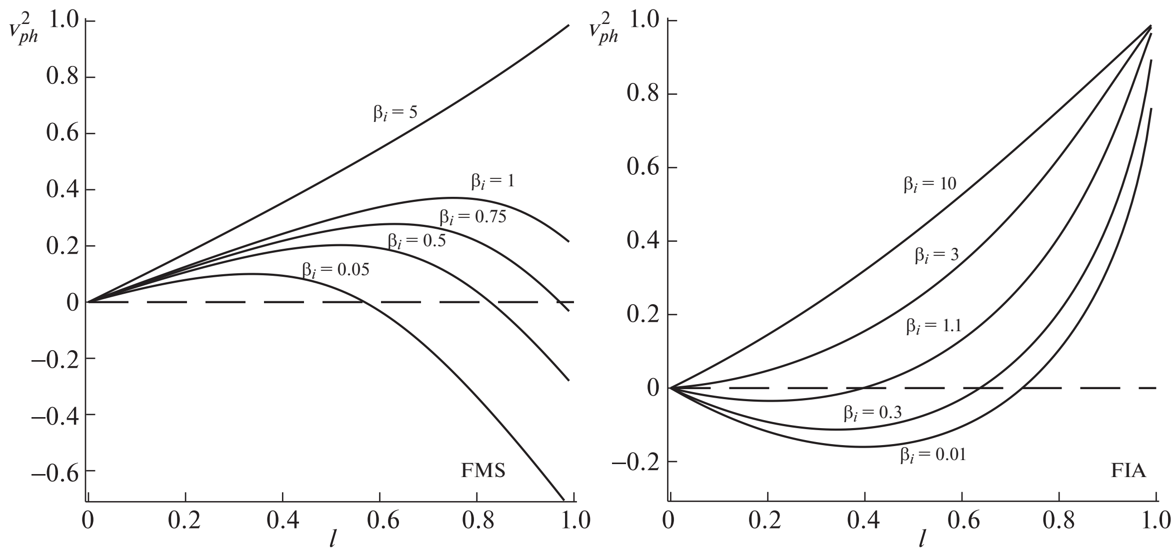

Рис. 3. Влияние магнитного поля (параметр β_i) на условие возникновения неустойчивости. Слева: кривые зависимости квадрата фазовой скорости от угла распространения волн FMS-мод (вторая шланговая неустойчивость) при значениях параметров $\varphi_e = 0.5$, $\varphi_i = 0.7$, $\psi = 1$, справа: FIA-мод (зеркальная неустойчивость) при $\varphi_e = 1.2$, $\varphi_i = 1.5$, $\psi = 0.7$.

$$+ 18\kappa^2\psi^4\varphi_i + 30\kappa^4\psi^2 - 24\kappa^4\varphi_e^2 + 30\kappa^2\psi^4 - \\ - 21\kappa^2\psi^2\varphi_e^2 + 12\kappa^4\varphi_e + 18\kappa^2\psi^2\varphi_e + \\ + 12\kappa^4 + 18\kappa^2\psi^2.$$

В простейшем случае, когда протоны и электроны одинаково анизотропны, $\varphi_i = \varphi_e = \varphi$, в квазипоперечном пределе $l \to 0$ получим

$$x^2 \approx -\frac{3\left(\psi^2+1\right)\left[\psi^2\left(2\varphi^2-2\varphi-\beta_i\right)+2\varphi^2-2\varphi\right]}{16\varphi^3\beta_i\left(\varphi-1\right)/\left(2\varphi^2-2\varphi-\beta_i\right)^2}, \quad (46)$$

а условие возникновения зеркальной неустойчивости принимает форму

$$\frac{\psi^2\left(2\varphi^2-2\varphi-\beta_i\right)+2\varphi\left(\varphi-1\right)}{\varphi-1} > 0. \quad (47)$$

Если $\varphi < 1$, то это условие выполняется всегда. Если же $\varphi > 1$, должно быть $\psi^2\left[2\varphi(\varphi-1)-\beta_i\right] + 2\varphi(\varphi-1) > 0$. Это условие при $\psi \to \infty$ (ионная плазма) переходит в $\varphi^2 > \varphi + \beta_i/2$ или $p_\perp^2/p_\parallel > p_\perp + p_m$, которое является классическим условием возникновения зеркальной неустойчивости [4]. Здесь p_m – магнитное давление. При $\psi \to 1$ ($T_{e\parallel} = T_{i\parallel}$ – изотермическая плазма) верно неравенство $\varphi^2 > \varphi + \beta_i/4$. Для горячих электронов ($\psi \to 0$) условие (47) выполняется во всех случаях.

В более общем случае $\varphi_i \neq \varphi_e$ и наклонного распространения ($l > 0$) порог неустойчивости соответствует критическому углу распространения волны $l_c = -a/b$, или

$$l_c = -\frac{\mu^2\left[\beta_i + 2\varphi_i\left(1-\varphi_i\right)\right] - \mu\left[\left(\varphi_i+\varphi_e\right)\left(\varphi_i+\varphi_e-2\right)-\beta_i\right] - 2\varphi_e\left(\varphi_e-1\right)}{\mu^2\left(2\varphi_i+1\right)\left(\varphi_i-1\right) + \mu\left[\left(\varphi_i+\varphi_e\right)\left(\varphi_i+\varphi_e-1\right)-2\right] + \left(2\varphi_e+1\right)\left(\varphi_e-1\right)}, \quad (48)$$

где $\mu = \psi^2$. Мы можем легко определить градиент изменения функции $x^2(l)$ в критической точке $l = l_c$

$$\left.\frac{dx^2}{dl}\right|_{l=l_c} = -\frac{b^2}{cb-da} = L. \quad (49)$$

Как было показано выше, зеркальная неустойчивость возникает при малых $l < l_c$, когда $L > 0$, а вторая сжимаемая шланговая неустойчивость ($fh2$) при больших $l > l_c$, когда $L < 0$.

Рассмотрим условия реализации критического угла распространения волны $0 \le l_c \le 1$ в зависи-

