

НЕИДЕАЛЬНАЯ ПЛАЗМА

ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПЛОТНОЙ ПЛАЗМЫ

© 2020 г. Ю. В. Архипов^{a, *}, Д. Ю. Дубовцев^a, С. А. Сызганбаева^a, И. М. Ткаченко^b

^a *Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан*

^b *Валенсийский политехнический университет, Валенсия, Испания*

*e-mail: Yuriy.Arhipov@kaznu.kz

Поступила в редакцию 07.02.2019 г.

После доработки 20.05.2019 г.

Принята к публикации 23.05.2019 г.

Представлены результаты исследований оптических свойств плазмы в рамках самосогласованного метода моментов. Полученные результаты удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными. Предложенный метод расчета отличается от других теоретических подходов отсутствием подгоночных параметров и требует для расчетов исключительно знания парциальных статических структурных факторов плазмы. Результаты получены в широком диапазоне изменения параметров системы.

Ключевые слова: коэффициент отражения, функция потерь системы, метод моментов

DOI: 10.31857/S0367292120010011

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время ведутся активные исследования оптических свойств плотной неидеальной плазмы [1–8]. Такая плазма встречается как в астрофизических объектах, таких как звезды главной последовательности или белые карлики [9, 10], так и в установках инерционного термоядерного синтеза, где она создается путем импульсного нагрева конденсированного вещества мишени несколькими лазерными лучами, что необходимо для равномерности нагрева мишени [11, 12], в самосжатых электрических разрядах [13–15], а также в динамических экспериментах [16]. Для определения параметров неидеальной плазмы используются оптические методы диагностики: пассивные – исследование спектральных характеристик излучения из плазмы [17, 18] и активные – воздействие пучков частиц [19, 20] и потоков электромагнитного излучения [19, 21–23] на плазму. Излучение, исходящее из плазмы, несет информацию об интегральной температуре и усредненной концентрации частиц, которые определяются из структуры энергетического спектра атомов и молекул и зависят от характера межчастичных взаимодействий. Анализ коэффициентов отражения электромагнитных волн s - и p -поляризаций, падающих под разными углами на плазму, позволяет рассчитывать локальную концентрацию заряженных частиц слоистой неоднородной плазмы в данной области фазовой диаграммы. Особую роль такие исследования играют при изучении параметров в быстроменяю-

щихся средах. К примеру, результаты исследования отражения электромагнитного излучения от ударно-сжатой плазмы инертных газов при варьировании длины волны лазерного излучения и электронной концентрации среды были представлены и проанализированы в работах [8, 24–39]. Теоретические подходы [27, 31–36], основанные на применении формулы Друде и направленные для воспроизведения экспериментальных данных предполагают существование относительно широкого неоднородного переходного слоя и включают до трех подгоночных параметров. Методы, использованные в работах [37–39], также предполагают определенную процедуру согласования с экспериментом.

В настоящей работе отражение лазерного излучения различной поляризации от слоя ударно-сжатой плазмы благородного газа исследуется с использованием самосогласованного метода моментов [40], в котором классический метод моментов [41] дополняется физическими соображениями. Идея метода моментов основывается на применении неканонических решений задачи Гамбургера теории моментов. При известных значениях моментов искомая причинная функция параметризуется аналитической функцией-параметром Неванлинны, обладающей определенными математическими свойствами. При соответствующем физике выборе последней, искомая функция, например обратная диэлектрическая функция, может быть определена однозначно. В отличие от других известных методов

расчета динамических характеристик неидеальной плазмы, этот метод не требует наличия малого параметра и применим для любых потенциалов межчастичных взаимодействий [42–46].

