

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ
В ПЛАЗМЕ

УДК 533.951

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ПРИ НАКЛОННОМ ПАДЕНИИ
ВОЛНЫ НАКАЧКИ НА ПОЛУОГРАНИЧЕННУЮ ПЛАЗМУ

© 2019 г. Ю. М. Алиев^а, А. А. Фролов^{а,*}

^а Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Москва, Россия

*e-mail: frolov@ihed.ras.ru

Поступила в редакцию 28.12.2018 г.

После доработки 01.02.2019 г.

Принята к публикации 07.02.2019 г.

Рассмотрено параметрическое возбуждение поверхностных волн в полуограниченной плотной плазме при наклонном падении s -поляризованной электромагнитной волны. Вычислены инкременты и пороги неустойчивости, связанной с распадом волны накачки на две поверхностные электромагнитные волны, в зависимости от угла падения и плотности электронов плазмы. Показано, что инкремент неустойчивости линейно зависит от напряженности электрического поля волны накачки и имеет максимальное значение в плазме с плотностью электронов, незначительно превышающей критическое значение.

DOI: 10.1134/S0367292119070011

1. ВВЕДЕНИЕ

Интерес к поверхностным волнам связан как с их необычными физическими свойствами, так и с возможностью их использования для ряда практических приложений [1, 2]. Поверхностные электромагнитные волны (ПЭВ) могут применяться для диагностики поверхности, исследования свойств тонких пленок и границ раздела различных сред, изучения спектров поверхностных возбужденных состояний, передачи сигналов на большие расстояния. В рамках линейной теории дисперсионные свойства поверхностных волн и методы их возбуждения описаны достаточно подробно (см. [1, 2]). В последнее время возбуждение ПЭВ при воздействии на твердотельные мишени интенсивного лазерного излучения, когда важны нелинейные эффекты, наблюдалось в нескольких экспериментах [3–7]. Теория нелинейного возбуждения низкочастотных ПЭВ в плазме и проводящих средах под действием пондеромоторных сил лазерного излучения развита в публикациях [8–10]. Другой нелинейный механизм возбуждения ПЭВ связан с параметрическим воздействием мощного лазерного излучения на плазму и проводящие среды. Впервые теория параметрического возбуждения поверхностных волн при падении высокочастотного электромагнитного излучения на плазму с резкой границей при гидродинамическом описании была построена в [11]. Несколько позднее была развита кинетическая теория возбуждения поверхностных

волн под действием высокочастотной волны накачки [12], что позволило вычислить не только инкремент, но и порог неустойчивости. Параметрический распад волны накачки на две ПЭВ обсуждался в публикации [13]. В отличие от работ [11–13], где рассматривалась плазма с концентрацией электронов, не превышающей критическую величину, в публикации [14] исследовано параметрическое возбуждение ПЭВ при воздействии излучения лазера на слой плотной плазмы. В работе [15] исследована роль плазмона, локализованного в узком приповерхностном слое, в распаде p -поляризованной волны накачки на две ПЭВ. Распад p -поляризованной электромагнитной волны на две ПЭВ рассмотрен в публикации [16], где вычислены инкременты и пороги неустойчивости. Однако следует отметить, что авторы публикации [16] ошибочно пренебрегли нелинейным поверхностным током, так как он дает такой же вклад в инкремент неустойчивости, как и пондеромоторная нелинейность.

Следует отметить, что в публикациях [11–14] раскачка поверхностных волн связана исключительно с учетом движения ионов, что справедливо для достаточно длинных лазерных импульсов. При воздействии фемтосекундных оптических импульсов движение ионов несущественно и рассмотренные ранее в [11–14] неустойчивости не успевают развиться. Поэтому в настоящей работе изучено параметрическое возбуждение ПЭВ, связанное только с движением электронов в элект-

ромагнитном поле. Рассмотрено наклонное падение s -поляризованной электромагнитной волны на полугораниченную плазму сверхкритической концентрации, приводящее к параметрическому возбуждению двух ПЭВ. Статья имеет следующую структуру: во 2 разд. найдено основное состояние и представлены уравнения и граничные условия для возмущений электромагнитного поля ПЭВ при гидродинамическом описании. В 3 разд. получено дисперсионное уравнение и найден инкремент неустойчивости, связанной с распадом волны накачки на две ПЭВ, который оказался пропорциональным первой степени напряженности электрического поля падающей волны. Проанализирована зависимость инкремента распадной неустойчивости от плотности электронов. Показано, что инкремент максимален в плазме с плотностью электронов, незначительно превышающей критическое значение. Исследована зависимость инкремента неустойчивости от угла падения лазерного излучения в околосверхкритической и сверхкритической плазме. В четвертом разделе учтены соударения электронов и вычислен порог неустойчивости. Анализ зависимости порога неустойчивости от плотности электронов плазмы показал, что порог минимален в не очень плотной плазме, когда концентрация электронов близка к критическому значению. В заключение обсуждаются полученные результаты и приводятся оценки для характерных параметров современных лазерно-плазменных экспериментов.

2. ОСНОВНОЕ СОСТОЯНИЕ И УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Рассмотрим возбуждение ПЭВ под действием излучения лазера в полугораниченной плазме, занимающей полупространство $z > 0$. Для этого воспользуемся уравнениями Максвелла для электрического \mathbf{E} и магнитного \mathbf{B} полей и уравнениями бесстолкновительной гидродинамики для скорости \mathbf{v} и плотности n электронов

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} en\mathbf{v}, & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi e(n - N_{0e}), & & \\ \frac{\partial}{\partial t} n + \nabla \cdot (n\mathbf{v}) &= 0, & \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} &= \frac{e}{m_e} \mathbf{E} - \frac{1}{2} \nabla v^2, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где e , m_e – заряд и масса электрона, c – скорость света, N_{0e} – равновесная плотность электронов. Отметим, что уравнение для скорости движения электронов получено при учете равенства $\nabla \times \mathbf{v} + (e/m_e c) \mathbf{B} = 0$, которое соответствует закону сохранения обобщенного вихря в бесстолкновительной плазме (см. [17]).