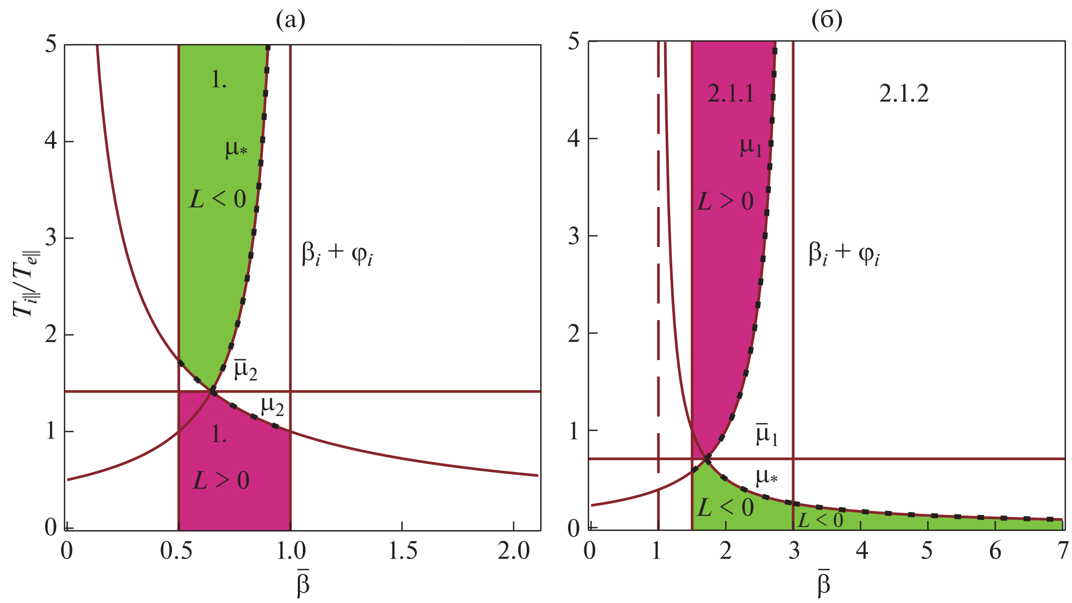

Рис. 4. Области существования порога ($0 \le l_c \le 1$) наклонной шланговой ($L < 0$) и зеркальных ($L > 0$) неустойчивостей в анизотропной плазме при условиях: (а) $\varphi_e > 1$, $\bar{\beta} = \beta_i + \varphi_i < 1$, где $\varphi_e = 1.5$, $\varphi_i = 0.5$, зависимости $\psi^2 = \mu$ от $\bar{\beta}$ в условиях $\mu > \max(\mu_2, \bar{\mu}_2, \mu_*)$ (для $L < 0$) и $\mu < \min(\mu_2, \bar{\mu}_2)$ (для $L > 0$) определяют границы неустойчивостей; (б) для $\varphi_e < 1$, $\varphi_i > 1$, где $\varphi_e = 0.5$, $\varphi_i = 1.5$, зависимости $\psi^2 = \mu$ от $\bar{\beta} = \beta_i + \varphi_i$ в условиях $\mu < \min(\mu_1, \bar{\mu}_1, \mu_*)$ (для $L < 0$) и $\mu > \max(\mu_1, \bar{\mu}_1)$ (для $L > 0$) определяют границы неустойчивостей. На рисунках указаны пункты (1, 2.1.1 и 2.1.2) параграфа 4.1 основного текста, где приводятся формулы для определения границ областей.

мости от параметров плазмы φ_i, φ_e, ψ, β_i. Для этого представим l_c как

$$l_c = \frac{a_1\mu^2 + b_1\mu + c_1}{a_2\mu^2 + b_2\mu + c_2} = \frac{a_1}{a_2}\frac{(\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2)}{(\mu - \bar{\mu}_1)(\mu - \bar{\mu}_2)}, \quad (50)$$

где

$$\bar{\varphi} = \varphi_i + \varphi_e, \quad a_1 = 2\varphi_i(\varphi_i - 1) - \beta_i,$$
$$b_1 = \bar{\varphi}(\bar{\varphi} - 2) - \beta_i, \quad c_1 = 2\varphi_e(\varphi_e - 1),$$
$$a_2 = (2\varphi_i + 1)(\varphi_i - 1), \quad b_2 = \bar{\varphi}(\bar{\varphi} - 1) - 2,$$
$$c_2 = (2\varphi_e + 1)(\varphi_e - 1),$$
$$\Delta_1 = b_1^2 - 4a_1c_1, \quad \Delta_2 = b_2^2 - 4a_2c_2,$$
$$\mu_{1,2} = \frac{-b_1 \pm \sqrt{\Delta_1}}{2a_1}, \quad \bar{\mu}_{1,2} = \frac{-b_2 \pm \sqrt{\Delta_2}}{2a_2}.$$

Из (50) следует, что $l_c \le 1$ может выполняться в следующих условиях:

$$\varphi_e > 1, \quad \beta_i + \varphi_i < 1, \quad \mu \ge \mu_*,$$
$$\varphi_e < 1, \quad \beta_i + \varphi_i > 1, \quad \mu \le \mu_*, \quad (51)$$
$$\varphi_e = 1, \quad \beta_i + \varphi_i \le 1, \quad \mu > 0,$$

где $\mu_* = (1 - \varphi_e)/(\beta_i + \varphi_i - 1)$. Для выяснения выполнения условия $l_c \ge 0$ необходимо различать два случая: $\varphi_e \ne 1$ (анизотропные электроны) и $\varphi_e = 1$ (изотропные электроны).

5.1. Анизотропные электроны

Здесь мы должны рассмотреть условия (51) отдельно.

1. Пусть $\varphi_e > 1$, $\beta_i + \varphi_i < 1$.

В этом случае $\varphi_i < 1$, и тогда $c_{1,2} > 0$, $a_{1,2} < 0$, $\Delta_{1,2} > 0$. Следовательно $\mu_1 < 0$, $\mu_2 > 0$, $\bar{\mu}_1 < 0$, $\bar{\mu}_2 > 0$. С учетом этого получаем, что

$$l_c = \frac{|a_1|}{|a_2|}\frac{\mu + |\mu_1|}{\mu + |\bar{\mu}_1|}\frac{\mu - \mu_2}{\mu - \bar{\mu}_2} > 0.$$

Отсюда получаем, что $\mu > \max(\mu_2, \bar{\mu}_2)$. Тогда для выполнения условия $0 \le l_c \le 1$ необходимо, чтобы (с учетом (51)) $\mu > \max(\mu_2, \bar{\mu}_2, \mu_*)$. Это является условием возникновения наклонной шланговой неустойчивости (*fh*2), для которой $L < 0$. Для зеркальной неустойчивости $L > 0$ должно быть $\mu < \min(\mu_2, \bar{\mu}_2)$.

Найденные области неустойчивости показаны на рис. 4 при заданных $\varphi_e > 1$ и $\varphi_i < 1$. Обе неустойчивости (наклонные шланговые и зеркальные) возникают в области больших плазменных бета

$\beta = 2/\beta_i > 1$. Для горячих ионов ($\psi^2 = T_{i\|}/T_{e\|} > 1$) доминирующей является шланговая неустойчивость ($L < 0$), а для горячих электронов ($\psi^2 < 1$) – зеркальная неустойчивость ($L > 0$).

2. Пусть $\varphi_e < 1$, $\beta_i + \varphi_i > 1$.

В этом случае $c_{1,2} < 0$ и рассмотрим два случая: $\varphi_i > 1$ и $\varphi_i < 1$.

2.1. Если $\varphi_i > 1$, тогда $a_2 > 0$, $\Delta_2 > 0$, и получим, что $\bar{\mu}_1 > 0$ и $\bar{\mu}_2 < 0$. Относительно значений β_i возможны два варианта.

2.1.1. Если $\beta_i < 2\varphi_i(\varphi_i - 1)$, то $a_1 > 0$, $\Delta_1 > 0$ и $\mu_1 > 0$, $\mu_2 < 0$. Тогда

$$l_c = \frac{a_1}{a_2}\frac{\mu + |\mu_2|}{\mu + |\bar{\mu}_2|}\frac{\mu - \mu_1}{\mu - \bar{\mu}_1} > 0,$$

из которого с учетом (51) следует, что при $\mu > \max(\mu_1, \bar{\mu}_1)$ возникает зеркальная неустойчивость ($L > 0$), а при $\mu < \min(\mu_1, \bar{\mu}_1, \mu_*)$ – вторая шланговая неустойчивость ($L < 0$).

2.1.2. В противоположном случае $\beta_i > 2\varphi_i(\varphi_i - 1)$ параметр $a_1 < 0$ и, следовательно, $\mu_1 < 0$, $\mu_2 < 0$. Тогда

$$l_c = -\left|\frac{a_1}{a_2}\right|\frac{(\mu + |\mu_1|)(\mu + |\mu_2|)}{\mu + |\bar{\mu}_2|}\frac{1}{\mu - \bar{\mu}_1} > 0.$$

Следовательно, в рассматриваемом случае возможна только вторая шланговая неустойчивость ($L < 0$), для которой $\mu < \min(\mu_*, \bar{\mu}_1)$.