2. РАСЧЕТЫ КОЭФФИЦИЕНТА ОТРАЖЕНИЯ

Вычисление коэффициента отражения проводится в предположении наличия резкой границы плазма–свободное пространство. В этом случае, для определения коэффициента отражения среды R можно воспользоваться формулами Френеля, причем для s -поляризации

$$R_s = \left(\frac{\cos \vartheta - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta}}{\cos \vartheta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta}} \right)^2, \quad (1)$$

а для p -поляризации

$$R_p = \left(\frac{\varepsilon \cos \vartheta - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta}}{\varepsilon \cos \vartheta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta}} \right)^2, \quad (2)$$

где ϑ – угол падения излучения, ε – диэлектрическая функция плазмы, а коэффициент преломления среды, из которой на плазму направляется лазерный луч, положен равным единице.

3. БЕЗРАЗМЕРНЫЕ ПАРАМЕТРЫ

В данной работе мы используем следующие параметры, характеризующие термодинамическое состояние плазмы:

$$\Gamma = \frac{\beta e^2}{a}, \quad \beta = \frac{1}{k_B T}, \quad r_s = \frac{a}{a_B},$$

$$\theta = \frac{k_B T}{E_F} = 2 \left(\frac{4}{9\pi} \right)^{2/3} \frac{r_s}{\Gamma}.$$

Здесь введены параметр неидеальности Γ , параметр плотности Бракнера r_s и параметр вырождения θ . Кроме того, T – это температура, k_B – коэффициент Больцмана, $a = (3/4\pi n_e)^{1/3}$ – это электронный радиус Вигнера–Зейтца, n_e – концентрация частиц, a_B – первый борковский радиус орбиты электрона в атоме, а E_F – энергия Ферми электронов системы.

4. МЕТОД МОМЕНТОВ

Как отмечалось, математические соотношения непerturbативного метода моментов [42–46], не зависят от потенциала межчастичного взаимодействия или термодинамического состояния равновесной плазмы. В нашем случае, в рамках

этого метода, функция линейного отклика системы, например, обратная диэлектрическая функция $\varepsilon^{-1}(q, \omega)$, может быть восстановлена по первым сходящимся степенным моментам ее мнимой части, причем эти моменты являются коэффициентами асимптотического разложения функции потерь $\mathcal{L}(k, \omega)$:

$$\mathcal{L}(k, \omega) = -\frac{\text{Im} \varepsilon^{-1}(k, \omega)}{\omega}. \quad (3)$$

Метод моментов позволяет выразить диэлектрическую функцию

$$\varepsilon(k, z) = \left(1 + \frac{\omega_p^2(z+Q)}{z(z^2 - \omega_2^2(k)) + z(z^2 - \omega_1^2(k))Q} \right)^{-1}, \quad (4)$$

через функцию-параметр Неванлинны $Q(k, z)$, которую мы аппроксимируем ее статическим значением $Q(k, 0) = ih_0(k)$. На основе предположения о наличии у функции потерь экстремума на нулевой частоте, положительный параметр $h_0(k)$ был выражен в [40] через характерные частоты $\omega_1(k)$ и $\omega_2(k)$:

$$h_0(k) = \frac{\omega_2^2(k)}{\sqrt{2}\omega_1(k)}.$$

Квадраты частот $\omega_1(k)$ и $\omega_2(k)$ определяются через моменты функции потерь системы как

$$\omega_1^2(k) = \frac{C_2(k)}{C_0(k)}, \quad \omega_2^2(k) = \frac{C_4(k)}{C_2(k)}, \quad (5)$$

$$C_\nu(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^\nu \mathcal{L}(k, \omega) d\omega, \quad \nu = 0, 2, 4. \quad (6)$$

Моменты нечетного порядка зануляются из-за симметрии функции потерь. Нулевой момент $C_0(k)$ получается из соотношения Крамерса–Кронинга:

$$\varepsilon^{-1}(k, z) = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega \mathcal{L}(k, \omega) d\omega}{\pi(z - \omega)} \Leftrightarrow C_0(k) = 1 - \varepsilon^{-1}(k, 0). \quad (7)$$

Этот результат не зависит от характера системы. Второй момент является f -правилом сумм [46]:

$$C_2(k) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega \mathcal{L}(k, \omega) d\omega = \omega_p^2, \quad (8)$$