Пусть s -поляризованная электромагнитная волна с частотой ω_0 и вектором напряженности электрического поля $\mathbf{E}_0 = \mathbf{e}_y E_0$, ориентированным вдоль оси y , падает под углом α из вакуума на границу плотной плазмы, $\omega_0 < \omega_p$, где ω_p – ленгмюровская частота электронов. Электрическое поле волны накачки в вакууме можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{E}_L^{inc}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos \left[\omega_0 t - \frac{\omega_0}{c} (x \sin \alpha + z \cos \alpha) \right]. \quad (2.2)$$

Рассмотрим устойчивость плазмы относительно возбуждения ПЭВ в поле волны (2.2). Для этого представим все физические величины в виде малых отклонений δN , $\delta \mathbf{V}$, $\delta \mathbf{E}$, $\delta \mathbf{B}$ от основного состояния $N_{0e} + N_L$, \mathbf{V}_L , \mathbf{E}_L , \mathbf{B}_L

$$\begin{aligned} n &= N_{0e} + N_L + \delta N, & \mathbf{v} &= \mathbf{V}_L + \delta \mathbf{V}, \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}_L + \delta \mathbf{E}, & \mathbf{B} &= \mathbf{B}_L + \delta \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Тогда для физических величин в основном состоянии имеем из (2.1) следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B}_L &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}_L + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_L, & \nabla \times \mathbf{E}_L &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}_L, \\ \frac{\partial}{\partial t} N_L + \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{j}_L}{e} \right), & \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}_L &= \frac{e}{m_e} \mathbf{E}_L - \frac{1}{2} \nabla V_L^2, \\ \mathbf{j}_L &= e(N_{0e} + N_L) \mathbf{V}_L. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Для малых отклонений от основного состояния справедливы следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \nabla \times \delta \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \delta \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \delta \mathbf{j}, \\ \nabla \times \delta \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \delta \mathbf{B}, & \frac{\partial}{\partial t} \delta N + \nabla \cdot \left(\frac{\delta \mathbf{j}}{e} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \delta \mathbf{V} &= \frac{e}{m_e} \delta \mathbf{E} - \nabla (V_L \delta V), \\ \delta \mathbf{j} &= e[(N_{0e} + N_L) \delta \mathbf{V} + \delta N \mathbf{V}_L]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Так как инкремент неустойчивости оказывается пропорционален первой степени амплитуды падающей волны E_0 , то для основного состояния ограничимся линейным приближением. Тогда в основном состоянии имеем следующие выражения для электрического поля в вакууме и в плазме

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_L &= \frac{1}{2} \mathbf{E}_0 \exp \left(-i\omega_0 t + i \frac{\omega_0}{c} x \sin \alpha \right) \times \\ &\times \left[\exp \left(i \frac{\omega_0}{c} z \cos \alpha \right) + \right. \\ &\left. + R \exp \left(-i \frac{\omega_0}{c} z \cos \alpha \right) \right] + c.c., \quad z < 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{E}_L = \frac{\mathbf{E}_0 \cos \alpha}{\cos \alpha + i(c/\omega_0)\kappa_L} \times \exp\left(-i\omega_0 t + i\frac{\omega_0}{c} x \sin \alpha - \kappa_L z\right) + c.c., \quad z > 0, \quad (2.7)$$

где $R = \frac{\cos \alpha - i(c/\omega_0)\kappa_L}{\cos \alpha + i(c/\omega_0)\kappa_L}$ – коэффициент отражения,

величина $\kappa_L = (\omega_0/c)\sqrt{\sin^2 \alpha - \varepsilon(\omega_0)}$ характеризует глубину проникновения поля в сверхкритическую плазму, $\varepsilon(\omega_0) = 1 - \omega_p^2/\omega_0^2$ – диэлектрическая проницаемость. Скорость электронов в плазме в поле (2.7) в соответствии с уравнениями (2.4) определяется следующим выражением:

$$\mathbf{V}_L^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{V}_1 \exp\left(-i\omega_0 t + i\frac{\omega_0}{c} x \sin \alpha\right) + c.c., \quad z > 0, \quad (2.8)$$

где $\mathbf{V}_1 = \frac{i\mathbf{V}_E \cos \alpha}{\cos \alpha + i(c/\omega_0)\kappa_L} \exp(-\kappa_L z)$, $\mathbf{V}_E = e\mathbf{E}_0/(m_e\omega_0)$.

Рассмотрим теперь малые отклонения от основного состояния (2.7), (2.8), которые описываются уравнениями (2.5). Будем использовать следующее разложение в ряд Фурье для возмущений электромагнитного поля и электрического тока

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\mathbf{E}^{(n)}(z) \exp(-i\omega_n t + i\mathbf{k}_n \mathbf{\rho}), \\ \delta\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\mathbf{B}^{(n)}(z) \exp(-i\omega_n t + i\mathbf{k}_n \mathbf{\rho}), \\ \delta\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\mathbf{j}^{(n)}(z) \exp(-i\omega_n t + i\mathbf{k}_n \mathbf{\rho}), \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $\mathbf{\rho} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$, \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y – базисные векторы декартовой системы координат. Ограничиваясь линейным приближением по амплитуде волны накачки, после несложных вычислений получим следующую систему уравнений для возмущений электромагнитного поля на частоте $\omega_n = \omega + n\omega_0$ с волновым вектором $\mathbf{k}_n = \mathbf{k} + n\mathbf{k}_0$, лежащим в плоскости XOY

$$\delta\mathbf{B}^{(n)} = \frac{c}{\omega_n} \left[(\mathbf{k}_n - i\mathbf{e}_z \nabla_z) \times \delta\mathbf{E}^{(n)} \right], \quad (2.10)$$

$$\left[(\mathbf{k}_n - i\mathbf{e}_z \nabla_z) \times \delta\mathbf{B}^{(n)} \right] = -\frac{\omega_n}{c} \delta\mathbf{E}^{(n)} - \frac{4\pi i}{c} \delta\mathbf{j}^{(n)},$$