Найденные области неустойчивости показаны на рис. 4 при заданных $\varphi_e < 1$ и $\varphi_i > 1$. Для горячих ионов ($\psi^2 = T_{i\|}/T_{e\|} > 1$) доминирующей является зеркальная неустойчивость ($L > 0$), а для горячих электронов ($\psi^2 < 1$) – вторая шланговая неустойчивость ($L < 0$). Как видно из рисунка, наклонные шланговые неустойчивости возможны в области малых плазменных бета $\beta = 2/\beta_i < 1$.

2.2. В случае $\varphi_i < 1$ получаем, что $a_1 < 0$, $b_1 < 0$, $c_1 < 0$, $\Delta_1 > 0$ и, следовательно, $\mu_{1,2} < 0$, $a_2 < 0$, $b_2 < 0$, $c_2 < 0$, $\Delta_2 > 0$ и, следовательно, $\bar{\mu}_{1,2} < 0$. В этом случае условие $l_c > 0$ выполняется для любых μ, а условие $l_c \le 1$ требует $\mu \le \mu_*$, которое является условием возникновение второй шланговой неустойчивости, $L < 0$. Эта область для фиксированных $\varphi_i < 1$ и $\varphi_e < 1$ показана на рис. 5.

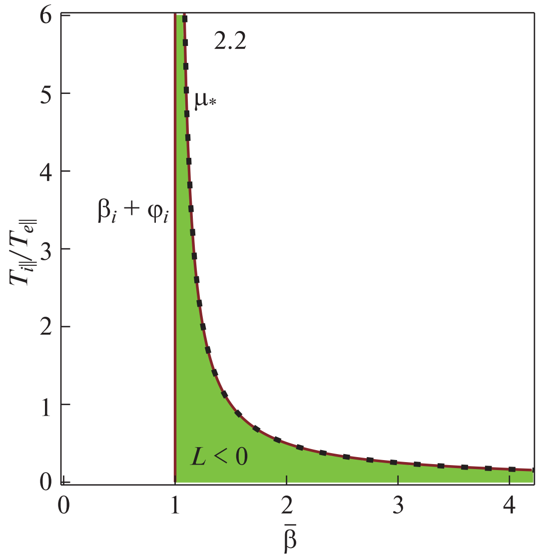

Рис. 5. Области существования порога ($0 \le l_c \le 1$) наклонной шланговой ($L < 0$) неустойчивости в анизотропной плазме при условиях $\varphi_e < 1$, $\bar{\beta} = \beta_i + \varphi_i > 1$ и $\varphi_i < 1$. Здесь $\varphi_e = 0.5$, $\varphi_i = 0.5$. Зависимости $\psi^2 = \mu$ от $\bar{\beta}$ в условиях $\mu \le \mu_*$ определяют границы неустойчивости.

5.2. Изотропные электроны

В этом случае $\varphi_e = 1$ и

$$l_c = \frac{2\mu\varphi_i(1 - \varphi_i) + \beta_i(1 + \mu) + (1 + \varphi_i)(1 - \varphi_i)}{(1 - \varphi_i)(2\mu\varphi_i + \mu + \varphi_i + 2)}. \quad (52)$$

Если $\varphi_i < 1$, условие $l_c > 0$ выполняется всегда, а для $l_c \le 1$ необходимо выполнение $\beta_i + \varphi_i \le 1$. При этом $L < 0$ и возникает вторая шланговая неустойчивость.

При $\varphi_i > 1$ условие $l_c \ge 0$ требует выполнения

$$\beta_i \le \frac{(\varphi_i - 1)(1 + \varphi_i + 2\mu\varphi_i)}{(1 + \mu)},$$

а $l_c \le 1$ не выполняется.

5.3. Неустойчивости неизотермической анизотропной плазмы

Анализ критерия возникновения неустойчивостей показал, что влияние степени неизотермичности плазмы $\psi^2 = T_{i\|}/T_{e\|}$ и степени анизотропности электронной компоненты $\varphi_e = T_{e\perp}/T_{e\|}$ являются существенными. В условиях слабостолкновительной космической плазмы эти параметры существенно отличаются от единицы. Например, в плазме солнечного ветра вблизи орбиты Земли в зависимости от плазменного бета $\beta_p = 2/\beta_i$ параметры анизотропии φ_e и φ_i имеют

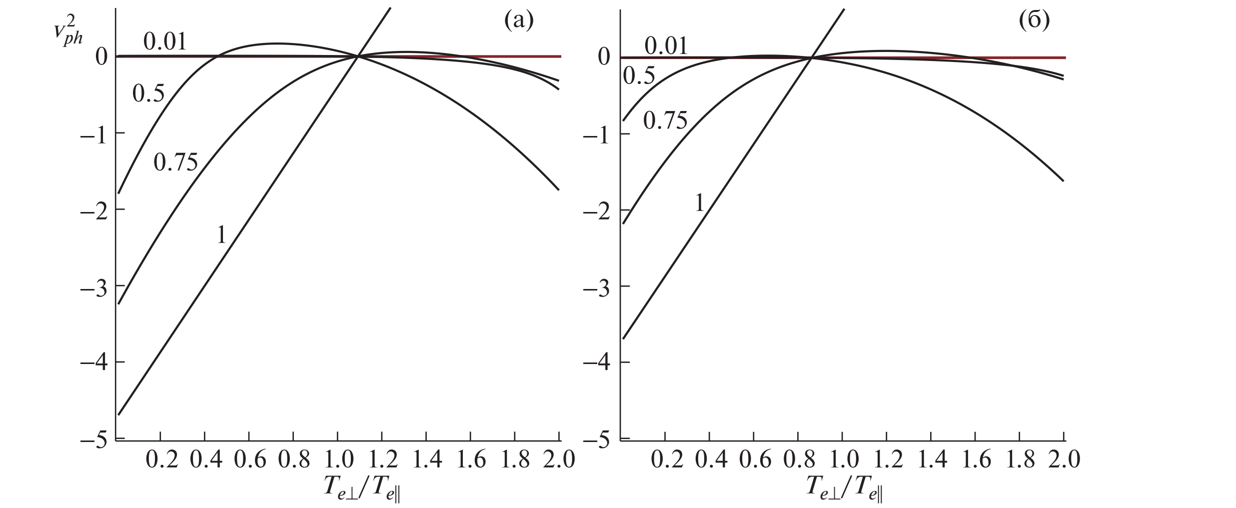

Рис. 6. Зависимость условий возникновения неустойчивости ($v_{ph}^2 < 0$) неизотермической плазмы ($\psi \neq 1$) от степени анизотропии электронного компонента φ_e. В условиях плазмы медленного солнечного ветра $\psi = 0.48$: (а) случай $\beta_i + \varphi_i < 1$ (выбраны $\beta_i = 0.1$, $\varphi_i = 0.5$; (б) случай $\beta_i + \varphi_i > 1$ (выбраны $\beta_i = 0.1$, $\varphi_i = 1.5$). На кривых указаны значения параметра угла распространения волн $l = \cos^2\theta$.