где ω_p^2 квадрат плазменной частоты системы. Выражение для четвертого момента $C_4(k)$ для систе-

Таблица 1. Расчетные характеристики системы для длины волны нормально падающего лазерного излучения $\lambda_L = 1064$ нм: термодинамические параметры плазмы, такие как давление P , массовая плотность ρ , плотность нейтральных атомов n_a , степень ионизации α_{ion} и результаты расчетов коэффициента отражения (1), (2) электромагнитной волны от плотной плазмы с использованием различных моделей диэлектрической функции: значения R^{MB} получены с использованием ДФ Мермина с частотой столкновений найденной в приближении Борна [49], R^B – по формуле Друде также с частотой столкновений, найденной в приближении Борна [34, 50], R^{MM} – методом моментов (5), значения R^{exp} представляют экспериментальные данные [24]

| P , ГПа | T , 10^3 К | $n_e \times 10^{21}$ см $^{-3}$ | $n_a \times 10^{21}$ см $^{-3}$ | α_{ion} | Γ | θ | R^{exp} | R^{MM} | R^B | R^{MB} |
|-----------|----------------|---------------------------------|---------------------------------|----------------|----------|----------|-----------|----------|-------|----------|
| 1.6 | 30.1 | 1.8 | 0.61 | 0.75 | 1.1 | 4.8 | 0.09 | 0.09 | 0.27 | 0.27 |
| 3.1 | 29.6 | 3.2 | 1.4 | 0.70 | 1.3 | 3.2 | 0.12 | 0.15 | 0.34 | 0.35 |
| 5.1 | 30.3 | 4.5 | 2.2 | 0.67 | 1.5 | 2.6 | 0.18 | 0.18 | 0.38 | 0.38 |
| 7.3 | 29.8 | 5.7 | 3.5 | 0.62 | 1.6 | 2.2 | 0.26 | 0.22 | 0.40 | 0.41 |
| 10.5 | 29.3 | 7.1 | 5.4 | 0.57 | 1.8 | 1.9 | 0.36 | 0.26 | 0.43 | 0.44 |

мы с Фурье-образом эффективного межчастичного взаимодействия

$$\Phi_{ab}(k) = \frac{4\pi e^2}{k^2} \zeta_{ab}(k), \quad (9)$$

$$\zeta_{ab}(k) = \zeta_{ba}(k), \quad a, b = e, i,$$

записывается следующим образом:

$$C_4(k) = \omega_p^2 (\zeta_{ee}(k) + K(k) + U(k) + H). \quad (10)$$

Из (10) видно, что четвертый степенной момент учитывает квантовые и корреляционные свойства плазмы:

$$K(k) = \frac{\langle v_e^2 \rangle k^2}{\omega_p^2} + \left(\frac{\hbar}{2m_e} \right)^2 \frac{k^4}{\omega_p^2}, \quad (11)$$

$$H = -\frac{1}{6\pi^2 n_e} \int_0^\infty k^2 S_{ei}(k) \zeta_{ei}(k) dk, \quad (12)$$

$$U(k) = \frac{1}{16\pi^2 n_e} \times \int_0^\infty q^2 (S_{ee}(q) - 1) \left(Z_{ee}(k, q) - \frac{8\zeta_{ee}(q)}{3} \right) dq, \quad (13)$$

$$Z_{ee}(k, q) = \int_{q-k}^{q+k} \zeta_{ee}(k) (q^2 - k^2 - p^2)^2 \frac{dp}{qk^3 p}.$$

Здесь $\langle v_e^2 \rangle$ – среднее значение квадрата электронной тепловой скорости, выражаемое через инте-

грал Ферми $F_\nu(x)$ порядка $\nu = 3/2$: $\langle v_e^2 \rangle = \frac{3F_3(\eta)}{m\beta\theta^{-3/2}}$,

n_e и m_e – концентрация электронов и масса покоя электрона соответственно. В наших вычислениях мы пользовались статическими парциальными структурными факторами $S_{ab}(k)$, найденными в

работе [47]. В случае чисто кулоновского взаимодействия форм-фактор $\zeta_{ab}(k) = Z_a Z_b$ и слагаемые в (10) соответственно упрощаются [42, 46, 48].

5. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОТРАЖЕНИЯ

Представленный метод моментов, по сравнению с другими моделями диэлектрической функции [34, 49, 50], показывает хорошее согласие с экспериментальными данными по нормальному падению, что говорит об адекватности физической модели, которая в нем заложена, см. табл. 1.

Ниже на рис. 1–2 представлены графики найденных коэффициентов отражения сильно неидеальной невырожденной частично ионизованной плазмы для двух значений длины волны зондирующего излучения, полученных в рамках самосогласованного метода моментов в сравнении с экспериментальными и теоретическими результатами. В частности, на рис. 1 представлены кривые зависимостей коэффициента отражения от угла падения для электромагнитных волн различной поляризации s - и p -, обозначенных, соответственно, серым и черным цветами. На рисунке 1а приводится графический анализ отражения электромагнитного излучения длиной волны 532 нм от плазмы, а на 1б – для длины волны 694 нм. Из рисунка видно, что полученные в работе значения коэффициента отражения и экспериментальные данные качественно хорошо коррелируют друг с другом, причем для больших значений длины волны падающего излучения наблюдается полуколичественное совпадение, особенно для p -поляризации. На рисунке также показан ряд кривых, соответствующих теоретическим работам [8, 51], в которых учитывалась конечная ширина переходного слоя между воздухом и ударно-сжатой плазмой. При этом распределение плотности электронов, ионов и атомов в

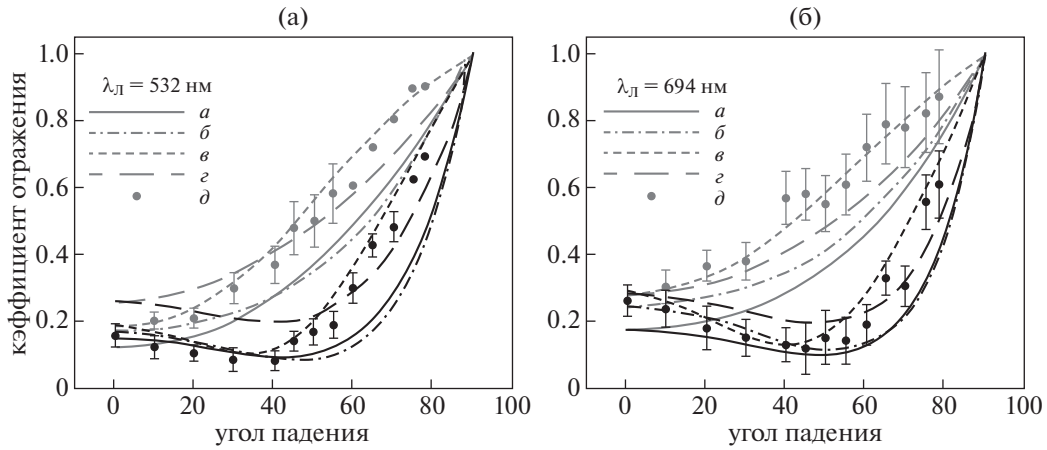


Рис. 1. Коэффициенты отражения для *s*- (серые линии) и *p*-поляризации (черные линии), в сравнении с теоретическими и экспериментальными данными для различных длин волн падающего излучения. Данные (а) были получены методом моментов (5), (б) представляют результаты [39], (в) – результаты [51], (г) – результаты [8], (д) – экспериментальные данные [52].

