ФИЗИКА ПЛАЗМЫ, 2020, том 46, № 1, с. 57–71

КОСМИЧЕСКАЯ ПЛАЗМА

УДК 533.9

МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ МЕЛКОЙ ВОДЫ ДЛЯ ТЕЧЕНИЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ АСТРОФИЗИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЫ. ПРИБЛИЖЕНИЕ БЕТА-ПЛОСКОСТИ, МАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ РОССБИ

© 2020 г. М. А. Федотова[a, b, *], Д. А. Климачков[a, **], А. С. Петросян[a, b, ***]

[a] Институт космических исследований РАН, Москва, Россия

[b] Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Московская обл., Россия

*e-mail: fedotova.maria.04@gmail.com

**e-mail: klimachkovdmitry@gmail.com

***e-mail: apetrosy@iki.rssi.ru

Поступила в редакцию 30.04.2019 г.
После доработки 20.06.2019 г.
Принята к публикации 22.06.2019 г.

Исследуются вращающиеся магнитогидродинамические течения тонкого стратифицированного слоя плазмы в поле силы тяжести со свободной границей во внешнем вертикальном магнитном поле. Получены магнитогидродинамические уравнения в приближении двуслойной мелкой воды во внешнем магнитном поле при разбиении плазмы на два слоя различной плотности. В приближении бета-плоскости получена система уравнений мелкой воды для вращающейся стратифицированной плазмы во внешнем магнитном поле. Для стационарных решений в виде вертикального или горизонтального магнитных полей развита линейная теория, найдены решения в виде волн магнито-Россби и поправок к ним, описывающих эффекты стратификации. Качественный анализ дисперсионных кривых показывает наличие трехволновых нелинейных взаимодействий магнитных волн Россби для каждого из стационарных состояний. Показано существование параметрических неустойчивостей и найдены их инкременты.

DOI: 10.31857/S0367292120010072

1. ВВЕДЕНИЕ

Магнитогидродинамическая теория мелкой воды играет важную роль в описании крупномасштабных процессов во вращающихся течениях астрофизической плазмы. Приближение мелкой воды в магнитной гидродинамике плазмы используется для изучения солнечного тахоклина [1–6], атмосфер внесолнечных планет [7], динамики атмосфер нейтронных звезд [8, 9] и растекания материи при дисковой аккреции в нейтронных звездах [10, 11]. Практически, речь идет о развитии идей геофизической гидродинамики на случай вращающейся плазмы с учетом существенных различий в поведении плазменных течений вследствие наличия магнитного поля.

Течения в плазменной астрофизике, так же как течения в геофизике, как правило, являются стратифицированными. Именно изучению фундаментальной роли стратификации в течениях астрофизической плазмы посвящена данная работа. Заметим, что полная система уравнений магнитогидродинамики стратифицированной плазмы достаточно сложна как для теоретического анализа, так и для численного моделирования. Эффективной моделью для описания непрерывно стратифицированной плазмы является модель n слоев плазмы различной плотности, наложенных друг на друга [12, 13]. В настоящей работе мы предлагаем магнитогидродинамические уравнения стратифицированной плазмы в приближении двуслойной мелкой воды. Уравнения, полученные в [14–16], обобщаются в настоящей работе на случай тонкого вращающегося стратифицированного слоя плазмы со свободной границей во внешнем вертикальном магнитном поле. Получены две системы уравнений: уравнения с полным учетом силы Кориолиса и уравнения на бета-плоскости. Полученные магнитогидродинамические уравнения мелкой воды представляют собой единственную возможность самосогласованного учета внешнего магнитного поля и стратификации. Двуслойные магнитогидродинамические уравнения мелкой воды играют такую же важную роль в космической и астрофизической стратифицированной плазме, как и классические уравнения мелкой воды в гидродинамике нейтральной стратифицированной жидкости [17–19]. Учет стратификации в магнитогидродинамических моделях вращающейся плазмы важен для анализа осцилляций R-моды во вращающихся звездах и на Солнце [21–23] и позволяет существенно расширить возможности для интерпретации имеющихся данных наблюдений крупномасштабных волн Россби на Солнце [24–27].

В нашей работе мы используем развитую теорию двуслойных магнитогидродинамических течений мелкой воды в приближении бета-плоскости для изучения волн магнито-Россби [15, 28]. Волны магнито-Россби – крупномасштабные волны, возникающие вследствие широтных неоднородностей силы Кориолиса в слое плазмы на вращающейся сфере. Волны Россби определяют крупномасштабную динамику Солнца и звезд [29–32], магнитоактивных атмосфер экзопланет, захваченных приливами от родительской звезды [7], и течений в аккреционных дисках и атмосферах нейтронных звезд [9, 34]. Кроме того, волны Россби играют определяющую роль в возникновении зональных течений в двумерной магнитогидродинамической турбулентности и в структуре Земли [35–37]. Крупномасштабные волны Россби в нейтральной жидкости определяют глобальную динамику планетных атмосфер и являются предметом многочисленных исследований в геофизической гидродинамике [17, 18, 20, 33, 38]. В этом случае волны рассматриваются на фоне тривиального стационарного состояния (состояния покоя) и теория таких волн развивается с использованием приближения мелкой воды или геострофического приближения. В нашем случае течений астрофизической плазмы теория волн Россби значительно усложняется вследствие нетривиальных стационарных состояний магнитного поля (например, тороидальное и полоидальное магнитные поля или внешнее вертикальное магнитное поле). Основные результаты относительно волн магнито-Россби получены в линейном приближении [3, 9, 31, 32] с использованием магнитогидродинамической теории мелкой воды для нестратифицированной и несжимаемой плазмы. Отметим важные работы по развитию нелинейной теории магнитных волн Россби [15, 39] а так же теории волн магнито-Россби для случая сжимаемых течений мелкой воды [40]. Все перечисленные явления в плазменной астрофизике изучаются на основе магнитогидродинамического приближения мелкой воды в плазме без учета стратификации.