где $\mathbf{k}_0 = \mathbf{e}_x (\omega_0/c) \sin \alpha$, а выражение для возмущений электрического тока имеет вид

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{j}^{(n)} &= \frac{i\omega_p^2}{4\pi\omega_n} \delta\mathbf{E}^{(n)} + \delta\mathbf{J}^{(n)}, \\ \delta\mathbf{J}^{(n)} &= \frac{i\omega_p^2}{4\pi\omega_n} (\mathbf{k}_n - i\mathbf{e}_z \nabla_z) \times \\ &\times \left[\frac{\mathbf{V}_1 \delta\mathbf{E}^{(n-1)}}{\omega_{n-1}} + \frac{\mathbf{V}_1^* \delta\mathbf{E}^{(n+1)}}{\omega_{n+1}} \right] + \\ &+ \frac{i\mathbf{V}_1}{4\pi} \left((\mathbf{k}_{n-1} - i\mathbf{e}_z \nabla_z) \frac{\omega_p^2}{\omega_{n-1}^2} \delta\mathbf{E}^{(n-1)} \right) + \\ &+ \frac{i\mathbf{V}_1^*}{4\pi} \left((\mathbf{k}_{n+1} - i\mathbf{e}_z \nabla_z) \frac{\omega_p^2}{\omega_{n+1}^2} \delta\mathbf{E}^{(n+1)} \right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Представим электромагнитное поле и нелинейный ток $\delta\mathbf{J}^{(n)}$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{E}^{(n)} &= \frac{\mathbf{k}_n}{k_n} \delta E_{\parallel}^{(n)} + \mathbf{e}_z \delta E_z^{(n)}, \\ \delta\mathbf{B}^{(n)} &= \left[\mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{k}_n}{k_n} \right] \delta B_{\perp}^{(n)}, \\ \delta\mathbf{J}^{(n)} &= \frac{\mathbf{k}_n}{k_n} \delta J_{\parallel}^{(n)} + \mathbf{e}_z \delta J_z^{(n)}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Тогда из формул (2.10)–(2.12) находим уравнения для компонент возмущений электромагнитного поля

$$\begin{aligned} k_n \delta B_{\perp}^{(n)} &= -\frac{\omega_n}{c} \varepsilon_n \delta E_z^{(n)} - \frac{4\pi i}{c} \delta J_z^{(n)}, \\ i \frac{d}{dz} \delta B_{\perp}^{(n)} &= -\frac{\omega_n}{c} \varepsilon_n \delta E_{\parallel}^{(n)} - \frac{4\pi i}{c} \delta J_{\parallel}^{(n)}, \\ \delta B_{\perp}^{(n)} &= -\frac{c}{\omega_n} \left(k_n \delta E_z^{(n)} + i \frac{d}{dz} \delta E_{\parallel}^{(n)} \right), \end{aligned} \quad (2.13)$$

где $\varepsilon_n = 1 - \omega_p^2/\omega_n^2$, а составляющие нелинейного тока $\delta\mathbf{J}^{(n)}$ определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \delta J_z^{(n)} &= \\ &= \frac{\omega_p^2}{4\pi\omega_n} \frac{d}{dz} \left[\frac{\mathbf{k}_{n-1} \mathbf{V}_1}{k_{n-1}\omega_{n-1}} \delta E_{\parallel}^{(n-1)} + \frac{\mathbf{k}_{n+1} \mathbf{V}_1^*}{k_{n+1}\omega_{n+1}} \delta E_{\parallel}^{(n+1)} \right], \\ \delta J_{\parallel}^{(n)} &= \\ &= \frac{i\omega_p^2 k_n}{4\pi\omega_n} \left[\frac{\mathbf{k}_{n-1} \mathbf{V}_1}{k_{n-1}\omega_{n-1}} \delta E_{\parallel}^{(n-1)} + \frac{\mathbf{k}_{n+1} \mathbf{V}_1^*}{k_{n+1}\omega_{n+1}} \delta E_{\parallel}^{(n+1)} \right] + \\ &+ \frac{i\mathbf{k}_n \mathbf{V}_1}{4\pi k_n} \left\{ \frac{\omega_p^2}{\omega_{n-1}^2} k_{n-1} \delta E_{\parallel}^{(n-1)} - i \frac{d}{dz} \left(\frac{\omega_p^2}{\omega_{n-1}^2} \delta E_z^{(n-1)} \right) \right\} + \\ &+ \frac{i\mathbf{k}_n \mathbf{V}_1^*}{4\pi k_n} \left\{ \frac{\omega_p^2}{\omega_{n+1}^2} k_{n+1} \delta E_{\parallel}^{(n+1)} - i \frac{d}{dz} \left(\frac{\omega_p^2}{\omega_{n+1}^2} \delta E_z^{(n+1)} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где V_1 – амплитуда скорости осциллирующих электронов (2.8). Из системы уравнений (2.13) находим уравнение для возмущений магнитного поля

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\epsilon_n} \frac{d}{dz} \delta B_{\perp}^{(n)} \right) - \frac{\kappa_n^2}{\epsilon_n} \delta B_{\perp}^{(n)} = \\ = \frac{4\pi i k_n}{c \epsilon_n} \delta J_z^{(n)} - \frac{4\pi}{c} \frac{d}{dz} \left(\frac{\delta J_{\parallel}^{(n)}}{\epsilon_n} \right). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Граничные условия получают интегрированием уравнений (2.13), (2.15) по тонкому переходному пограничному слою и имеют вид

$$\begin{aligned} \delta B_{\perp}^{(n)} \Big|_{z=+0} - \delta B_{\perp}^{(n)} \Big|_{z=-0} = -\frac{4\pi}{c} \int_{-0}^{+0} dz \delta J_{\parallel}^{(n)}, \\ \frac{1}{\epsilon_n} \frac{d}{dz} \delta B_{\perp}^{(n)} \Big|_{z=+0} - \frac{1}{\epsilon_n} \frac{d}{dz} \delta B_{\perp}^{(n)} \Big|_{z=-0} = \\ = -\frac{4\pi}{c} \frac{\delta J_{\parallel}^{(n)}}{\epsilon_n} \Big|_{z=+0}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где $\kappa_n = \sqrt{k_n^2 - (\omega_n^2/c^2)\epsilon_n}$, $\epsilon_n = 1 - \omega_p^2/\omega_n^2$ для $n = 1, 2, \dots$ и $\kappa = \sqrt{k^2 - (\omega^2/c^2)\epsilon}$, $\epsilon = 1 - \omega_p^2/\omega^2$ для $n = 0$. Отметим в формуле (2.16) наличие скачка напряженности магнитного поля ПЭВ на границе плазмы, обусловленного возникновением нелинейного поверхностного тока.

3. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ И ИНКРЕМЕНТ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Представим компоненты электромагнитного поля во всем пространстве в следующем виде:

$$\begin{aligned} \delta E_{\parallel}^{(n)} = \theta(z) A_n \exp(-\kappa_n z) + \theta(-z) A_n \exp(\kappa_{n,V} z), \\ \delta B_{\perp}^{(n)} = \theta(z) B_n \exp(-\kappa_n z) + \theta(-z) B_{n,V} \exp(\kappa_{n,V} z), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $\kappa_{n,V} = \sqrt{k_n^2 - \omega_n^2/c^2}$ для $n = 1, 2, \dots$ и $\kappa_V = \sqrt{k^2 - \omega^2/c^2}$ для $n = 0$, $\theta(z)$ – единичная ступенчатая функция Хевисайда, а неопределенные коэффициенты A_n , B_n , $B_{n,V}$ могут быть найдены из граничных условий (2.16). В формулах (3.1) учтено, что тангенциальная компонента электрического поля непрерывна на границе плазмы, а тангенциальная составляющая магнитного поля имеет скачок из-за наличия поверхностного тока (2.14).

Отметим, что в рассматриваемом нами случае полуограниченной плазмы собственными электромагнитными модами являются только поверхностные волны. Именно поэтому ниже нами рассматривается распадная неустойчивость с воз-

буждением двух поверхностных волн с номерами $n = 0, 1$. Из (2.13)–(2.16) с учетом (3.1) находим следующее дисперсионное уравнение:

$$D(\omega, \mathbf{k}) D_1(\omega_1, \mathbf{k}_1) = \frac{\omega_p^2 \omega_p^2}{\omega^2 \omega_1^2} \left| \frac{(\mathbf{k}_1 \mathbf{V}_1) k}{k_1 \omega \kappa} + \frac{(\mathbf{k} \mathbf{V}_1) k_1}{k \omega_1 \kappa_1} \right|^2, \quad (3.2)$$

где функции $D(\omega, \mathbf{k})$, $D_1(\omega_1, \mathbf{k}_1)$ имеют вид

$$D(\omega, \mathbf{k}) = \left(\frac{\epsilon}{\kappa} + \frac{1}{\kappa_V} \right), \quad D_1(\omega_1, \mathbf{k}_1) = \left(\frac{\epsilon_1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_{1,V}} \right) \quad (3.3)$$

и определяют дисперсионные свойства поверхностных волн с соответствующими частотами и волновыми числами. С учетом равенства $|\mathbf{k} \mathbf{V}_1|^2 = |\mathbf{k}_1 \mathbf{V}_1|^2 = (\omega_0^2/\omega_p^2)(\mathbf{k} \mathbf{V}_E)^2 \cos^2 \alpha$ уравнение (3.2) принимает вид

$$\begin{aligned} D(\omega, \mathbf{k}) D_1(\omega_1, \mathbf{k}_1) = \frac{\omega_p^2 \omega_p^2 \omega_0^2}{\omega^2 \omega_1^2 \omega_p^2} (\mathbf{k} \mathbf{V}_E)^2 \times \\ \times \cos^2 \alpha \left(\frac{1}{k_1 \omega \kappa} + \frac{1}{k \omega_1 \kappa_1} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Решим дисперсионное уравнение (3.4), используя соотношения

$$\begin{aligned} D(\omega + i\gamma, k) = D(\omega, k) + i\gamma \frac{\partial}{\partial \omega} D(\omega, k), \\ D_1(\omega_1 + i\gamma, k_1) = D_1(\omega_1, k_1) + i\gamma \frac{\partial}{\partial \omega_1} D_1(\omega_1, k_1). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Из формулы (3.4) при совместном выполнении условий $D(\omega, k) = 0$, $D_1(\omega_1, k_1) = 0$ находим выражение для инкремента неустойчивости

$$\begin{aligned} \gamma^2 = -\frac{\omega_0^2}{\omega_p^2} \frac{(\mathbf{k} \mathbf{V}_E)^2 \cos^2 \alpha}{\frac{\partial}{\partial \omega} D(\omega, k) \frac{\partial}{\partial \omega_1} D_1(\omega_1, k_1)} \times \\ \times \frac{\omega_p^2 \omega_p^2}{\omega^2 \omega_1^2} \left(\frac{1}{k_1 \omega \kappa} + \frac{1}{k \omega_1 \kappa_1} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Для анализа инкремента (3.6) найдем решения дисперсионных уравнений $D(\omega, k) = 0$, $D_1(\omega_1, k_1) = 0$ и вычислим производные $\partial D(\omega, k)/\partial \omega$, $\partial D_1(\omega_1, k_1)/\partial \omega_1$. Решение уравнений $D(\omega, k) = 0$, $D_1(\omega_1, k_1) = 0$ имеет вид

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{|\epsilon|}{|\epsilon| - 1}, \quad k_1^2 = \frac{\omega_1^2}{c^2} \frac{|\epsilon_1|}{|\epsilon_1| - 1}. \quad (3.7)$$

С учетом формул (3.7) выражения для коэффициентов, κ , κ_V , κ_1 , $\kappa_{1,V}$ приводятся к виду

$$\begin{aligned} \kappa_V &= \frac{|\omega|}{c} \frac{1}{\sqrt{|\varepsilon| - 1}}, & \kappa &= \frac{|\omega|}{c} \frac{|\varepsilon|}{\sqrt{|\varepsilon| - 1}}, \\ \kappa_{1,V} &= \frac{|\omega_1|}{c} \frac{1}{\sqrt{|\varepsilon_1| - 1}}, & \kappa_1 &= \frac{|\omega_1|}{c} \frac{|\varepsilon_1|}{\sqrt{|\varepsilon_1| - 1}}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Принимая во внимание формулы (3.8), находим производные от дисперсионных функций