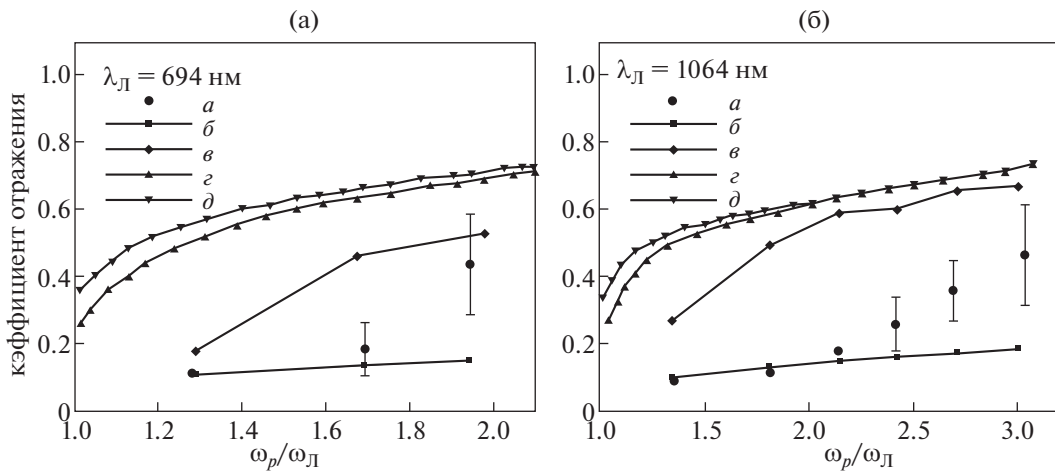


Рис.2. Коэффициенты отражения для *s*- (слева) и *p*- поляризации (справа), в зависимости от ω_p – плазменной частоты, нормированной на ω_L – частоту падающего излучения, в сравнении с теоретическими и экспериментальными данными и данными численного моделирования для различных длин волн при нулевом угле падения излучения на плазму. Точки (а) представляют экспериментальные данные [24, 27], данные (б) были получены методом моментов (5), (в) – представляют результаты моделирования [36, 53], (г, д) – результаты работы [36].

таким слое описывалось профилями с использованием до четырех подгоночных параметров [54], а толщина переходного слоя оценивалась в 160 нм, что заметно меньше рассматриваемых длин волн лазеров. Поэтому мы в настоящей работе пренебрегаем наличием вышеупомянутого переходного слоя.

Из рис. 2 видно, что полученные значения для коэффициента отражения при перпендикулярном падении излучения, в отличие от других теоретических и расчетных работ, близки к экспериментальным результатам [24, 27] при малых элек-

тронных концентрациях, но отличаются при больших значениях.

По-видимому, такие отличия могут быть существенно уменьшены при уточнении значений статических структурных факторов, входящих в расчетные формулы.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученная в результате расчетов близость значений коэффициента отражения электромагнитного излучения от слоя плазмы к эксперимен-

тальным данным, позволяет сделать заключение о правильности используемого в работе математического аппарата и применимости физической модели.

Отличием предлагаемого метода от других теоретических и расчетных оценок является отсутствие подгоночных соотношений и малых параметров.

Предложенные теоретические результаты по исследованию отражения электромагнитных волн различной поляризации от плазмы, по крайней мере качественно согласующиеся с экспериментальными данными, указывают на возможность определения электронной концентрации (диагностики) плотной плазмы на основе представленного метода. Использование более точных статических характеристик и отказ от статической модели функции-параметра Неванлинны, как ожидается, приведет к улучшению согласия с экспериментальными данными.