В настоящей работе с использованием развитой магнитогидродинамической теории двуслойной мелкой воды на бета-плоскости получены законы дисперсии магнито-Россби волн как во внешнем вертикальном магнитном поле, так и в горизонтальном магнитном поле, с учетом плотностной стратификации. Найдено, что поправки к волнам магнито-Россби, связанные со стратификацией, изменяют фазовые и групповые скорости волн. В случае наличия внешнего магнитного поля, как и в случае его отсутствия, показано выполнение условия синхронизма для трех взаимодействующих волн магнито-Россби и получены уравнения нелинейного взаимодействия. Коэффициенты взаимодействия волн в полученных уравнениях отличаются от коэффициентов в уравнениях для однослойной модели [15] наличием слагаемых, связанных с различием в плотностях слоев плазмы. Показана возможность наличия параметрических неустойчивостей и найдены их инкременты. Полученные результаты для магнито-Россби волн при наличии стратификации играют ключевую роль для понимания динамики различных астрофизических объектов. Например, позволяют детализировать волновую динамику солнечного тахоклина и тем самым уточнить влияние магнитных волн Россби в тахоклине на формирование солнечных сезонов [4, 5, 24, 26, 27, 29].

В разд. 2 получены магнитогидродинамические уравнения вращающейся стратифицированной плазмы в приближении двуслойной мелкой воды во внешнем магнитном поле. В разд. 3 полученные уравнения обобщены на случай сферических течений в приближении бета-плоскости, и получены дисперсионные соотношения волн магнито-Россби с поправками, описывающими эффекты стратификации. В разд. 4 для полученных дисперсионных соотношений показано выполнение условия синхронизма, получены уравнения трехволнового взаимодействия и характеристики параметрических неустойчивостей.

2. МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛАЗМЫ ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ В ПРИБЛИЖЕНИИ ДВУСЛОЙНОЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ

Получим магнитогидродинамические уравнения, описывающие стратифицированную плазму в приближении двуслойной мелкой воды. В качестве исходной рассмотрим трехмерную систему магнитогидродинамических уравнений для вращающейся несжимаемой плазмы в поле тяжести [15, 41, 42]

$$\rho\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\nabla p - \frac{\mathbf{B}\times[\nabla\times\mathbf{B}]}{4\pi} - \rho[\mathbf{f}\times\mathbf{u}] + \rho\mathbf{g}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla\times[\mathbf{u}\times\mathbf{B}], \quad (2)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \quad (3)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \quad (4)$$

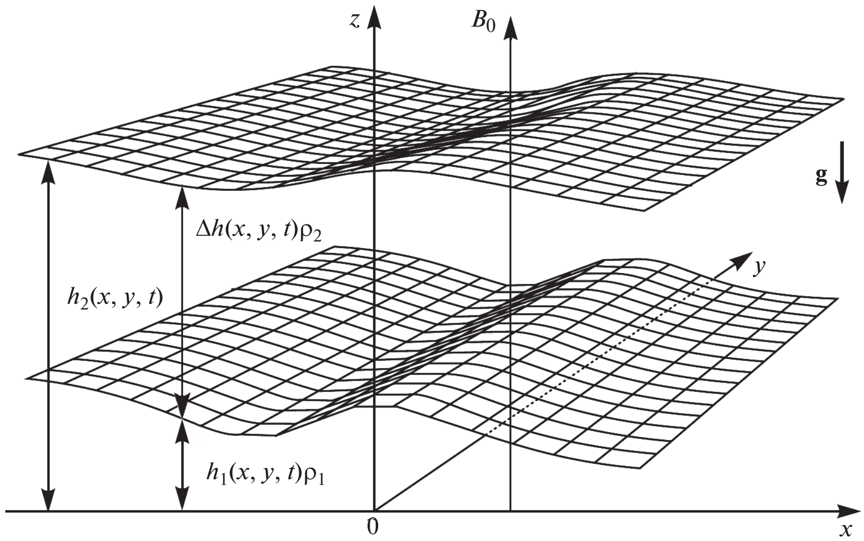

Рис. 1. Геометрия задачи.

где $\mathbf{u}$ – вектор скорости плазмы в данной точке, $\mathbf{B}$ – вектор напряженности магнитного поля в плазме, ρ – плотность, $\mathbf{f} = (0, 0, f)$, $f = 2\Omega \sin\theta$ – параметр Кориолиса (коэффициент в силе Кориолиса, равный удвоенной проекции угловой скорости вращения плазмы на вертикальную ось), Ω – угловая скорость вращения плазмы, θ – широта, $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ – ускорение свободного падения, p – полное давление, равное сумме гидростатического и магнитного. Первое уравнение системы – уравнение изменения импульса, второе – уравнение переноса магнитного поля, третье – условие бездивергентности поля скоростей, четвертое – условие бездивергентности магнитного поля.

Будем изучать течение тонкого стратифицированного слоя плазмы со свободной границей в однородном поле силы тяжести во вращающейся системе координат при наличии внешнего вертикального магнитного поля B_0 (рис. 1).

Разделим тонкий слой плазмы высотой h_2 на два слоя: нижний слой высоты h_1 с постоянной плотностью ρ_1 и верхний слой высоты $\Delta h = h_2 - h_1$ с постоянной плотностью ρ_2. Для вывода двуслойных уравнений мелкой воды запишем исходную систему (1)–(4) для каждого из слоев и проинтегрируем по вертикальной координате в пределах от 0 до h_1 для нижнего слоя и от h_1 до h_2 для верхнего слоя. Считаем высоты каждого слоя много меньше характерных линейных горизонтальных масштабов задачи. В этом случае полное давление (сумма гидродинамического и магнитного) считаем гидростатическим, пренебрегая вертикальными ускорениями. В результате получим магнитогидродинамические уравнения для двух слоев плазмы различной плотности в приближении мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле.