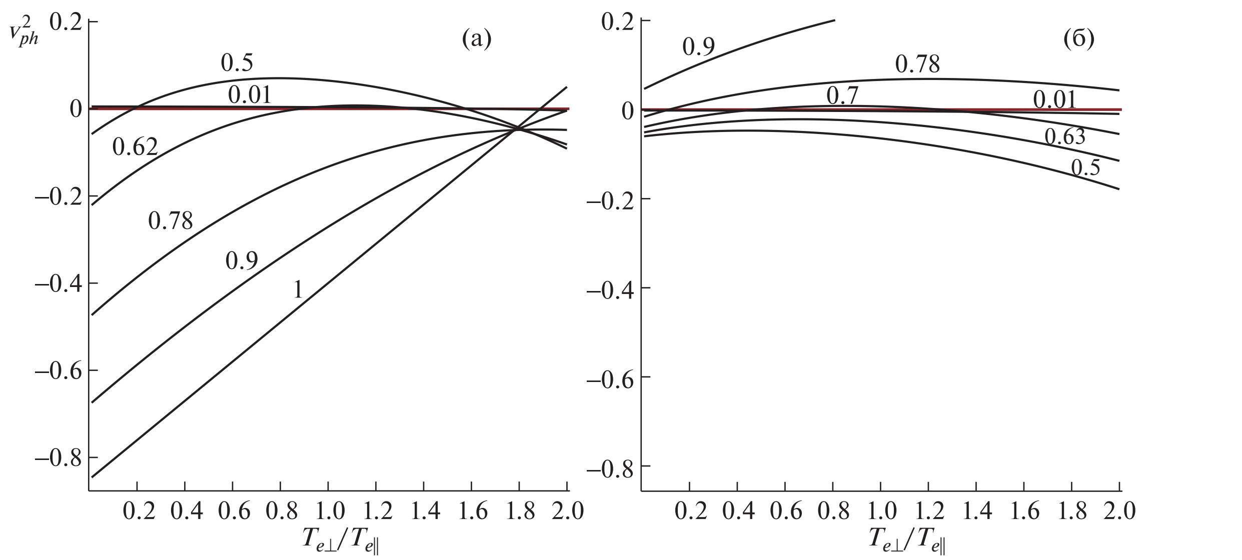

Рис. 7. Зависимость условий возникновения неустойчивости ($v_{ph}^2 < 0$) неизотермической плазмы ($\psi \neq 1$) от степени анизотропии электронного компонента φ_e. В условиях плазмы ускоренного солнечного ветра $\psi = 1.49$: (а) случай $\beta_i + \varphi_i < 1$ (выбраны $\beta_i = 0.1$, $\varphi_i = 0.5$; (б) случай $\beta_i + \varphi_i > 1$ (выбраны $\beta_i = 0.1$, $\varphi_i = 1.5$). На кривых указаны значения параметра угла распространения волн $l = \cos^2\theta$.

большой диапазон значений [11, 12]. Эти параметры отличаются для медленного и быстрого компонентов ветра, так как эти компоненты генерируются в различных физических условиях в атмосфере Солнца. На рис. 6 и 7 приведены примеры влияния этих параметров на условия возникновения неустойчивости. В приведенных примерах доминирующими являются моды с большими l, т. е. вторая шланговая неустойчивость. До узловой точки с ростом φ_e неустойчивость подавляется, а после этой точки наоборот, с ростом φ_e неустойчивость усиливается. Узловая точка определяется условием $b = 0$ в (43). Во всех случаях переход от условия $\varphi_i < 1$ к $\varphi_i > 1$ ослабевает неустойчивость.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В предыдущих теоретических исследованиях МГД-неустойчивостей в анизотропной плазме, в основном как в ЧГЛ-, так и в 16-моментных приближениях роль электронов игнорировалась. Она сводилась только к обеспечению квазинейтральности плазмы. Однако в реальных космических условиях наблюдаемая плазма существенно неизотермична ($T_e \neq T_i$) и анизотропна ($T_\perp \neq T_\parallel$) как для ионных, так и для электронных составляющих. Наша основная цель состояла в выяснении влияния присутствия электронного компонента на условия возникновения известных типов МГД-неустойчивостей в анизотропной плазме. Для этого мы использовали 16-моментные МГД-уравнения переноса с учетом теплового потока в многокомпонентной би-максвелловской плазме. Показано, что учет электронов вводит в задачу новые параметры, связанные с неизотермичностью плазмы, анизотропностью электронного компонента и тепловым потоком за счет электронов. Для простоты, без учета тепловых потоков подробно изучалась роль электронного компонента для возникновения шланговых и зеркальных неустойчивостей. Оказалось, что в реально наблюдаемых областях параметров игнорировать электронную компоненту невозможно. Как критерии возникновения, так и степень неустойчивости существенно зависят от параметров $\psi^2 = T_{i\parallel}/T_{e\parallel}$ и $\varphi_e = T_{e\perp}/T_{e\parallel}$.

В отсутствие теплового потока вдоль магнитного поля мы получили три вида МГД-неустойчивостей: несжимаемая параллельная шланговая, сжимаемая наклонная шланговая и сжимаемая зеркальная неустойчивость. Все неустойчивости имеют апериодичный характер, т. е. реальная часть частоты колебаний равна нулю, $\mathrm{Re}(\omega) = 0$. Это является, прежде всего, следствием игнорирования при выводе МГД-уравнений эффектов затухания Ландау. Кроме того, включение диссипативных эффектов (например, тепловых потоков, эффекты Холла и т. д.) будет стабилизировать неустойчивость, и неустойчивость станет колебательной. Главным недостатком полученных МГД-инкрементов неустойчивостей состоит в том, что эти инкременты являются линейными функциями волнового числа, $\mathrm{Im}(\omega) \sim k$. Это означает, что при очень малых масштабах ($k \to \infty$) получаются слишком большие инкременты неустойчивостей. Причина состоит в том, что используемые 16-моментные МГД-уравнения переноса справедливы при нулевом ларморовском радиусе.

Свойства рассматриваемых шланговых и зеркальных неустойчивостей хорошо известны из низкочастотной кинетической физики [13–16]. Влияние эффектов, связанных с конечностью ларморовского радиуса на пороги и инкременты кинетических неустойчивостей, а также их стабилизация широко обсуждается в литературе (см., например, [6, 17, 18]). Для длин волн порядка ионного ларморовского радиуса эффективная эластичность магнитных силовых линий существенно нарастает, что приводит к максимуму инкремента и к увеличению порога зеркальной неустойчивости [17]. При меньших длинах волны эффективное электрическое поле, действующее на ионы, уменьшается (из-за усреднения в результате ларморовского вращения). Это приводит к уменьшению инкремента в стороны коротких волн. В исследуемых случаях в основном предполагалось, что электроны изотропны и холодные. В более общем случае, когда электроны би-максвелловской плазмы не холодные и являются анизотропными, условия возникновения зеркальной неустойчивости существенно модифицируются [15, 19–23]. Было получены, что если электроны изотропны, то максимум инкремента зеркальной неустойчивости меньше, но с появлением анизотропии инкремент увеличивается. Влияние эффектов, связанных с конечностью ларморовского радиуса в присутствии анизотропных электронов рассматривались в работах [7, 24]. Получено, что эффекты ограничения развития неустойчивости конечностью ларморовских радиусов электронов и ионов существенно зависят от степени анизотропии температуры электронов.

Влияние конечности ларморовского радиуса на шланговую неустойчивость изучалось многими авторами (например, [6, 25–30]). Основной результат заключается в том, что при малых масштабах колебаний неустойчивость ограничивается.

Учет эффектов конечности ларморовского радиуса и диссипативных эффектов в жидкостном описании замагниченной бесстолкновительной плазмы очень сложно. В простейшем случае, когда тепловые потоки вдоль магнитного поля не учитываются, и выполняются двойные адиабаты (ЧГЛ-уравнения), такая попытка для шланговых мод сделана в работе [31]. В этой работе стабилизация шланговой неустойчивости при коротких волнах достигается включением холловского затухания и учетом конечности ионного ларморовского радиуса. Исследование неустойчивости бесстолкновительной замагниченной плазмы в жидкостном описании в более общем случае, когда учитываются тепловые потоки, конечный ларморовский радиус [32] и слабые столкновения между частицами [33] является слишком громоздкой, но важной задачей.