Работа выполнена при поддержке грантов Министерства образования и науки Республики Казахстан AP05132333 и BR05236730. Авторы выражают благодарность профессору А.Е. Давлетову, профессору А. Аскарулы, доценту А.Б. Ашикбаевой за полезное обсуждение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Adamyan V.M., Grubor D., Mihajlov A.A., Sakan N.M., Sreckovic V.A., Tkachenko I.M.* // J. Phys. A: Math. Gen. 2006. V. 39. P. 4401–4405. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/39/17/S14>
2. *Arkipov Yu.V., Askaruly A., Baimbetov F.B., Ballester D., Davletov A.E., Meirkanova G.M., Tkachenko I.M.* // Contrib. Plasma Phys. 2010. V. 50. № 2. P. 165–176. <https://doi.org/10.1002/ctpp.201010031>
3. *Arkipov Yu.V., Ashikbayeva A.B., Askaruly A., Davletov A.E., Tkachenko I.M.* // Contrib. Plasma Phys. 2013. V.53. № 4-5. P.375 – 384. <https://doi.org/10.1002/ctpp.201200113>
4. *Arkipov Yu.V., Ashikbayeva A.B., Askaruly A., Dubovtsev D.Yu., Syzganbayeva S.A., Tkachenko I.M.* // International Journal of Mathematics and Physics. 2017. V. 8. № 1. P.24-27.
5. *Veysman M., Röpke G., Winkel M., Reinholz H.* // Phys. Rev. E. 2016., V. 94. Iss. 1. P. 013203–1-23. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.94.013203>
6. *Rosmej S., Reinholz H., Röpke G.* // Phys. Rev. E 2017. V. 95. Iss. 6. P. 063208–1-12. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.95.063208>
7. *Faussurier G., Blancard C.* // Phys. Plasmas. 2016. V. 23. Iss.1. P. 012703–1-5. <https://doi.org/10.1063/1.4939606>
8. *Shalenov E.O., Rosmej S., Reinholz H., Röpke G., Dzhamagulova K.N., Ramazanov T.S.* // Contrib. Plasma Phys. 2017. V. 57. Iss. 10. P. 486–492. <https://doi.org/10.1002/ctpp.201700104>
9. *Bini D., Cherubini C., Filippi S.* // Phys. Rev. D. 2011. V. 83. Iss. 6. P. 064039–1–15. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.83.064039>
10. *Berdyugina S.V., Berdyugin A.V., Piirola V.* // Phys. Rev. Lett. 2007. V. 99. Iss. 9.091101. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.99.091101>
11. *Wu B., Shin Y.C., Pakhal H., Laurendeau N.M., Lucht R.P.* // Phys. Rev. E. 2007. V. 76. Iss. 2. P. 091101–1-4. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.76.026405>
12. *Margarone D., Velyhan A., Dostal J., Ullschmied J., Perin J.-P., Chatain D., Garcia S., Bonnay P., Pisarczyk T., Dudzak R., Rosinski M., Krasa J., Giuffrida L., Prokurek J., Scuderi V., Psikal J., Kucharik M., De Marco M., Cikhardt J., Krousky E., Kalinowska Z., Chodukowski T., Cirrone G.-A.-P., Korn G.* // Phys. Rev. X. 2016. V. 6. Iss. 4. P. 041030–1–11. <https://doi.org/10.1103/PhysRevX.6.041030>
13. *Ohzu A., Ito K.* // J. Applied Physics. 2003. V. 93. № 12. P. 9477–9482. <https://doi.org/10.1063/1.1572546>
14. *Веретенников В.А., Гурей А.Е., Писарчик Т., Полухин С.Н., Рупасов А.А., Саркисов Г.С., Семенов О.Г., Шиканов А.С.* // Физика плазмы. 1990. Т. 16. С. 818–822.
15. *Алиханов Г.С., Васильев В.И., Кононов Э.Я., Кошелев Ю.В., Сидельников Ю.В., Топорков Д.А.* // Физика плазмы. 1984. Т. 10. С. 1051.
16. *Ebeling W., Filinov A., Bonitz M., Filinov V., Pohl T.* // J. Phys. A: Math. Gen. 2006. V. 39. Iss. 17. P. 4309–4317. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/39/17/S01>
17. *Kostrin D.K., Lisenkov A.A., Uhov A.A., Ramazanov A.N.* // J. Phys.: Conf. Ser. 2016. V. 729. P. 012030–1–6. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/729/1/012030>
18. *Lomaev M.I., Beloplotov D.V., Sorokin D.A., Tarasenko V.F.* // Opt. Spectrosc. 2016. V. 120. Iss. 2. P. 171–175. <https://doi.org/10.1134/S0030400X16020168>
19. *Баранец Н., Ружин Ю., Ерохин Н., Афонин В., Войта Я., Шмлауэр Я., Кудела К., Матишин Я., Чобану М.* // Косм. наука технол. 2014. Т. 20. № 5. С. 3–26.
20. *Баранец Н.В., Соболев Я.П., Чобану М., Войта Я., Шмлауэр Я., Кюс З., Роткель Х., Кирага А., Кудела К., Матишин Я., Афонин В.В., Рябов Б.С., Исаев Н.В.* // Физика плазмы. 2007. Т. 33. № 12. С. 1086–1106.
21. *Das Arpan, Dave Shreyansh S., Saumia P.S., Srivastava Ajiit M.* // Phys. Rev. C. 2017. V. 96. Iss. 3. P. 034902–1–14. <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.96.034902>
22. *Bliokh Yury P., Felsteiner Joshua, Slutsker Yakov Z.* // Phys. Rev. Lett. 2005. V. 95. Iss. 16. P. 165003–1–4. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.95.165003>
23. *Luan S.X., Yu W., Li F.Y., Wu Dong, Sheng Z.M., Yu M.Y., Zhang J.* // Phys. Rev. E. 2016. V.94. Iss.5.P. 053207–1–5. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.94.053207>
24. *Mintsev V.B., Zaporogets Yu.B.* // Contrib. Plasma Phys. 1989. V. 29. № 4–5. P. 493 – 501. <https://doi.org/10.1002/ctpp.2150290420>