Запишем уравнения (1) и (2) для каждого слоя плазмы в матричном виде

$$\partial_t \begin{pmatrix} \rho_i u_{1i} \\ \rho_i u_{2i} \\ \rho_i u_{3i} \\ \tilde{B}_{1i} \\ \tilde{B}_{2i} \\ \tilde{B}_{3i} \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} \rho_i u_{1i}^2 - \tilde{B}_{1i}^2 + \tilde{p}_i \\ \rho_i u_{1i} u_{2i} - \tilde{B}_{1i}\tilde{B}_{2i} \\ \rho_1 u_{1i} u_{3i} - \tilde{B}_{1i}\tilde{B}_{3i} \\ 0 \\ u_{1i}\tilde{B}_{2i} - u_{2i}\tilde{B}_{1i} \\ u_{1i}\tilde{B}_{3i} - u_{3i}\tilde{B}_{1i} \end{pmatrix} + \partial_y \begin{pmatrix} \rho_i u_{1i} u_{2i} - \tilde{B}_{1i}\tilde{B}_{2i} \\ \rho_i u_{2i}^2 - \tilde{B}_{2i}^2 + \tilde{p}_i \\ \rho_i u_{2i} u_{3i} - \tilde{B}_{2i}\tilde{B}_{3i} \\ u_{2i}\tilde{B}_{1i} - u_{1i}\tilde{B}_{2i} \\ 0 \\ u_{2i}\tilde{B}_{3i} - u_{3i}\tilde{B}_{2i} \end{pmatrix} + \partial_z \begin{pmatrix} \rho_i u_{1i} u_{3i} - \tilde{B}_{1i}\tilde{B}_{3i} \\ \rho_i u_{2i} u_{3i} - \tilde{B}_{2i}\tilde{B}_{3i} \\ \rho_i u_{3i}^2 - \tilde{B}_{3i}^2 + \tilde{p}_i \\ u_{3i}\tilde{B}_{1i} - u_{1i}\tilde{B}_{3i} \\ u_{31}\tilde{B}_{2i} - u_{2i}\tilde{B}_{3i} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_i f u_{2i} \\ -\rho_i f u_{1i} \\ -\rho_i g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где ρ_i – плотность, $\tilde{p}_i = p_i + B_i^2/8\pi$ – магнитогидродинамическое давление в слое, $\tilde{B}_{1i}$, $\tilde{B}_{2i}$, $\tilde{B}_{3i}$ – компоненты напряженности магнитного поля в слое ($\tilde{\mathbf{B}}^2 = \mathbf{B}^2/4\pi$), u_{1i}, u_{2i}, u_{3i} – компоненты скорости в слое; здесь и далее индекс $i = 1$ соответствует нижнему слою, а индекс $i = 2$ соответствует верхнему слою.

Запишем граничные условия для каждого слоя плазмы во внешнем вертикальном магнитном поле. Граничные условия для поля скорости имеют следующий вид:

$$u_3\big|_{z=0} = 0, \tag{6}$$

$$u_3\big|_{z=h_i} = \partial_t h_i + u_1\big|_{z=h_i}\partial_x h_i + u_2\big|_{z=h_i}\partial_y h_i. \tag{7}$$

В качестве граничного условия для поля скоростей на дне используем условие непротекания (6). Граничное условие на границе между слоями описывает условие равенства вертикальной компоненты скорости нижнего слоя и скорости перемещения границы между слоями (в (7) индекс $i = 1$). Граничное условие на свободной границе соответствует условию равенства вертикальной компоненты скорости верхнего слоя и скорости перемещения свободной границы (в (7) индекс $i = 2$).

Граничные условия для магнитного поля имеют следующий вид:

$$B_3\big|_{z=0} = B_0, \tag{8}$$

$$B_3\big|_{z=h_i} = B_1\big|_{z=h_i}\partial_x h_i + B_2\big|_{z=h_i}\partial_y h_i + B_0. \tag{9}$$

Здесь и далее $B_i = \tilde{B}_i\rho^{-1/2}$.

В случае когда внешнее поле отсутствует ($B_0 = 0$ в уравнениях (8), (9)), граничные условия для вертикальной составляющей магнитного поля B_3 на поверхностях $z = h_1$ и $z = h_2$ задаются условием параллельности вектора поля границе между слоями $h_1(x, y)$ и верхней границе $h_2(x, y)$ соответственно и представляют собой сумму горизонтальных компонент B_i, домноженных на соответствующие тангенсы углов $\partial h_i/\partial x$ и $\partial h_i/\partial y$. Таким образом, на дне при $z = 0$ вертикальная компонента магнитного поля $B_3 = 0$ (8). При наложении внешнего вертикального магнитного поля в граничные условия на вертикальную компоненту поля B_3 на поверхностях $z = 0$ (8), $z = h_i$ (9) необходимо добавить слагаемое B_0.

Запишем условие гидростатичности для полного давления в каждом слое в следующем виде:

$$\partial_z\left(p_i + \frac{\rho_i}{2}B_i^2\right) = -\rho_i g. \tag{10}$$

Используем данное уравнение для получения выражений для давлений на дне тонкого слоя плазмы высотой h_2 и на границе между слоями плазмы различной плотности, а также распределения давления в слоях h_1 плотности ρ_1 и $\Delta h = h_2 - h_1$ плотности ρ_2. Для этого проинтегрируем уравнение (10) по координате z для нижнего слоя в пределах от 0 до h_1, а для верхнего слоя в пределах от h_1 до h_2

$$\int_{a_i}^{h_i}\partial_z\tilde{p}_i dz = -\int_{a_i}^{h_i}\rho_i g dz, \tag{11}$$

здесь и далее индекс $i = 1$ соответствует нижнему слою, в котором $a_i = 0$, $h_i = h_1$, а индекс $i = 2$ соответствует верхнему слою, в котором $a_i = h_1$, $h_i = h_2$.

Считая давление на свободной границе постоянным $p\big|_{z=h_2} = p_0$, из уравнения (11) находим давление на границе между слоями $\tilde{p}\big|_{h_1}$:

$$\tilde{p}\big|_{h_1} = p_0 + \rho_2 g(h_2 - h_1). \tag{12}$$

Давление $\tilde{p}_2(z)$ в верхнем слое плазмы плотности ρ_2 находим из уравнения (11), заменив верхний предел интегрирования h_2 на z

$$\tilde{p}_2(z) = p_0 + \rho_2 g(h_2 - z). \tag{13}$$

Аналогично из уравнения (11) находим давление на дне $\tilde{p}\big|_0$ и давление $\tilde{p}_1(z)$ в нижнем слое плазмы плотности ρ_1

$$\tilde{p}\big|_0 = p_0 + \rho_2 g(h_2 - h_1) + \rho_1 g h_1, \tag{14}$$

$$\tilde{p}_1(z) = p_0 + \rho_2 g(h_2 - h_1) + \rho_1 g(h_1 - z). \tag{15}$$

При интегрировании уравнений (5) используем правило дифференцирования Лейбница и выражения для давлений, полученные выше (12)–(15).