Полученные результаты могут быть использованы для интерпретации наблюдаемой низкочастотной крупномасштабной турбулентности в плазме солнечного и звездных ветров.

Авторы выражают благодарность рецензенту за полезные замечания и рекомендации, которые были учтены при доработке рукописи. Данная работа выполнена при финансовой поддержке Фонда развития науки при Президенте Азербайджанской Республики – Гранты № EIF-KETPL-2-2015-1(25)-56/11/1 и EIF-BGM-4-RFTF-1/2017-21/06/1 (совместный Российско-Азербайджанский грант).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Коэффициенты общего дисперсионного уравнения (29)

$$U_{12}x^{12}+U_{10}x^{10}+U_8x^8+U_6x^6+U_4x^4+ \\ +U_2x^2+U_0+\gamma_\alpha\left[U_9x^9+U_7x^7+ \\ +U_5x^5+U_3x^3+U_1x\right]=0$$

определяются следующим образом:

$$U_{12}=\psi^8 l,\quad U_{10}=\psi^8 l\varphi_i-4\psi^6 l\kappa^2-6\psi^8 l- \\ -\psi^8\beta_i-2\psi^8\varphi_i+\psi^6 l\varphi_e-2\psi^6 l-2\psi^6\varphi_e, \tag{П1}$$

$$\gamma_\alpha U_9=-4\psi^8\gamma_i l-4\psi^5\gamma_e l\kappa,$$

$$U_8=2\psi^8 l\varphi_i^2-4\psi^6 l\varphi_i\kappa^2-7\psi^8 l\varphi_i-2\psi^8\varphi_i^2+ \\ +3\psi^4 l\kappa^4+24\psi^6 l\kappa^2+\psi^4 l\varphi_e^2\kappa^2+4\psi^6\beta_i\kappa^2+ \\ +8\psi^6\varphi_i\kappa^2+2\psi^8 l+2\psi^6 l\varphi_e\varphi_i+7\psi^8\beta_i+ \\ +14\psi^8\varphi_i-4\psi^4 l\varphi_e\kappa^2-\psi^4\varphi_e^2\kappa^2-7\psi^6 l\varphi_e- \\ -3\psi^6 l\varphi_i-2\psi^6\varphi_e\varphi_i+2\psi^4 l\kappa^2+8\psi^4\varphi_e\kappa^2+ \\ +2\psi^6 l+\psi^4 l\varphi_e^2+3\psi^6\beta_i+14\psi^6\varphi_e+6\psi^6\varphi_i- \\ -3\psi^4 l\varphi_e-\psi^4\varphi_e^2-3\psi^4 l+6\psi^4\varphi_e, \tag{П2}$$

$$\gamma_\alpha U_7=-4\psi^5\gamma_e l\varphi_i\kappa-4\psi^5\gamma_e\varphi_e\varphi_i\kappa+4\psi^3\gamma_e l\varphi_e^2\kappa- \\ -4\psi^3\gamma_e l\varphi_e\kappa+\psi^6\gamma_i l\varphi_e\varphi_i-4\psi^6\gamma_i l\varphi_e- \\ -4\psi^6\gamma_i\varphi_e\varphi_i-4\psi^8\gamma_i l\varphi_i+4\psi^8\gamma_i l\varphi_i^2+4\psi^8\beta_i\gamma_i- \\ -4\psi^6\gamma_i l+8\psi^6\gamma_i\varphi_e+8\psi^8\gamma_i\varphi_i-4\psi^8\gamma_i\varphi_i^2- \\ -4\psi^3\gamma_e\varphi_e^2\kappa-4\psi^3\gamma_e l\kappa+8\psi^3\gamma_e\varphi_e\kappa+12\psi^5\gamma_e l\kappa+ \\ +8\psi^5\gamma_e\varphi_i\kappa+16\psi^6\gamma_i l\kappa^2+4\psi^5\beta_i\gamma_e\kappa+ \\ +4\psi^3\gamma_e l\kappa^3+4\psi^5\gamma_e l\varphi_e\varphi_i\kappa, \tag{П3}$$

$$U_6=-8\psi^5\gamma_e\gamma_i\varphi_e\varphi_i\kappa+7\psi^2\varphi_e^2\kappa^2+6\psi^2 l\kappa^2- \\ -12\psi^2\varphi_e\kappa^2-3\psi^6 l\varphi_i^2-4\psi^8\gamma_i{}^2\varphi_i^2-6\psi^4\beta_i\kappa^2+ \\ +8\psi^6\varphi_i^2\kappa^2-12\psi^4\varphi_i\kappa^2+3\psi^4 l\varphi_i\kappa^4-3\psi^2 l\varphi_e^2\kappa^4+ \\ +3\psi^2 l\varphi_e\kappa^4+9\psi^6 l\varphi_e+9\psi^8 l\varphi_i-8\psi^6 l\kappa^2+ \\ +8\psi^6\varphi_e\varphi_i+12\psi^6 l\varphi_i+12\psi^4 l\varphi_e-4\psi^4 l\varphi_e^2- \\ -10\psi^8 l\varphi_i^2+7\psi^4\varphi_e^2\kappa^2-28\psi^6\beta_i\kappa^2-56\psi^6\varphi_i\kappa^2- \\ -56\psi^4\varphi_e\kappa^2+10\psi^4 l\kappa^2+12\psi^4 l+3\psi^6\varphi_i^2- \\ -24\psi^4\varphi_e+10\psi^8\varphi_i^2-12\psi^6\beta_i+4\psi^4\varphi_e^2- \\ -24\psi^6\varphi_i+12\psi^6 l-18\psi^8\varphi_i-9\psi^8\beta_i-18\psi^6\varphi_e+ \\ +6\psi^8 l+4\psi^8\gamma_i^2 l\varphi_i^2-4\psi^2\gamma_e^2\varphi_e^2\kappa^2+6\psi^2 l\varphi_e\kappa^2+ \\ +6\psi^4 l\varphi_i\kappa^2+8\psi^4\varphi_e\varphi_i\kappa^2-7\psi^2 l\varphi_e^2\kappa^2- \\ -8\psi^6 l\varphi_i^2\kappa^2-8\psi^6 l\varphi_e\varphi_i+28\psi^4 l\varphi_e\kappa^2- \\ -7\psi^4 l\varphi_e^2\kappa^2+28\psi^6 l\varphi_i\kappa^2-8\psi^4 l\varphi_e\varphi_i\kappa^2+ \\ +4\psi^2\gamma_e^2 l\varphi_e^2\kappa^2-3\psi^4\beta_i\kappa^4+3\psi^2\varphi_e^2\kappa^4- \\ -18\psi^4 l\kappa^4-6\psi^4\varphi_i\kappa^4-6\psi^2\varphi_e\kappa^4+ \\ +8\psi^5\gamma_e\gamma_i l\varphi_e\varphi_i\kappa, \tag{П4}$$