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \omega} D(\omega, k) &= \frac{c\sqrt{|\varepsilon| - 1}(1 + |\varepsilon|)(1 + |\varepsilon|^2)}{\omega|\omega||\varepsilon|^2}, \\ \frac{\partial}{\partial \omega_1} D_1(\omega_1, k_1) &= \frac{c\sqrt{|\varepsilon_1| - 1}(1 + |\varepsilon_1|)(1 + |\varepsilon_1|^2)}{\omega_1|\omega_1||\varepsilon_1|^2}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Подставляя соотношения (3.9) в формулу (3.6), после несложных преобразований получаем

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= -\frac{\omega\omega_1|\omega||\omega_1||\varepsilon||\varepsilon_1|\omega_0^2(\mathbf{kV}_E)^2 \cos^2 \alpha}{\sqrt{|\varepsilon| - 1}\sqrt{|\varepsilon_1| - 1}\omega_p^2(1 + |\varepsilon_1|^2)(1 + |\varepsilon|^2)} \times \\ &\times \left(\frac{\sqrt{|\varepsilon| - 1}}{|\omega|\omega_1} + \frac{\sqrt{|\varepsilon_1| - 1}}{\omega|\omega_1|} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Если ввести обозначение θ для угла между векторами \mathbf{k} и \mathbf{V}_E , $(\mathbf{kV}_E)^2 = k^2 V_E^2 \cos^2 \theta$, где $V_E = |e|E_0/(m_e \omega_0)$, то выражение для инкремента принимает вид

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= \frac{\omega_0^2 V_E^2}{\omega_p^2 c^2} \cos^2 \theta \cos^2 \alpha \times \\ &\times \frac{|\varepsilon||\varepsilon_1|(\sqrt{|\varepsilon| - 1} - \sqrt{|\varepsilon_1| - 1})^2}{\sqrt{|\varepsilon| - 1}\sqrt{|\varepsilon_1| - 1}(1 + |\varepsilon_1|^2)(1 + |\varepsilon|^2)}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

При этом должны выполняться условия для возбуждения ПЭВ (3.7), которые можно представить в следующем виде, полагая $\omega = -\Omega$, $\omega_1 = \omega_0 - \Omega$:

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{\Omega^2 \omega_p^2 - \Omega^2}{c^2 \omega_p^2 - 2\Omega^2}, \\ k_1^2 &= k^2 + k_0^2 + 2kk_0 \sin \theta = \\ &= \frac{(\omega_0 - \Omega)^2 \omega_p^2 - (\omega_0 - \Omega)^2}{c^2 \omega_p^2 - 2(\omega_0 - \Omega)^2}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Подставляя выражение для волнового числа k из первого соотношения в формуле (3.12) во второе получим уравнение для определения частоты Ω

$$\begin{aligned} \frac{\Omega^2 \omega_p^2 - \Omega^2}{\omega_0^2 \omega_p^2 - 2\Omega^2} + \sin^2 \alpha + \\ + 2\frac{\Omega}{\omega_0} \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \Omega^2}{\omega_p^2 - 2\Omega^2}} \sin \theta \sin \alpha = \\ = \frac{(\omega_0 - \Omega)^2 \omega_p^2 - (\omega_0 - \Omega)^2}{\omega_0^2 \omega_p^2 - 2(\omega_0 - \Omega)^2}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Если ввести безразмерный параметр $a^2 = \omega_p^2/\omega_0^2 > 1$ и безразмерную частоту $x = \Omega/\omega_0$, то уравнение (3.13) принимает вид

$$\begin{aligned} x^2 \frac{a^2 - x^2}{a^2 - 2x^2} + \sin^2 \alpha + 2x \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 - 2x^2}} \sin \theta \sin \alpha = \\ = (1 - x)^2 \frac{a^2 - (1 - x)^2}{a^2 - 2(1 - x)^2}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Инкремент неустойчивости (3.11) в безразмерных переменных определяется следующим выражением:

$$\gamma^2(x) = \omega_0^2 \frac{\omega_0^2 V_E^2}{\omega_p^2 c^2} G^2(x), \quad (3.15)$$

где

$$G^2(x) = \frac{x^2(a^2 - x^2) \left(\frac{a^2}{x^2} - 1 \right) \left[\frac{a^2}{(1-x)^2} - 1 \right] \left(\sqrt{\frac{a^2}{x^2} - 2} - \sqrt{\frac{a^2}{(1-x)^2} - 2} \right)^2 \cos^2 \theta \cos^2 \alpha}{a^2 - 2x^2 \sqrt{\frac{a^2}{x^2} - 2} \sqrt{\frac{a^2}{(1-x)^2} - 2} \left\{ 1 + \left(\frac{a^2}{x^2} - 1 \right)^2 \right\} \left\{ 1 + \left[\frac{a^2}{(1-x)^2} - 1 \right]^2 \right\}}. \quad (3.16)$$

Рассмотрим сначала нормальное падение лазерного излучения на границу плазмы. В этом случае $\alpha = 0$ и уравнение для безразмерной частоты (3.14) имеет вид

$$x^2 \frac{a^2 - x^2}{a^2 - 2x^2} = (1 - x)^2 \frac{a^2 - (1 - x)^2}{a^2 - 2(1 - x)^2} \quad (3.17)$$

с решением $x = 1/2$, откуда следует равенство $\Omega = \omega_1 = 1/2 \omega_0$. Подставляя найденное решение в выражение (3.16), находим

$$G^2(x) = 0. \quad (3.18)$$

Отсюда заключаем, что при нормальном падении электромагнитной волны параметрическое возбуждение поверхностных волн отсутствует.