Проинтегрируем условие бездивергентности поля скоростей в пределах от 0 до h_1 для нижнего слоя (индекс $i = 1$) и от h_1 до h_2 для верхнего слоя (индекс $i = 2$):

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{a_i}^{h_i}u_{1i}dz - u_{1i}\big|_{z=h_i}\frac{\partial h_i}{\partial x} + u_{1i}\big|_{z=a_i}\frac{\partial a_i}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\int_{a_i}^{h_i}u_{2i1}dz - \\ - u_{2i}\big|_{z=h_i}\frac{\partial h_i}{\partial y} + u_{1i}\big|_{z=a_i}\frac{\partial a_i}{\partial y} + u_{3i}\big|_{z=h_i} - u_{3i}\big|_{z=a_i} = 0.$$

С учетом граничных условий (6), (7) получим следующие уравнения непрерывности для каждого из слоев:

$$\frac{\partial(h_i - a_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\int_{a_i}^{h_i}u_{1i}dz + \frac{\partial}{\partial y}\int_{a_i}^{h_i}u_{2i}dz = 0. \tag{16}$$

Интегрируя аналогичным образом условия бездивергентности магнитного поля в нижнем и верхнем слоях плазмы во внешнем магнитном поле и используя граничные условия (8), (9), получим следующие соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{a_i}^{h_i}B_{1i}dz + \frac{\partial}{\partial y}\int_{a_i}^{h_i}B_{2i}dz = 0.$$

Проинтегрируем также уравнения для магнитного поля для каждого слоя плазмы. Уравнения для горизонтальных компонент магнитного поля имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{a_i}^{h_i}B_{ji}dz + \frac{\partial}{\partial x}\int_{a_i}^{h_i}(u_{ki}B_{ji} - u_{ji}B_{ki})dz - \\ - B_0(u_{ji}\big|_{h_i} - u_{ji}\big|_{a_i}) = 0, \tag{17}$$

где уравнению на x-компоненту магнитного поля соответствуют индексы $j = 1$, $k = 2$, а уравнению на y-компоненту магнитного поля соответствуют индексы $j = 2$, $k = 1$; нижнему слою плазмы соответствуют индекс $i = 1$ и $a_i = 0$, а верхнему слою плазмы соответствуют индекс $i = 2$ и $a_i = h_1$.

Уравнения z-компоненты магнитного поля для каждого из слоев имеют следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{a_i}^{h_i} B_{3i}dz + \frac{\partial}{\partial x}\int_{a_i}^{h_i} u_{1i}B_{3i}dz + \frac{\partial}{\partial y}\int_{a_i}^{h_i} u_{2i}B_{3i}dz - - B_0(u_{3i}|_{h_i} - u_{3i}|_{a_i}) = 0, \tag{18}$$

где индекс $i = 1$ соответствует нижнему слою плазмы, в котором $a_i = 0$, $h_i = h_1$, а индекс $i = 2$ соответствует верхнему слою плазмы, в котором $a_i = h_1$, $h_i = h_2$.

Поступим аналогично для уравнений горизонтальных скоростей в системе (5) в каждом из слоев. Проинтегрируем уравнения изменения импульса в каждом слое с учетом граничных условий (6)–(9). Используя выражения для давлений в нижнем слое плазмы (15) и на границе между слоями различной плотности (12), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{a_i}^{h_i} u_{ji}dz + \frac{\partial}{\partial x}\int_{a_i}^{h_i} (u_{ji}^2 - B_{ji}^2)dz + + \frac{\partial}{\partial y}\int_{a_i}^{h_i} (u_{ji}u_{ki} - B_{ji}B_{ki})dz + \frac{\rho_2}{\rho_i} g(h_i - a_i)\frac{\partial}{\partial x}H_i + + g\frac{\partial}{\partial x}\frac{(h_i - a_i)^2}{2} + B_0B_{ji} = \alpha f\int_{a_i}^{h_i} u_{ki}dz, \tag{19}$$

где индекс $i = 1$ соответствует нижнему слою, в котором $a_i = 0$, $h_i = h_1$, $H_i = \Delta h$, а индекс $i = 2$ соответствует верхнему слою, в котором $a_i = h_1$, $h_i = h_2$, $H_i = h_1$; уравнению на x-компоненту соответствуют индексы $j = 1$, $k = 2$ и $\alpha = 1$, а уравнению на y-компоненту соответствуют индексы $j = 2$, $k = 1$ и $\alpha = -1$.

Для окончательного вывода магнитогидродинамических уравнений двуслойной мелкой воды введем усредненные по высоте слоев скорости u_{qi} и магнитные поля B_{qi} (индекс $j = 1$ соответствует $q = x$; индекс $j = 2$ соответствует $q = y$) и представим скорости и магнитные поля в каждом из слоев как сумму усредненных величин и флуктуаций в следующем виде:

$$u_{ji} = u_{qi} + u'_{ji} = \frac{1}{(h_i - a_i)}\int_{a_i}^{h_i} u_{ji}dz + u'_{ji}, \tag{20}$$

$$B_{ji} = B_{qi} + B'_{ji} = \frac{1}{(h_i - a_i)}\int_{a_i}^{h_i} B_{ji}dz + B'_{ji}, \tag{21}$$

где u'_{ji} – флуктуации скорости в нижнем (индекс $i = 1$) и в верхнем (индекс $i = 2$) слоях; B'_{ji} – флуктуации магнитного поля в нижнем (индекс $i = 1$) и в верхнем (индекс $i = 2$) слоях.

Подставим выражения (20), (21) в уравнения (16), (17), (19), пренебрегая слагаемыми, включающими флуктуации [12, 43–45]. В результате получим магнитогидродинамические уравнения стратифицированной плазмы в поле силы тяжести в приближении двуслойной мелкой воды во внешнем магнитном поле

$$\begin{cases}
\partial_t(h_i - a_i) + \partial_x[(h_i - a_i)u_{xi}] + \partial_y[(h_i - a_i)u_{yi}] = 0,\\
\partial_t[(h_i - a_i)u_{xi}] + \partial_x\left[(h_i - a_i)\left(u_{xi}^2 - B_{xi}^2 + \frac{g(h_i - a_i)}{2}\right)\right] + \frac{\rho_2}{\rho_i}g(h_i - a_i)\partial_x H_i +\\
+ \partial_y[(h_i - a_i)(u_{xi}u_{yi} - B_{xi}B_{yi})] + B_0B_{xi} = (h_i - a_i)fv_{yi},\\
\partial_t[(h_i - a_i)u_{yi}] + \partial_x[(h_i - a_i)(u_{xi}u_{yi} - B_{xi}B_{yi})] + \partial_y\left[(h_i - a_i)\left(u_{yi}^2 - B_{yi}^2 + \frac{g(h_i - a_i)}{2}\right)\right] +\\
+ \frac{\rho_2}{\rho_i}g(h_i - a_i)\partial_y H_i + B_0B_{yi} = -(h_i - a_i)fu_{xi},\\
\partial_t[(h_i - a_i)B_{xi}] + \partial_y[(h_i - a_i)(B_{xi}u_{yi} - B_{yi}u_{xi})] - B_0u_{xi} = 0,\\
\partial_t[(h_i - a_i)B_{yi}] + \partial_x[(h_i - a_i)(B_{yi}u_{xi} - B_{xi}u_{yi})] - B_0u_{yi} = 0,\\
\partial_t B_{zi} + B_0(\partial_x u_{xi} + \partial_y u_{yi}) = 0,\\
\partial_x B_{xi} + \partial_y B_{yi} = 0,
\end{cases} \tag{22}$$

где индекс $i = 1$ соответствует нижнему слою, в котором $a_i = 0$, $h_i = h_1$, $H_i = \Delta h$, а индекс $i = 2$ соответствует верхнему слою, в котором $a_i = h_1$, $h_i = h_2$, $H_i = h_1$. Первое уравнение – уравнение, описывающее изменение высоты каждого слоя плазмы, второе и третье уравнения – уравнения для усредненных по высоте горизонтальных скоростей, четвертое и пятое уравнения – уравнения для усредненных по высоте горизонтальных магнитных полей.