$$\gamma_\alpha U_5=-16\psi^5\gamma_e l\varphi_e\varphi_i\kappa-8\psi^3\gamma_e l\varphi_e\varphi_i\kappa^3- \\ -16\psi^4\gamma_i l\varphi_e\varphi_i\kappa^2+4\psi^8\gamma_i l-4\psi^8\beta_i\gamma_i+4\psi^6\gamma_i l- \\ -8\psi^6\gamma_i\varphi_e-8\psi^8\gamma_i\varphi_i+12\psi^8\gamma_i\varphi_i^2+4\psi\gamma_e l\kappa^3- \\ -8\psi\gamma_e\varphi_e\kappa^3-32\psi^4\gamma_i\varphi_e\kappa^2+16\psi^4\gamma_i l\kappa^2+ \\ +16\psi^6\gamma_i\varphi_i^2\kappa^2-32\psi^6\gamma_i\varphi_i\kappa^2-4\psi^3\beta_i\gamma_e\kappa^3+ \\ +4\psi^4\gamma_i\varphi_e^2\kappa^2+4\psi^5\gamma_e\varphi_i^2\kappa-16\psi^6\beta_i\gamma_i\kappa^2- \\ -8\psi^3\gamma_e\varphi_i\kappa^3-12\psi^4\gamma_i l\kappa^4+12\psi\gamma_e\varphi_e^2\kappa^3+ \\ +4\psi^6\gamma_i l\varphi_e+8\psi^6\gamma_i\varphi_e\varphi_i+4\psi^8\gamma_i l\varphi_i- \\ -12\psi^8\gamma_i l\varphi_i^2+16\psi^3\gamma_e\varphi_e^2\kappa+16\psi^3\gamma_e l\kappa- \\ -32\psi^3\gamma_e\varphi_e\kappa-32\psi^5\gamma_e\varphi_i\kappa- \\ -16\psi^5\beta_i\gamma_e\kappa-12\psi^3\gamma_e l\kappa^3+ \\ +4\psi^5\gamma_e l\kappa+16\psi^6\gamma_i l\varphi_i\kappa^2-16\psi^6\gamma_i l\varphi_i^2\kappa^2- \\ -4\psi^4\gamma_i l\varphi_e^2\kappa^2+4\psi^3\gamma_e l\varphi_i\kappa^3+8\psi^3\gamma_e\varphi_e\varphi_i\kappa^3+ \\ +16\psi^4\gamma_i l\varphi_e\kappa^2+16\psi^4\gamma_i\varphi_e\varphi_i\kappa^2+4\psi\gamma_e l\varphi_e\kappa^3- \\ -12\psi\gamma_e l\varphi_e^2\kappa^3+16\psi^5\gamma_e l\varphi_i\kappa+16\psi^5\gamma_e\varphi_e\varphi_i\kappa- \\ -16\psi^3\gamma_e l\varphi_e^2\kappa+16\psi^3\gamma_e l\varphi_e\kappa- \\ -8\psi^6\gamma_i l\varphi_e\varphi_i-4\psi^5\gamma_e l\varphi_i^2\kappa, \tag{П5}$$

$$U_4=-6\psi^4\varphi_i^2\kappa^2+16\psi^5\gamma_e\gamma_i\varphi_e\varphi_i\kappa+ \\ +16\psi^3\gamma_e\gamma_i\varphi_e\varphi_i\kappa^3-28\psi^2\varphi_e^2\kappa^2-24\psi^2 l\kappa^2+ \\ +48\psi^2\varphi_e\kappa^2+9\psi^6 l\varphi_i^2+24\psi^4\beta_i\kappa^2-$$