Рассмотрим возможность возбуждения ПЭВ при наклонном падении. В общем виде для этого нужно найти решение уравнения (3.14) подставить его в формулу (3.16) и, анализируя угловую зависимость инкремента с целью определения максимума, найти оптимальные значения угла падения α и угла распространения возмущений θ .

Для очень плотной плазмы, когда выполнено условие $a^2 \gg 1$, можно представить некоторые аналитические результаты. В этом случае решение уравнения (3.14) имеет вид

$$x = \frac{\cos^2 \alpha}{2(1 + \sin \theta \sin \alpha)}. \quad (3.19)$$

С учетом выражения для безразмерной частоты (3.19) формула (3.16) при условии $a^2 \gg 1$ принимает вид

$$G^2 = \frac{\cos^2 \theta \cos^8 \alpha \sin^2 \alpha}{16a^4} \times \frac{(\sin \theta + \sin \alpha)^2 (1 + 2 \sin \theta \sin \alpha + \sin^2 \alpha)}{(1 + \sin \theta \sin \alpha)^6}. \quad (3.20)$$

При малых углах падения ($\alpha \rightarrow 0$, $\sin \theta \gg \sin \alpha$) выражение (3.20) упрощается

$$G^2 = \frac{\sin^2 \alpha}{64a^4} \sin^2 2\theta. \quad (3.21)$$

В этом случае функция G^2 максимальна для угла распространения возмущений $\theta = \pi/4$

$$G_{\max}^2 = \frac{\sin^2 \alpha}{64a^4}. \quad (3.22)$$

При скользких углах падения, когда $\alpha \rightarrow \pi/2$, выражение (3.20) принимает вид

$$G^2 = \frac{\cos^8 \alpha}{8a^4} \frac{\cos^2 \theta}{(1 + \sin \theta)^3}. \quad (3.23)$$

Функция (3.23) имеет максимальное значение при $\theta = 0$

$$G_{\max}^2 = \frac{\cos^8 \alpha}{8a^4}. \quad (3.24)$$

Глобальный максимум функции G^2 можно найти с помощью численного анализа выражения

(3.20). В результате численных расчетов получаем следующее максимальное значение:

$$G_{\max, \max}^2 = \frac{0.03148}{16a^4}, \quad (3.25)$$

которое достигается для углов $\alpha \approx 33^\circ$, $\theta \approx 12^\circ$. При этом безразмерная частота в соответствии с (3.19) равна $x \approx 0.315$.

Численные расчеты по точным формулам (3.14), (3.16) для значения $a^2 = 100$, углов $\alpha \approx 33^\circ$, $\theta \approx 13^\circ$ и безразмерной частоты $x \approx 0.314$ дают следующий результат для квадрата максимального безразмерного инкремента:

$$G_{\max, \max}^2 \approx 1.996 \times 10^{-7}. \quad (3.26)$$

Сравнивая (3.26) с формулой (3.25), из которой при $a^2 = 100$ следует $G_{\max, \max}^2 \approx 1.968 \times 10^{-7}$, находим хорошее совпадение численных и аналитических результатов.

Рассмотрим теперь не очень плотную плазму. Пусть плотность плазмы в полтора раза превышает критическую величину $a^2 = 1.5$. Численный анализ уравнения (3.14) совместно с формулой (3.16) показывает, что безразмерный инкремент (3.16) максимален для угла распространения поверхностной волны (Ω, \mathbf{k}) $\theta \approx 16^\circ$ при падении волны накачки на границу плазмы под углом $\alpha \approx 39^\circ$ и имеет величину

$$G_{\max, \max}^2 \approx 2.058 \times 10^{-3} \quad (3.27)$$

для безразмерной частоты $x \approx 0.357$.

Из рассмотренных примеров следует, что чем больше плотность плазмы, тем меньше инкремент неустойчивости. С другой стороны, увеличивая плотность плазмы, можно возбуждать поверхностную волну с небольшим инкрементом неустойчивости, но на достаточно низкой частоте.

Для оценки инкремента неустойчивости рассмотрим незначительное превышение критической плотности, когда $a^2 = 1.5$. В этом случае максимальный инкремент неустойчивости в соответствии с формулами (3.15), (3.27) имеет вид

$$\frac{\gamma_{\max}}{\omega_0} = \frac{\omega_0 V_E}{\omega_p c} G_{\max, \max} \approx 3.7 \times 10^{-2} \frac{V_E}{c}. \quad (3.28)$$

При этом происходит возбуждение двух ПЭВ с частотами $\Omega \approx 0.357\omega_0$ и $\omega_1 = \omega_0 - \Omega \approx 0.643\omega_0$, которые находятся в инфракрасном диапазоне

частот при воздействии оптического излучения. Волновые числа возбуждаемых волн определяются в соответствии с (3.7) соотношениями

$$\begin{aligned} k &= \frac{\omega_0}{c} x \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 - 2x^2}}, \\ k_1 &= \frac{\omega_0}{c} (1-x) \sqrt{\frac{a^2 - (1-x)^2}{a^2 - 2(1-x)^2}}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Подставляя в формулы (3.29) $a^2 = 1.5$, $x = 0.357$ находим величины волновых векторов

$$\begin{aligned} k &\approx 0.375 \frac{\omega_0}{c}, \quad k_1 \approx 0.817 \frac{\omega_0}{c}, \\ k_0 &\approx 0.629 \frac{\omega_0}{c}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае поверхностная волна (Ω, \mathbf{k}) распространяется под углом $\theta \approx 16^\circ$ относительно электрического поля накачки, а поверхностная волна с более высокой частотой (ω_1, \mathbf{k}_1) распространяется под углом $\approx 26^\circ$ относительно \mathbf{k}_0 или под углом $\approx 64^\circ$ по отношению к электрическому полю лазерного излучения. При этом угол между волновыми векторами \mathbf{k} и \mathbf{k}_1 составляет величину $\approx 48^\circ$ (см. рисунок 1).