Отметим, что наличие внешнего вертикального магнитного поля B_0 приводит к существенным изменениям горизонтальной динамики магнитного поля в приближении мелкой воды [14]. Уравнения для высоты $(h_i - a_i)$, горизонтальных скоростей (u_{xi}, u_{yi}) и магнитных полей (B_{xi}, B_{yi}) представляют собой замкнутую систему, которая используется для дальнейшего исследования. Последние два уравнения в системе (22) обеспечивают условие бездивергентности магнитного поля, которое используется для задания корректных начальных условий. Кроме того, эти уравнения описывают принципиальную трехмерность и осесимметричность магнитных полей в приближении мелкой воды. При внешнем магнитном поле $B_0 = 0$ уравнения (22) переходят в магнитогидродинамические уравнения стратифицированной плазмы в приближении двуслойной мелкой воды [12, 13]. При равенстве высот и плотностей слоев уравнения (22) переходят в магнитогидродинамические уравнения в приближении однослойной мелкой воды во внешнем магнитном поле [14], и при $B_0 = 0$ сводятся к хорошо известным магнитогидродинамическим уравнениям мелкой воды без внешнего магнитного поля [1, 12, 46, 47].

3. ПРИБЛИЖЕНИЕ БЕТА-ПЛОСКОСТИ. ВОЛНЫ МАГНИТО-РОССБИ

Ниже будем исследовать сферические течения тонкого слоя несжимаемой вращающейся плазмы в приближении двуслойной мелкой воды в рамках полученных уравнений (22). Эффекты сферичности учитываем в приближении β-плоскости по аналогии с уравнениями нейтральной жидкости [14]. Считаем, что параметр Кориолиса f слабо меняется при малых изменениях широты. Представим f в следующем виде:

$$\begin{gathered} f = 2\Omega\sin\theta \approx 2\Omega\sin\theta_0 + \\ + 2\Omega(\theta - \theta_0)\cos\theta_0 \approx f_0 + \beta y, \end{gathered} \tag{23}$$

где Ω – угловая скорость вращения, равная для обоих слоев, $f_0 = 2\Omega\sin\theta_0$, $\beta = \partial f/\partial y$, координата y отсчитывается по широте в северном направлении и связяна с θ следующим соотношением $y = r(\theta - \theta_0)$, где r – радиус сферы [18].

В системе (22) дифференцируем уравнения горизонтальных компонент скоростей u_{xi} по y с учетом зависимости параметра Кориолиса от широты (23). Считая $\beta y \ll f_0$, получим следующие уравнения для стратифицированной вращающейся плазмы на бета-плоскости при наличии внешнего магнитного поля:

$$\begin{cases} \partial_t(h_i - a_i) + \partial_x[(h_i - a_i)u_{xi}] + \partial_y[(h_i - a_i)u_{yi}] = 0, \\ \partial_y\partial_t[(h_i - a_i)u_{xi}] + \partial_y\partial_x\left[(h_i - a_i)\left(u_{xi}^2 - B_{xi}^2 + \dfrac{g(h_i - a_i)}{2}\right)\right] + \dfrac{\rho_2}{\rho_i}g\partial_y(h_i - a_i)\partial_x H_i + \\ \quad + \partial_y^2[(h_i - a_i)(u_{xi}u_{yi} - B_{xi}B_{yi})] + B_0\partial_y B_{xi} = f_0\partial_y[(h_i - a_i)v_{yi}] + \beta(h_i - a_i)v_{yi}, \\ \partial_t[(h_i - a_i)u_{yi}] + \partial_x[(h_i - a_i)(u_{xi}u_{yi} - B_{xi}B_{yi})] + \partial_y\left[(h_i - a_i)\left(u_{yi}^2 - B_{yi}^2 + \dfrac{g(h_i - a_i)}{2}\right)\right] + \\ \quad + \dfrac{\rho_2}{\rho_i}g(h_i - a_i)\partial_y H_i + B_0 B_{yi} = -(h_i - a_i)f_0 u_{xi}, \\ \partial_t[(h_i - a_i)B_{xi}] + \partial_y[(h_i - a_i)(B_{xi}u_{yi} - B_{yi}u_{xi})] - B_0 u_{xi} = 0, \\ \partial_t[(h_i - a_i)B_{yi}] + \partial_x[(h_i - a_i)(B_{yi}u_{xi} - B_{xi}u_{yi})] - B_0 u_{yi} = 0, \end{cases} \tag{24}$$

где индекс $i = 1$ соответствует нижнему слою, в котором $a_i = 0$, $h_i = h_1$, $H_i = \Delta h$, а индекс $i = 2$ соответствует верхнему слою, в котором $a_i = h_1$, $h_i = h_2$, $H_i = h_1$. Первое уравнение – уравнение, описывающее изменение высоты каждого слоя плазмы, второе и третье уравнения – уравнения для усредненных по высоте горизонтальных скоростей в бета-приближении для силы Кориолиса, четвертое и пятое уравнения – уравнения для усредненных по высоте горизонтальных магнитных полей.

Волны, вызванные широтной зависимостью силы Кориолиса, принято называть волнами магнито-Россби [19] по аналогии с геофизическими волнами Россби в гидродинамике нейтральной жидкости.

Используем далее уравнения (24) для изучения волн магнито-Россби в стратифицированной плазме в приближении двуслойной мелкой воды на бета-плоскости на фоне стационарного внешнего вертикального магнитного поля. При отсутствии вертикального магнитногополя уравнения (24) переходят в систему магнитогидродинамических уравнений в приближении двуслойной мелкой воды на бета-плоскости, имеют стационарное решение в виде горизонтального (тороидального и полоидального) магнитного поля и будут использованы ниже для изучения волн магнито-Россби.