$$
\begin{aligned}
&- 40\psi^6\varphi_i^2\kappa^2 + 48\psi^4\varphi_i\kappa^2 - 21\psi^4 l\varphi_i\kappa^4 + \\
&+ 21\psi^2 l\varphi_e^2\kappa^4 - 21\psi^2 l\varphi_e\kappa^4 - 3\psi^2 l\varphi_i\kappa^4 - \\
&- 3\psi^6 l\varphi_e - 3\psi^8 l\varphi_i - 24\psi^6 l\kappa^2 - 6\psi^6\varphi_e\varphi_i - \\
&- 9\psi^6 l\varphi_i - 9\psi^4 l\varphi_e + 3\psi^4 l\varphi_e^2 + 6\psi^8 l\varphi_i^2 - \\
&- 9\psi^4\varphi_e^2\kappa^2 + 36\psi^6\beta_i\kappa^2 + 72\psi^6\varphi_i\kappa^2 + \\
&+ 72\psi^4\varphi_e\kappa^2 - 42\psi^4 l\kappa^2 + 6\psi^4 l\varphi_i^2\kappa^4 - \\
&- 6\psi^2\varphi_e\varphi_i\kappa^4 - 9\psi^4 l + 6\psi^2 l\varphi_e\varphi_i\kappa^4 - 9\psi^6\varphi_i^2 + \\
&+ 18\psi^4\varphi_e - 6\psi^8\varphi_i^2 + 9\psi^6\beta_i - 3\psi^4\varphi_e^2 + 18\psi^6\varphi_i - \qquad (\text{П6}) \\
&- 12\psi^6 l + 6\psi^8\varphi_i + 3\psi^8\beta_i + 6\psi^6\varphi_e - 3\psi^8 l + \\
&+ 6\psi^4 l\varphi_i^2\kappa^2 + 16\psi^6\gamma_i^2\varphi_i^2\kappa^2 + 16\psi^2\gamma_e^2\varphi_e^2\kappa^2 - \\
&- 24\psi^2 l\varphi_e\kappa^2 - 24\psi^4 l\varphi_i\kappa^2 - 32\psi^4\varphi_e\varphi_i\kappa^2 + \\
&+ 28\psi^2 l\varphi_e^2\kappa^2 + 40\psi^6 l\varphi_i^2\kappa^2 + 6\psi^6 l\varphi_e\varphi_i - \\
&- 36\psi^4 l\varphi_e\kappa^2 + 9\psi^4 l\varphi_e^2\kappa^2 - 36\psi^6 l\varphi_i\kappa^2 - \\
&- 16\psi^6\gamma_i^2 l\varphi_i^2\kappa^2 + 32\psi^4 l\varphi_e\varphi_i\kappa^2 - 16\psi^2\gamma_e^2 l\varphi_e^2\kappa^2 + \\
&+ 6l\varphi_e^2\kappa^4 - 3l\varphi_e\kappa^4 + 21\psi^4\beta_i\kappa^4 - 21\psi^2\varphi_e^2\kappa^4 + \\
&+ 6\psi^4 l\kappa^4 + 42\psi^4\varphi_i\kappa^4 + 42\psi^2\varphi_e\kappa^4 - 12l\psi^2\kappa^4 + \\
&+ 6\varphi_i\psi^2\kappa^4 + 3\beta_i\psi^2\kappa^4 - 6\psi^4\varphi_i^2\kappa^4 - 6\varphi_e^2\kappa^4 - 3l\kappa^4 + \\
&+ 6\varphi_e\kappa^4 - 16\psi^5\gamma_e\gamma_i l\varphi_e\varphi_i\kappa - 16\psi^3\gamma_e\gamma_i l\varphi_e\varphi_i\kappa^3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_\alpha U_3 &= 12\psi^4\gamma_i l\varphi_i^2\kappa^4 + 48\psi^6\gamma_i l\varphi_i^2\kappa^2 - \\
&- 12\psi^4\gamma_i l\varphi_i\kappa^4 - 12\psi^4\gamma_i\varphi_i^2\kappa^4 - 16\psi^6\gamma_i l\varphi_i\kappa^2 - \\
&- 48\psi^6\gamma_i\varphi_i^2\kappa^2 + 12\psi^2\gamma_i l\varphi_e^2\kappa^4 + 12\psi^2\gamma_i l\varphi_e\varphi_i\kappa^4 + \\
&+ 12\psi^4\beta_i\gamma_i\kappa^4 + 24\psi^4\gamma_i\varphi_i\kappa^4 + 32\psi^3\gamma_e l\varphi_e\varphi_i\kappa^3 + \\
&+ 4\psi^3\gamma_e l\varphi_i^2\kappa^3 - 16\psi^6\gamma_i l\kappa^2 + 4\psi^4\gamma_i l\varphi_e^2\kappa^2 + \\
&+ 32\psi^4\gamma_i l\varphi_e\varphi_i\kappa^2 + 16\psi^6\beta_i\gamma_i\kappa^2 + 32\psi^6\gamma_i\varphi_i\kappa^2 + \\
&+ 12\psi^5\gamma_e l\varphi_e\varphi_i\kappa + 12\psi^5\gamma_e l\varphi_i^2\kappa - 12\psi^2\gamma_i l\varphi_e\kappa^4 - \\
&- 12\psi^2\gamma_i\varphi_e^2\kappa^4 - 12\psi^2\gamma_i\varphi_e\varphi_i\kappa^4 - 16\psi^3\gamma_e l\varphi_i\kappa^3 - \\
&- 32\psi^3\gamma_e\varphi_e\varphi_i\kappa^3 - 4\psi^3\gamma_e\varphi_i^2\kappa^3 - 16\psi^4\gamma_i l\varphi_e\kappa^2 - \qquad (\text{П7}) \\
&- 4\psi^4\gamma_i\varphi_e^2\kappa^2 - 32\psi^4\gamma_i\varphi_e\varphi_i\kappa^2 - 12\psi^5\gamma_e l\varphi_i\kappa - \\
&- 12\psi^5\gamma_e\varphi_e\varphi_i\kappa - 12\psi^5\gamma_e\varphi_i^2\kappa - 12\psi^2\gamma_i l\kappa^4 + \\
&+ 24\psi^2\gamma_i\varphi_e\kappa^4 - 4\psi^3\gamma_e l\kappa^3 + 48\psi\gamma_e l\varphi_e^2\kappa^3 + \\
&+ 16\psi^3\beta_i\gamma_e\kappa^3 + 32\psi^3\gamma_e\varphi_i\kappa^3 - 16\psi^4\gamma_i l\kappa^2 + \\
&+ 32\psi^4\gamma_i\varphi_e\kappa^2 - 12\psi^5\gamma_e l\kappa + 12\psi^3\gamma_e l\varphi_e^2\kappa + \\
&+ 12\psi^5\beta_i\gamma_e\kappa + 24\psi^5\gamma_e\varphi_i\kappa - 16\psi\gamma_e l\varphi_e\kappa^3 - \\
&- 48\psi\gamma_e\varphi_e^2\kappa^3 - 12\psi^3\gamma_e l\varphi_e\kappa - 12\psi^3\gamma_e\varphi_e^2\kappa - \\
&- 16\psi\gamma_e l\kappa^3 + 32\psi\gamma_e\varphi_e\kappa^3 - 12\psi^3\gamma_e l\kappa + 24\psi^3\gamma_e\varphi_e\kappa,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U_2 &= 12\psi^4\gamma_i^2 l\varphi_i^2\kappa^4 - 12\psi^4\gamma_i^2\varphi_i^2\kappa^4 - 30\psi^4 l\varphi_i^2\kappa^4 + \\
&+ 24\psi^3\gamma_e\gamma_i l\varphi_e\varphi_i\kappa^3 - 24\psi^6 l\varphi_i^2\kappa^2 + 27\psi^4 l\varphi_i\kappa^4 + \\
&+ 30\psi^4\varphi_i^2\kappa^4 - 24\psi^3\gamma_e\gamma_i\varphi_e\varphi_i\kappa^3 + 12\psi^6 l\varphi_i\kappa^2 + \\
&+ 24\psi^6\varphi_i^2\kappa^2 + 18\psi^4 l\kappa^4 - 27\psi^2 l\varphi_e^2\kappa^4 - \\
&- 24\psi^2 l\varphi_e\varphi_i\kappa^4 - 3\psi^2 l\varphi_i^2\kappa^4 - 27\psi^4\beta_i\kappa^4 - \\
&- 54\psi^4\varphi_i\kappa^4 + 12\psi^6 l\kappa^2 - 3\psi^4 l\varphi_e^2\kappa^2 - \\
&- 24\psi^4 l\varphi_e\varphi_i\kappa^2 - 18\psi^4 l\varphi_i^2\kappa^2 + 12\psi^2\gamma_e^2 l\varphi_e^2\kappa^2 - \\
&- 12\psi^6\beta_i\kappa^2 - 24\psi^6\varphi_i\kappa^2 + 27\psi^2 l\varphi_e\kappa^4 + \\
&+ 12\psi^2 l\varphi_i\kappa^4 + 27\psi^2\varphi_e^2\kappa^4 + 24\psi^2\varphi_e\varphi_i\kappa^4 + \qquad (\text{П8}) \\
&+ 3\psi^2\varphi_i^2\kappa^4 + 12\psi^4 l\varphi_e\kappa^2 + 18\psi^4 l\varphi_i\kappa^2 + \\
&+ 3\psi^4\varphi_e^2\kappa^2 + 24\psi^4\varphi_e\varphi_i\kappa^2 + 18\psi^4\varphi_i^2\kappa^2 - \\
&- 12\psi^2\gamma_e^2\varphi_e^2\kappa^2 + 30l\psi^2\kappa^4 - 24l\varphi_e^2\kappa^4 - \\
&- 12\beta_i\psi^2\kappa^4 - 54\psi^2\varphi_e\kappa^4 - 24\varphi_i\psi^2\kappa^4 + \\
&+ 30\psi^4 l\kappa^2 - 21\psi^2 l\varphi_e^2\kappa^2 - 18\psi^4\beta_i\kappa^2 - \\
&- 24\psi^4\varphi_e\kappa^2 - 36\psi^4\varphi_i\kappa^2 + 12l\varphi_e\kappa^4 + 24\varphi_e^2\kappa^4 + \\
&+ 18\psi^2 l\varphi_e\kappa^2 + 21\psi^2\varphi_e^2\kappa^2 + 12l\kappa^4 - 24\varphi_e\kappa^4 + \\
&+ 18\psi^2 l\kappa^2 - 36\psi^2\varphi_e\kappa^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_\alpha U_1 &= -36\psi^4\gamma_i l\varphi_i^2\kappa^4 + 12\psi^4\gamma_i l\varphi_i\kappa^4 + \\
&+ 36\psi^4\gamma_i\varphi_i^2\kappa^4 + 12\psi^4\gamma_i l\kappa^4 - 12\psi^2\gamma_i l\varphi_e^2\kappa^4 - \\
&- 24\psi^2\gamma_i l\varphi_e\varphi_i\kappa^4 - 12\psi^4\beta_i\gamma_i\kappa^4 - 24\psi^4\gamma_i\varphi_i\kappa^4 - \\
&- 24\psi^3\gamma_e l\varphi_e\varphi_i\kappa^3 - 12\psi^3\gamma_e l\varphi_i^2\kappa^3 + 12\psi^2\gamma_i l\varphi_e\kappa^4 + \\
&+ 12\psi^2\gamma_i\varphi_e^2\kappa^4 + 24\psi^2\gamma_i\varphi_e\varphi_i\kappa^4 + 12\psi^3\gamma_e l\varphi_i\kappa^3 + \qquad (\text{П9}) \\
&+ 24\psi^3\gamma_e\varphi_e\varphi_i\kappa^3 + 12\psi^3\gamma_e\varphi_i^2\kappa^3 + 12\psi^2\gamma_i l\kappa^4 - \\
&- 24\psi^2\gamma_i\varphi_e\kappa^4 + 12\psi^3\gamma_e l\kappa^3 - 36\psi\gamma_e l\varphi_e^2\kappa^3 - \\
&- 12\psi^3\beta_i\gamma_e\kappa^3 - 24\psi^3\gamma_e\varphi_i\kappa^3 + 12\psi\gamma_e l\varphi_e\kappa^3 + \\
&+ 36\psi\gamma_e\varphi_e^2\kappa^3 + 12\psi\gamma_e l\kappa^3 - 24\psi\gamma_e\varphi_e\kappa^3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U_0 &= 18\psi^4 l\varphi_i^2\kappa^4 - 9\psi^4 l\varphi_i\kappa^4 - 18\psi^4\varphi_i^2\kappa^4 - \\
&- 9\psi^4 l\kappa^4 + 9\psi^2 l\varphi_e^2\kappa^4 + 18\psi^2 l\varphi_e\varphi_i\kappa^4 + \\
&+ 9\psi^2 l\varphi_i^2\kappa^4 + 9\psi^4\beta_i\kappa^4 + 18\psi^4\varphi_i\kappa^4 - 9\psi^2 l\varphi_e\kappa^4 - \\
&- 9\psi^2 l\varphi_i\kappa^4 - 9\psi^2\varphi_e^2\kappa^4 - 18\psi^2\varphi_e\varphi_i\kappa^4 - \qquad (\text{П10}) \\
&- 9\psi^2\varphi_i^2\kappa^4 - 18l\psi^2\kappa^4 + 18l\varphi_e^2\kappa^4 + 9\beta_i\psi^2\kappa^4 + \\
&+ 18\psi^2\varphi_e\kappa^4 + 18\varphi_i\psi^2\kappa^4 - 9l\varphi_e\kappa^4 - \\
&- 18\varphi_e^2\kappa^4 - 9l\kappa^4 + 18\varphi_e\kappa^4.
\end{aligned}
$$