25. *Запорожец Ю.Б., Минцев В.Б., Грязнов В.К., Фортвов В.Е.* // Физика экстремальных состояний. 2002. С. 188–189.
26. *Запорожец Ю.Б., Минцев В.Б., Грязнов В.К., Фортвов В.Е., Рейнгольц Х., Репке Г.* // Физика экстремальных состояний вещества. 2004. С. 140–141.
27. *Zaporozhets Yu.B., Mintsev V.B., Gryaznov V.K., Fortov V.E., Reinholz H., Raitza T., Röpke G.* // J. Phys. A: Math. Gen. 2006. V. 39. № 17. P. 4329–4333.
28. *Zaporozhets Yu.B., Mintsev V.B., Gryaznov V.K., Fortov V.E., Reinholz H., Röpke G.* // Physics of Extreme States of Matter. 2009. P. 194–197.
29. *Zaporozhets Yu.B., Mintsev V.B., Gryaznov V.K., Fortov V.E., Winkel M., Reinholz H., Röpke G.* // Physics of Extreme States of Matter. 2010. P. 176–178.
30. *Zaporozhets Yu.B., Mintsev V.B., Gryaznov V.K., Reinholz H., Röpke G., Fortov V.E.* // Physics of Extreme States of Matter. 2013. P. 194–197.
31. *Запорожец Ю.Б., Минцев В.Б., Грязнов В.К., Фортвов В.Е., Рейнгольц Х., Репке Г.* // Изв. Кабардино-Балкарского гос. ун-та. 2014. Т. 4. № 3. С. 6–14.
32. *Zaporozhets Yu.B., Mintsev V.B., Reinholz H., Ropke G.* // J. Physics: Conf. Series. 2019. V. 1147. P. 012099-1-6. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1147/1/012099>
33. *Raitza T., Reinholz H., Ropke G., Mintsev V., Wierling A.* // J. Phys. A: Math. Gen. 2006. V. 39. Iss. 17. P. 4393–4399. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/39/17/S13>
34. *Reinholz H., Röpke G., Wierling A., Mintsev V., Gryaznov V.* // Contrib. Plasma Phys. 2003. V. 43. № 1. P. 3–10. <https://doi.org/10.1002/ctpp.200310001>
35. *Reinholz H., Röpke G., Morozov I., Mintsev V., Zaporozhets Yu., Fortov V., Wierling A.* // J. Phys. A: Math. Gen. 2003. V. 36. № 22. P. 5991 – 5997.
36. *Reinholz H., Zaporozhets Yu.B., Mintsev V., Fortov V., Morozov I., Röpke G.* // Phys. Rev. E. 2003. V. 68. Iss. 3. P. 036403-1-10. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.68.036403>
37. *Norman G., Saitov I., Stegailov V., Zhilyaev P.* // Phys. Rev. E. 2015. V. 91. Iss. 2. P. 023105-1-10. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.023105>
38. *Norman G.E., Saitov I.M., Stegailov V.V.* // J. Exp. Theor. Phys. 2015. V. 120. Iss. 5. P. 894–904. <https://doi.org/10.1134/S1063776115040135>
39. *Norman G.E., Saitov I.* // Phys. Rev. E. 2016. V. 94. Iss. 4. P. 043202-1-8. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.94.043202>