3.1. Линейные волны магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле

Рассмотрим течение тонкого стратифицированного слоя плазмы в приближении мелкой воды на бета-плоскости во внешнем вертикальном магнитном поле.

Линеаризуем уравнения (24) на фоне стационарного состояния:

$$h_j = h_{0j} = \text{const}; \quad u_{xj} = u_{yj} = B_{xj} = B_{yj} = 0; \quad B_0 = \text{const}.$$

Из условия равенства нулю детерминанта матрицы линеаризованной системы получим следующее дисперсионное соотношение для волн во вращающейся стратифицированной плазме во внешнем вертикальном магнитном поле в приближении двуслойной мелкой воды на бета-плоскости

$$(\omega^4 - b_1\omega^2 - c_1\omega + d_1)(\omega^4 - b_2\omega^2 - c_2\omega + d_2) = \frac{\rho_2}{\rho_1} g^2k^4h_{01}\Delta h_0(\omega^2 + q'\omega + q_1)(\omega^2 + q'\omega + q_2), \tag{25}$$

где

$$b_j = \frac{2B_0^2}{(h_{0j} - a_{0j})^2} + f_0^2 + gk^2(h_{0j} - a_{0j});$$

$$c_j = \beta gk_x(h_{0j} - a_{0j});$$

$$d_j = \frac{B_0^4}{(h_{0j} - a_{0j})^4} + \frac{B_0^2 gk^2}{(h_{0j} - a_{0j})};$$

$$q' = \frac{\beta k_x}{k^2}; \quad q_j = \frac{B_0^2}{(h_{0j} - a_{0j})^2},$$

ω – частота возмущения, $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ – волновой вектор возмущения, $\Delta h_0 = h_{02} - h_{01}$.

Правая часть дисперсионного соотношения (25) описывает эффекты стратификации в двуслойной модели, левая часть является произведением двух выражений, первое из которых соответствует нижнему слою, а второе – верхнему. Строгий теоретический анализ полученного дисперсионного уравнения (25) не представляется возможным, поэтому ограничимся качественным рассмотрением. В первом приближении выделим волны магнито-Россби в отсутствие стратификации [15]. В случае малого различия в плотностях слоев плазмы представим решение дисперсионного уравнения (25) в виде суммы волны магнито-Россби в отсутствие стратификации и малой поправки, связанной со стратификацией плазмы.

Запишем решение для волны магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле в случае отсутствия стратификации в системе. Уравнение (25) при $\rho_1 = \rho_2$ принимает вид

$$\left[\omega^4 - \omega^2\left(\frac{B_0^2}{h_{01}^2} + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} + f_0^2\right) + \frac{B_0^4}{h_{01}^2\Delta h_0^2}\right]\times \times\left[\omega^4 - \omega^2\left(\frac{B_0^2}{h_{01}^2} + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} + f_0^2 + gk^2H\right) - \omega gH\beta k_x + + \frac{B_0^2}{h_{01}\Delta h_0}\left(\frac{B_0^2}{h_{01}\Delta h_0} + gk^2\frac{h_{01}^3 + \Delta h_0^3}{h_{01}\Delta h_0}\right)\right] = 0, \tag{26}$$

откуда для волны магнито-Россби при отсутствии стратификации получаем следующее выражение:

$$\omega_{MR_1} \approx \left[\frac{B_0^2}{h_{01}\Delta h_0}\left(\frac{B_0^2}{h_{01}\Delta h_0} + \frac{gk^2(h_{01}^3 + \Delta h_0^3)}{h_{01}\Delta h_0}\right)\right]\times \times(\beta k_x g h_{02})^{-1}, \tag{27}$$

где $h_{02} = h_{01} + \Delta h_0$. Заметим, что выражение для ω_{MR_1} включает в себя в явном виде высоты обоих слоев. При равных высотах слоев $h_{01} = \Delta h_0 = h/2$ выражение (27) описывает волну магнито-Россби в приближении однослойной мелкой воды [15]:

$$\omega'_{MR_1} \approx 4\frac{B_0^2}{h^2}\left(4\frac{B_0^2}{h^2} + gk^2h\right)(\beta k_x g h_{02})^{-1}.$$

Найдем поправку к частоте, связанную со стратификацией ($\rho_1 \neq \rho_2$). Перепишем уравнение (25) в следующем виде:

$$\left[\omega^4 - \omega^2\left(\frac{B_0^2}{h_{01}^2} + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} + f_0^2\right) + \frac{B_0^4}{h_{01}^2\Delta h_0^2}\right]\times \times\left[\omega^4 - \omega^2\left(\frac{B_0^2}{h_{01}^2} + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} + f_0^2 + gk^2h_{02}\right) - - \omega g h_{02}\beta k_x + \frac{B_0^2}{h_{01}\Delta h_0}\left(\frac{B_0^2}{h_{01}\Delta h_0} + gk^2\frac{h_{01}^3 + \Delta h_0^3}{h_{01}\Delta h_0}\right)\right] = \tag{28}$$

$$= \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right)g^2k^4h_{01}\Delta h_0\left(\omega^2 + \frac{\beta k_x}{k^2}\omega + \frac{B_0^2}{h_{01}^2}\right)\times \times\left(\omega^2 + \frac{\beta k_x}{k^2}\omega + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2}\right).$$

Считаем искомую поправку $\delta_1 = \omega - \omega_{MR_1}$ малой по сравнению с частотой ω_{MR_1}. Обозначим в (28) выражение справа, как $\varphi_1(\rho_2/\rho_1, \omega_{MR_1})$.