Дисперсионное уравнение для однокомпонентной ионной плазмы (30) получается из этого уравнения при $\psi \to \infty$:

$$C_8x^8 + C_6x^6 + C_4x^4 + C_2x^2 + C_0 + \\ + \gamma_i[C_5x^5 + C_3x^3 + C_1x] = 0 \quad (\Pi 11)$$

$$C_8 = l, \quad C_6 = \varphi_i l - 2\varphi_i - \beta_i - 6l, \quad \gamma_i C_5 = -4\gamma_i l,$$

$$C_4 = 2\varphi_i^2 l - 2\varphi_i^2 - 7\varphi_i l + 14\varphi_i + 7\beta_i + 2l,$$

$$\gamma_i C_3 = 4\gamma_i\varphi_i^2 l - 4\gamma_i\varphi_i^2 - 4\gamma_i\varphi_i l + 8\gamma_i\varphi_i + 4\gamma_i\beta_i,$$

$$C_2 = 4\gamma_i{}^2\varphi_i^2 l - 4\gamma_i{}^2\varphi_i^2 - 10\varphi_i^2 l + 10\varphi_i^2 + \\ + 9\varphi_i l - 18\varphi_i - 9\beta_i + 6l,$$

$$\gamma_i C_1 = -12\gamma_i\varphi_i^2 l + 12\gamma_i\varphi_i^2 + 4\gamma_i\varphi_i l - \\ - 8\gamma_i\varphi_i - 4\gamma_i\beta_i + 4\gamma_i l,$$

$$C_0 = 6\varphi_i^2 l - 6\varphi_i^2 - 3\varphi_i l + 6\varphi_i + 3\beta_i - 3l.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chew G.F., Goldberger M.L., Low F.E.* // Proc. Roy. Soc. London. 1956. V. A236. P. 112.
2. *Oraevskii V.N., Konikov Y.V., Chazanov G.V.* Transport processes in anisotropic near-Earth plasma. M.: Nauka, 1985.
3. *Ramos J.J.* // Physics of Plasmas. 2003. V. 10. P. 3601.
4. *Dzhalilov N.S., Kuznetsov V.D., Staude J.* // Contrib. Plasma Phys. 2011. V. 51. P. 621.
5. *Dzhalilov N.S., Kuznetsov V.D.* // Plasma Phys. Rep. 2013. V. 39. P. 1026.
6. *Hall A.N.* // J. Plasma Phys. 1979. V. 21. P. 431.
7. *Kuznetsov E.A., Passot T., Sulem P.L.* // Phys. Plasmas. 2012. V. 19. P. 090701.
8. *Kuznetsov V.D., Dzhalilov N.S.* // Geomagnetism Aeronomy. 2014. V. 54. P. 886.
9. *Dzhalilov N.S., Kuznetsov V.D., Staude J.* // Astron. Astrophys. 2008. V. 489. P. 769.
10. *Dzhalilov N.S., Huseynov S.Sh.* // Azarbaijan Astronomical J. 2016. N. 1. P. 1.
11. *Travnicek P., Stverak S., Maksimovic M.* // J. Geophys. Res. 2008. V. 113. P. A03103.
12. *Hellinger P., Travnicek P., Kasper J.C.* // Geophys. Res. Lett. 2006. V. 33. P. L09101.
13. *Rudakov L.I., Sagdeev R.Z.* // Plasma Physics and the Problem of Controlled Thermonuclear Reactions. V. 3. N. Y.: Pergamon, 1958. P. 321.
14. *Chandrasekhar S.A., Kaufman A.N., Watson K.M.* // Proc. R. Soc. London. 1958. Ser. A. V. 245. P. 435.
15. *Stix T.H.* The Theory of Plasma Waves. N. Y.: McGraw-Hill, 1962.
16. *Barnes A.* // Phys. Fluids. 1966. V. 9. P. 1483.
17. *Pokhotelov O.A., Sagdeev R.Z., Balikhin M.A., Treumann R.A.* // J. Geophys. Res. 2004. V. 109. P. A09213.
18. *Califano C., Hellinger P., Kuznetsov E., Passot T., Sulem P. L., Tra'vnicek P. M.* // J. Geophys. Res. 2008. V. 113. P. A08219.
19. *Pantellini F.G.E., Schwartz S.J.* // J. Geophys. Res. 1995. V. 100. P. 3539.
20. *Ge'not V., Schwartz S.J., Mazelle C., Balikhin M., Dunlop M., Bauer T.M.* // J. Geophys. Res. 2001. V. 106. P. 21611.
21. *Pokhotelov O.A., Balikhin M.A., Alleyne H. St-C.K., Onishchenko O.G.* // J. Geophys. Res. 2000. V. 105. P. 2393.
22. *Gary S.P., Karimabadi H.* // J. Geophys. Res. 2006. V. 111. P. A11224.
23. *Hellinger P.* // Phys. Plasmas. 2007. V. 14. P. 082105.
24. *Istomin Y.N., Pokhotelov O.A., Balikhin M.A.* // Phys. Plasmas. 2009. V. 16. P. 122901.
25. *Davidson R.C., Völk H.J.* // Phys. Fluids. 1968. V. 11. P. 2259.
26. *Achterberg A.* // Monthly Notices Roy. Soc. 2013. V. 436. P. 705.
27. *Hollweg J.V., Völk H.J.* // J. Geophys. Res. 1970. V. 75. P. 5297.
28. *Gary S.P., Madland C.D.* // J. Geophys. Res. 1985. V. 90. P. 7607.
29. *Yoon P.H., Wu C.S., de Assis A.S.* // Phys. Fluids B. 1993. V. 5. P. 1971.
30. *Li X., Habbal S.R.* // J. Geophys. Res. 2000. V. A105. P. 27377.
31. *Hunana P., Zank G. P.* // Astrophys. J. 2017. V. 839. P. 13.
32. *Ramos J. J.* // Phys. Plasmas. 2005. V. 12. P. 052102.
33. *Ramos J.J.* // Phys. Plasmas. 2007. V. 14. P. 052506.