4. ПОРОГ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Рассмотрим теперь порог неустойчивости. Для этого следует учесть частоты соударений v , v_1 электронов в выражениях для диэлектрической проницаемости. В случае редких столкновений, когда выполнены условия $v \ll \omega$, $v_1 \ll \omega_1$, для диэлектрических проницаемостей имеем

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(1 - i \frac{v}{\omega}\right), \quad \varepsilon_1 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_1^2} \left(1 - i \frac{v_1}{\omega_1}\right). \quad (4.1)$$

При учете столкновений соотношения (3.5), (3.9) принимают вид

$$W(x) = \frac{a^6}{\cos^2 \theta \cos^2 \alpha} \frac{(a^2 - 2x^2) \sqrt{\frac{a^2}{x^2} - 2} \sqrt{\frac{a^2}{(1-x)^2} - 2}}{x^2 (a^2 - x^2)^2 [a^2 - (1-x)^2] \left(\sqrt{\frac{a^2}{x^2} - 2} - \sqrt{\frac{a^2}{(1-x)^2} - 2} \right)^2}, \quad (4.9)$$

а безразмерная частота x определяется из уравнения (3.14).

$$\begin{aligned} D(\omega + i\gamma, k) &= \\ &= -i \frac{c \sqrt{|\varepsilon| - 1} (1 + |\varepsilon|) (1 + |\varepsilon|^2)}{\Omega^2 |\varepsilon|^2} \left(\gamma + \frac{v}{2} \frac{1 + |\varepsilon|}{1 + |\varepsilon|^2} \right), \\ D_1(\omega_1 + i\gamma, k_1) &= \\ &= i \frac{c \sqrt{|\varepsilon_1| - 1} (1 + |\varepsilon_1|) (1 + |\varepsilon_1|^2)}{\omega_1^2 |\varepsilon_1|^2} \left(\gamma + \frac{v_1}{2} \frac{1 + |\varepsilon_1|}{1 + |\varepsilon_1|^2} \right). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Тогда вместо (3.15) находим следующее уравнение для инкремента неустойчивости:

$$[\gamma(x) + \gamma_0][\gamma(x) + \gamma_1] = \omega_0^2 \frac{\omega_0^2 V_E^2}{\omega_p^2 c^2} G^2(x), \quad (4.3)$$

где введены обозначения

$$\gamma_0 = \frac{v}{2} \frac{1 + |\varepsilon|}{1 + |\varepsilon|^2}, \quad \gamma_1 = \frac{v_1}{2} \frac{1 + |\varepsilon_1|}{1 + |\varepsilon_1|^2}. \quad (4.4)$$

Решение уравнения (4.3) имеет вид

$$\gamma(x) = \sqrt{\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_0}{2}\right)^2 + \omega_0^2 \frac{\omega_0^2 V_E^2}{\omega_p^2 c^2} G^2(x)} - \frac{\gamma_1 + \gamma_0}{2}. \quad (4.5)$$

Порог неустойчивости находится из условия $\gamma(x) = 0$ и определяется соотношением

$$\frac{V_E^2}{c^2} = \frac{\gamma_1 \gamma_0 \omega_p^2}{\omega_0^2 \omega_0^2 G^2(x)}. \quad (4.6)$$

При значительном превышении порога, когда выполняется условие

$$\frac{V_E^2}{c^2} \gg \frac{\gamma_1 \gamma_0 \omega_p^2}{\omega_0^2 \omega_0^2 G^2(x)}, \quad (4.7)$$

из формулы (4.5) следует результат бесстолкновительной теории (3.15). Используя выражения (4.6) после несложных преобразований, получим следующее выражение для порога неустойчивости:

$$\frac{V_E^2}{c^2} = \frac{v_1 v}{4\omega_0^2} W, \quad (4.8)$$

где функция $W(x)$ имеет вид

Рассмотрим случай очень плотной плазмы, когда выполняется условие $a^2 \gg 1$. Тогда с учетом

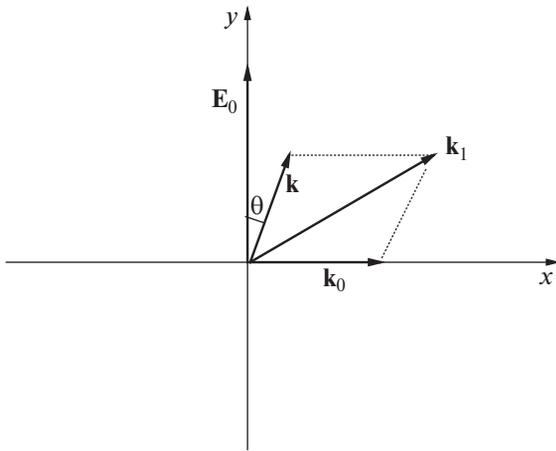


Рис. 1. Направление волновых векторов \mathbf{k} , \mathbf{k}_1 возбуждаемых поверхностных волн на плоскости XOY .

формулы для безразмерной частоты (3.20) выражение (4.9) принимает вид

$$W = a^2 \times \frac{(1 + \sin \theta \sin \alpha)^2 (1 + 2 \sin \theta \sin \alpha + \sin^2 \alpha)}{\cos^2 \theta \cos^4 \alpha \sin^2 \alpha (\sin \theta + \sin \alpha)^2}. \quad (4.10)$$

Численный анализ формулы (4.10) показывает, что минимальное значение функции W равно $W_{\max} \approx 21.8a^2$ реализуется для углов $\alpha \approx 39^\circ$, $\theta \approx 14^\circ$ и безразмерной частоты $x \approx 0.266$. Отсюда заключаем, что при условии $a^2 \gg 1$ порог неустойчивости в соответствии с формулой (4.8) имеет очень большую величину.