Равенство нулю выражения в первой скобке уравнения (28) дает следующие выражения для квадрата частоты:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left(f_0^2 + \frac{B_0^2}{h_{01}^2} + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} \pm \right.$$
$$\left. \pm \sqrt{\left(\frac{B_0^2}{h_{01}^2} - \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2}\right)^2 + f_0^2\left(f_0^2 + \frac{2B_0^2}{h_{01}^2} + \frac{2B_0^2}{\Delta h_0^2}\right)}\right).$$

Если выражение в первой скобке уравнения (28) не обращается в нуль, находим поправку к волне магнито-Россби во внешнем вертикальном поле, связанную с наличием стратификации:

$$\delta_1 = -\frac{\varphi_1(\rho_2/\rho_1, \omega_{MR_1})}{(\omega_{MR_1}^2 - \omega_1^2)(\omega_{MR_1}^2 - \omega_2^2) g h_{02} \beta k_x}. \quad (29)$$

Запишем фазовую $v_{ph_{x1}}$ и групповую $v_{gr_{x1}}$ скорости в направлении k_x для волны магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле в модели двух слоев разной плотности (27), (29)

$$v_{ph_{x1}} = \frac{\omega_{MR_1} + \delta_1}{k_x} = \frac{B_0^2(B_0^2 + gk^2(h_{01}^3 + \Delta h_0^3))}{h_{01}^2 \Delta h_0^2 h_{02} \beta g k_x^2} + $$
$$+ \frac{-\varphi_1(\rho_2/\rho_1, \omega_{MR_1})}{(\omega_{MR_1}^2 - \omega_1^2)(\omega_{MR_1}^2 - \omega_2^2) g h_{02} \beta k_x^2}, \quad (30)$$

$$v_{gr_{x1}} = \frac{\partial(\omega_{MR_1} + \delta_1)}{\partial k_x} =$$
$$= -\frac{B_0^2(B_0^2 + g(h_{01}^3 + \Delta h_0^3)(k_y^2 - k_x^2)}{h_{01}^2 \Delta h_0^2 h_{02} \beta g k_x^2} + \quad (31)$$
$$+ \frac{\partial}{\partial k_x}\left(\frac{-\varphi_1(\rho_2/\rho_1, \omega_{MR_1})}{(\omega_{MR_1}^2 - \omega_1^2)(\omega_{MR_1}^2 - \omega_2^2) g h_{02} \beta k_x}\right).$$

Из (30), (31) видно, что наличие стратификации ($\rho_2 \neq \rho_1$) в системе увеличивает фазовую скорость (30) волны магнито-Россби вдоль направления k_x в вертикальном магнитном поле и уменьшает ее групповую скорость (31) в данном направлении.

Отметим, что дисперсионное уравнение (26) в отсутствие внешнего магнитного поля сводится к дисперсионному уравнению слоя нейтральной жидкости высоты h_{02} в приближении мелкой воды [19]

$$(\omega^2 - f_0^2)[\omega^3 - \omega(f_0^2 + gk^2 h_{02}) - gk_x \beta h_{02}] = 0, \quad (32)$$

и его решением является гидродинамическая волна Россби

$$\omega_R = -\frac{gk_x \beta h_{02}}{f_0^2 + gk^2 h_{02}}. \quad (33)$$

Аналогично найдем поправку, связанную со стратификацией, для гидродинамической волны Россби. Дисперсионное соотношение при малом различии в плотностях имеет вид

$$(\omega^2 - f_0^2)[\omega^3 - \omega(f_0^2 + gk^2 h_{02}) - gk_x \beta h_{02}] =$$
$$= \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right) g^2 k^4 h_{01} \Delta h_0 \left(\omega + \frac{2\beta k_x}{k^2}\right). \quad (34)$$

Обозначая правую часть как $\xi(\rho_2/\rho_1, \omega_R)$, искомую поправку как $\delta_N = \omega - \omega_R$, с учетом $\omega_R^2 \neq f_0^2$, имеем

$$\delta_N = \frac{\xi(\rho_2/\rho_1, \omega_R)}{(f_0^2 + gk^2 h_{02})(\omega_R^2 - f_0^2)}. \quad (35)$$

Таким образом, показано, что в линейном приближении система уравнений двуслойной мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле (24) имеет решение в виде волны магнито-Россби. Найдена зависимость дисперсионного уравнения от соотношения плотностей слоев плазмы. Получено, что поправка к частоте, связанная со стратификацией, уменьшает групповую скорость волн магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле $v_{gr_{x1}}$ и увеличивает фазовую скорость $v_{ph_{x1}}$. Заметим, что параметр β, описывающий эффекты сферичности, присутствует как в выражении для частоты волны магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле без учета стратификации ω_{MR_1} (27), так и в выражении для поправки δ_1 (29), связанной со стратификацией. Однако для гидродинамической волны Россби параметр β отсутствует в поправке δ_N (35), связанной со стратификацией.

3.2. Линейные волны магнито-Россби в горизонтальном магнитном поле

Перейдем к изучению течений тонкого стратифицированного слоя плазмы в приближении мелкой воды на бета-плоскости в отсутствие внешнего вертикального магнитного поля. Как было указано выше, в этом случае уравнения (24) имеют стационарное решение в виде горизонтального магнитного поля

$$u_{xi} = u_{yi} = 0; \quad h_j = h_{0j} = \text{const};$$
$$B_{xi} = B_{x0i} = \text{const}, \quad B_{yi} = B_{y0i} = \text{const}.$$

Из условия равенства нулю детерминанта матрицы линеаризованной системы получим следующее дисперсионное соотношение для волн во вращающейся стратифицированной плазме в горизонтальном поле в приближении двуслойной мелкой воды на бета-плоскости:

$$\begin{gathered}(\omega^4 - b_1\omega^2 - c_1\omega + d_1)(\omega^4 - b_2\omega^2 - c_2\omega + d_2) = \\ = \frac{\rho_2}{\rho_1} g^2k^4h_{01}\Delta h(\omega^2 + q\omega - p_1)(\omega^2 + q\omega - p_2),\end{gathered} \tag{36}$$

где

$$b_j = f_0^2 + 2(k;B)_j^2 + gk^2(h_{0j} - a_{0j});$$
$$c_j = g(h_{0j} - a_{0j})\beta k_x;$$
$$d_j = (k;B)_j^2((k;B)_j^2 + gk^2(h_{0j} - a_{0j});$$
$$q = \frac{\beta k_x}{k^2}; \quad p_j = (k;B)_j^2;$$
$$(k;B)_j^2 = (k_xB_{x0j} + k_yB_{y0j})^2,$$

ω — частота возмущения, $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ — волновой вектор возмущения, $\Delta h_0 = h_{02} - h_{01}$.

Правая часть дисперсионного соотношения (36) описывает эффекты стратификации в двуслойной модели, левая часть является произведением двух выражений, первое из которых соответствует нижнему слою, а второе — верхнему. Строгий теоретический анализ полученного дисперсионного уравнения (36) не представляется возможным, поэтому ограничимся качественным рассмотрением. В первом приближении выделим волны магнито-Россби в отсутствие стратификации [15]. В случае малого различия в плотностях слоев плазмы, представим решение дисперсионного уравнения (36) в виде суммы волны магнито-Россби и малой поправки, связанной со стратификацией плазмы.