40. *Arkhipov Yu.V., Askaruly A., Conde L., Davletov A.E., Donkó Z., Dubovtsev D.Yu., Hartman P., Korolov I., Tkachenko I.M.* // Phys. Rev. Lett. 2017. V. 119. Iss. 4. P. 045001-1-6. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.045001>
41. *Крейн М.Г., Худельман А.А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973.
42. *Ortner J., Tkachenko I.M.* // Phys. Rev. E. 2001. V. 63. Iss. 2. P. 026403-1-11. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.63.026403>
43. *Adamyan V.M., Tkachenko I.M.* // Contrib. Plasma Phys. 2003. V. 43. № 5-6. P. 252–257. <https://doi.org/10.1002/ctpp.200310020>
44. *Arkhipov Yu.V., Askaruly A., Ballester D., Davletov A.E., Meirkanova G.M., Tkachenko I.M.* // Phys. Rev. E. 2007. V. 76. Iss. 2. P. 026403-1–9. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.76.026403>
45. *Adamjan S.V., Tkachenko I.M., Muñoz-Cobo González J.L., Verdú Martín G.* // Phys. Rev. E. 1993. V. 48. № 3. P. 2067–2072.
46. *Tkachenko I.M., Arkhipov Yu.V., Askaruly A.* The Method of Moments and its Applications in Plasma Physics. Lambert Academic Publishing, Saarbrücken, 2012.
47. *Архипов Ю.В., Баумбетов Ф.Б., Давлетов А.Е., Стариков К.В.* Псевдопотенциальная теория плотной, высокотемпературной плазмы. Казак университеті, 2002.
48. *Arkhipov Yu.V., Ashikbayeva A.B., Askaruly A., Davletov A.E., Palací D., Tkachenko I.M.* // International Journal of Mathematics and Physics. 2013. V. 4. № 1. P. 50–55.
49. *Selchow A., Reinholz H., Röpke G., Wierling A., Pschivul T., Zwicknagel G.* // Phys. Rev. E. 2001. V. 64. Iss. 5. P. 056410-1-10. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.64.056410>
50. *Reinholz H., Redmer R., Röpke G., Wierling A.* // Phys. Rev. E. 2000. V. 62. Iss. 4. P. 5648–5666. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.62.R4489>
51. *Zaporozhets Y.B., Omarbakiyeva Y.A., Reinholz H., Röpke G., Mintsev V.B., Gryaznov V.K.* // Contrib. Plasma Phys. 2016. V. 56. Iss. 5. P. 467–475. <https://doi.org/10.1002/ctpp.201500144>
52. *Zaporozhets Yu.B., Mintsev V.B., Gryaznov V.K., Reinholz H., Röpke G., Omarbakiyeva Y.A., Fortov V.E.* // J. Phys.: Conf. Ser. 2015. V. 653. P. 012110-1-5. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/653/1/012110>
53. *Валуев А.А., Морозов И.В., Норман Г.Э.* // ДАН. 1998. Т. 362. С. 752–755.
54. *Zaporozhets Y., Mintsev V., Fortov V., Reinholz H., Röpke G., Rosmej S., Omarbakiyeva Y.A.* // Phys. Rev. E. 2019. V. 99. P. 043202-1-12. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.99.043202>