Рассмотрим случай небольшого превышения плотностью электронов критического значения, когда $a^2 = 1.5$. В этом случае численный анализ формулы (4.9) показывает, что минимальное значение функции $W_{\min} \approx 33.3$ достигается при следующих значениях безразмерной частоты, угла падения и угла распространения поверхностной волны: $x \approx 0.347$, $\alpha \approx 42^\circ$, $\theta \approx 15^\circ$. Отсюда следует, что пороговое значение амплитуды волны накачки для безразмерной плотности $a^2 = 1.5$ имеет вид

$$\left(\frac{V_E^2}{c^2}\right)_{th} \approx 8.3 \frac{v_1 v}{\omega_0^2}. \quad (4.11)$$

Отметим, что параметры $x \approx 0.347$, $\alpha \approx 42^\circ$, $\theta \approx 15^\circ$, соответствующие порогу неустойчивости, несколько отличаются от параметров $x \approx 0.357$, $\alpha \approx 39^\circ$, $\theta \approx 16^\circ$, отвечающих максимуму инкремента (3.27) при $a^2 = 1.5$. Это связано, в отличие от объемных волн, со специфической зависимостью декрементов затухания поверхностных

волн от частоты, которая описывается формулами (4.4).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе исследовано параметрическое возбуждение поверхностных волн при наклонном падении s -поляризованной электромагнитной волны на полуграниченную плазму сверхкритической концентрации. Получено дисперсионное уравнение и вычислен инкремент неустойчивости, связанный с распадом волны накачки на две поверхностные электромагнитные волны, который оказался пропорциональным первой степени напряженности электрического поля волны накачки. Исследована зависимость инкремента неустойчивости от плотности электронов и угла падения. Показано, что инкремент имеет максимальное значение в плазме с концентрацией электронов, незначительно превышающей критическое значение. Вычислен порог неустойчивости, который определяется частотой соударений электронов и имеет минимальное значение в плазме с околоскритической концентрацией.

Отметим, что важной особенностью настоящей работы является то, что в ней построена нелинейная теория возбуждения поверхностных плазмонов s -поляризованной электромагнитной волной накачки. В линейной теории возбуждение поверхностных волн происходит только при воздействии p -поляризованной накачки. Например, в оптике для возбуждения поверхностных волн применяются различные призмы для согласования падающего p -поляризованного электромагнитного излучения с поверхностными плазмонами. Как уже отмечалось выше, наиболее эффективное параметрическое нарастание ПЭВ происходит в случае, когда плотность электронов близка к критической величине. С ростом плотности плазмы инкремент неустойчивости падает. Отсюда следует, что рассмотренный в настоящей статье механизм возбуждения ПЭВ может быть реализован при воздействии лазерного излучения на малоплотные мишени (например, аэрогели с плотностью 1–100 мг/см²). При взаимодействии же лазерного излучения с твердотельными мишенями данный механизм видимо малоэффективен.

В заключение оценим величину инкремента неустойчивости для характерных параметров лазерно-плазменных экспериментов. Пусть лазерный импульс с длиной волны $\lambda_0 = 1$ мкм (частота $\omega_0 \approx 1.88 \times 10^{15} \text{ c}^{-1}$), длительностью $\tau = 500$ фс и интенсивностью $I_L = 10^{17} \text{ Вт/см}^2$ падает на границу плазмы, образующейся при ионизации твердотельной мишени, электроны которой имеют плотность $N_{0e} \approx 1.1 \times 10^{23} \text{ см}^{-3}$ на два порядка

больше критического значения. В этом случае инкремент, в соответствии с формулами (3.15), (3.25), имеет величину $\gamma \approx 1.2 \times 10^{-5} \omega_0$, и неустойчивость за время длительности импульса не успевает развиться, так как коэффициент усиления $\Gamma = \gamma\tau \approx 10^{-2}$ имеет малую величину. Если же использовать в качестве мишени аэрогель, который при ионизации имеет плотность электронов, близкую к критическому значению, то можно получить заметный эффект. Для плотности электронов $N_{0e} \approx 1.6 \times 10^{21} \text{ см}^{-3}$ из формулы (3.28) находим $\gamma \approx 10^{-2} \omega_0$. В этом случае коэффициент усиления имеет величину $\Gamma = \gamma\tau \approx 9.4$, и начальные затравочные значения амплитуд поверхностных волн вполне могут вырасти до заметных величин.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 17-02-00648а.)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Raether H.R.* Surface plasmons on smooth and rough surfaces and on gratings. New York: Springer-Verlag, 1988. V. 111. P. 1.
2. *Майер С.А.* Плазмоника: Теория и приложения. М.: R&C dynamics, 2011. С. 22.
3. *Wang X.Y., Downer M.C.* // Opt. Lett. 1992. V. 17. P. 1450.
4. *Кудряшов С.И., Емельянов В.И.* // Письма в ЖЭТФ. 2001. Т. 73. С. 751.
5. *Kroo N., Farkas Gy., Dombi P., Varro S.* // Optics Express. 2008. V. 16. P. 21656.
6. *Kim S., Jin J., Kim Y.-I., Park Y.-J., Kim Y., Kim S.W.* // Nature (London). 2008. V. 453. P. 757.
7. *Ионин А.А., Кудряшов С.И., Селезнев Л.В., Синицин Д.В., Емельянов В.И.* // Письма в ЖЭТФ. 2013. Т. 97. С. 139.
8. *Фролов А.А.* // Физика плазмы. 2007. Т. 33. С. 206.
9. *Урюпин С.А., Фролов А.А.* // Квантовая электроника. 2013. Т. 43. С. 1132.
10. *Урюпин С.А., Фролов А.А.* // Квантовая электроника. 2014. Т. 44. С. 866.
11. *Алиев Ю.М., Ферленгу Э.* // ЖЭТФ. 1969. Т. 57. С. 901.
12. *Алиев Ю.М., Градов О.М., Кирий А.Ю.* // ЖЭТФ. 1972. Т. 63. С. 112.
13. *Lindgren T., Larsson J., Stenflo L.* // Plasma Phys. 1982. V. 24. P. 1177.
14. *Kumar P., Tripathi V.K.* // Appl. Phys. Lett. 2012. V. 100. P. 151605.
15. *Aliiev Yu.M., Brodin G.* // Phys. Rev. A. 1990. V. 42. P. 2374.
16. *Lee H.J., Cho S.H.* // Phys. Rev. E. 1999. V. 59. P. 3503.
17. *Абдуллаев А.Ш., Алиев Ю.М., Фролов А.А.* // Физика плазмы. 1986. Т. 12. С. 827.