Найдем частное решение дисперсионного уравнения (36) для случая равных магнитных полей в слоях $(k;B)_1 = (k;B)_2 \equiv (k;B)$ в виде волны магнито-Россби в отсутствии стратификации в системе ($\rho_1 = \rho_2$). Тогда уравнение (36) имеет вид

$$\begin{gathered}(\omega^4 - \omega^2(f_0^2 + 2(k;B)^2) + (k;B)^4)\times \\ \times(\omega^4 - \omega^2(f_0^2 + 2(k;B)^2 + gh_{02}k^2) - \omega gh_{02}\beta k_x + \\ + (k;B)^2((k;B)^2 + gh_{02}k^2)) = 0.\end{gathered} \tag{37}$$

Правая скобка в уравнении (37) имеет вид дисперсионного уравнения для одного слоя плазмы высоты h_{02} в приближении мелкой воды на бета-плоскости

$$\begin{gathered}\omega^4 - \omega^2(f_0^2 + 2(k;B)^2 + gh_{02}k^2) - \\ - \omega gh_{02}\beta k_x + (k;B)^2((k;B)^2 + gh_{02}k^2) = 0,\end{gathered}$$

что существенно отличает течение плазмы в горизонтальном магнитном поле от течения плазмы при наличии внешнего вертикального поля.

Решением этого уравнения является волна магнито-Россби [15]

$$\omega_{MR_2} \approx \frac{(k;B)^2((k;B)^2 + gk^2h_{02})}{\beta k_x gh_{02}}. \tag{38}$$

В частном случае тороидального магнитного поля дисперсионное соотношение (38) имеет вид [32]

$$\omega_{MR_2x} \approx \frac{k_xB_x^2(k_x^2B_x^2 + gk^2h_{02})}{\beta gh_{02}}.$$

Найдем поправку к частоте, связанную со стратификацией ($\rho_1 \neq \rho_2$). Перепишем уравнение (36) в следующем виде:

$$\begin{gathered}(\omega^4 - \omega^2(f_0^2 + 2(k;B)^2) + (k;B)^4)\times \\ \times(\omega^4 - \omega^2(f_0^2 + 2(k;B)^2 + gh_{02}k^2) - \\ - \omega gh_{02}\beta k_x + (k;B)^2((k;B)^2 + gh_{02}k^2)) = \\ = \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) g^2k^2h_{01}\Delta h_0\Big[k^2\omega^4 - 2\beta k_x\omega^3 + \\ + 2(k;B)^2k^2\omega^2 + 2(k;B)^2\beta k_x\omega - (k;B)^4\Big].\end{gathered} \tag{39}$$

Считаем искомую поправку $\delta_2 = \omega - \omega_{MR_2}$ малой по сравнению с частотой ω_{MR_2}. Обозначим выражение справа, как $\varphi_2\left(\rho_2/\rho_1, \omega_{MR_2}\right)$. Равенство нулю выражения в первой скобке дисперсионного соотношения (39) дает следующие выражения для квадрата частоты:

$$\omega_{3,4}^2 = \frac{f_0^2}{2} + (k;B)^2 \pm f_0\sqrt{\frac{f_0^2}{4} + (k;B)^2}.$$

Если выражение в первой скобке уравнения (39) не обращается в нуль, получаем поправку к частоте в следующем виде:

$$\delta_2 = -\frac{\varphi_2\left(\rho_2/\rho_1, \omega_{MR_2}\right)}{(\omega_{MR_2}^2 - \omega_3^2)(\omega_{MR_2}^2 - \omega_4^2)gh_{02}\beta k_x}. \tag{40}$$

Запишем фазовую $v_{ph_{x2}}$ и групповую $v_{gr_{x2}}$ скорости в направлении k_x для волны магнито-Россби в горизонтальном поле в модели двух слоев разной плотности (38), (40)

$$\begin{gathered}v_{ph_{x2}} = \frac{\omega_{MR_2} + \delta_2}{k_x} = \frac{(k;B)^2((k;B)^2 + gk^2h_{02})}{h_{02}\beta gk_x^2} + \\ + \frac{-\varphi_2\left(\rho_2/\rho_1, \omega_{MR_2}\right)}{(\omega_{MR_2}^2 - \omega_3^2)(\omega_{MR_2}^2 - \omega_4^2)gh_{02}\beta k_x^2},\end{gathered} \tag{41}$$

$$\begin{gathered}v_{gr_{x2}} = \frac{\partial(\omega_{MR_2} + \delta_2)}{\partial k_x} = \frac{1}{h_{02}\beta gk_x^2}\times \\ \times\Big[(k;B)((k;B)^2(4B_{x0}k_x - (k;B)) + \\ + gh_{02}(2B_{x0}k_x(k_x^2 + k_y^2) +\end{gathered} \tag{42}$$

$$+ 2(k;B)k_x^2 - (k;B)(k_x^2 + k_y^2))\Big] +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial k_x}\left(\frac{-\varphi_2\left(\rho_2/\rho_1, \omega_{MR_2}\right)}{(\omega_{MR_2}^2 - \omega_3^2)(\omega_{MR_2}^2 - \omega_4^2)gh_{02}\beta k_x}\right).$$

Из (41), (42) видно, что наличие стратификации ($\rho_2 \neq \rho_1$) в системе уменьшает групповую скорость (42) волны магнито-Россби вдоль направления k_x. Фазовая скорость волны магнито-Россби вдоль направления k_x (41) при очень малых k_x ($k_x < 1$) увеличивается с ростом отношения плотностей ρ_2/ρ_1. Однако при $k_x > 1$ наличие стратификации в системе приводит к заметному уменьшению фазовой скорости волны (41) вдоль k_x.

Если в дисперсионном соотношении (36) приравнять плотности $\rho_1 = \rho_2$ и положить внешнее магнитное поле равным нулю ($B_{x0i} = 0, B_{y0i} = 0$), выражение (36) сводится к дисперсионному уравнению для слоя нейтральной жидкости высоты h_{02} (32) с решением в виде гидродинамической волны Россби в нестратифицированной жидкости (33) и поправкой вследствие стратификации (35).

Таким образом, показано, что в отсутствие внешнего вертикального магнитного поля система (24) в линейном приближении имеет решение в виде волны магнито-Россби в горизонтальном магнитном поле, модифицированной соотношением плотностей слоев плазмы. Найденные поправки к частоте, связанные со стратификацией, изменяют групповую $v_{gr_{x2}}$ и фазовую $v_{ph_{x2}}$ скорости волны магнито-Россби. Отметим, что полученные в разделе дисперсионные соотношения для частоты волны магнито-Россби в горизонтальном магнитном поле ω_{MR_1} и поправки, связанной со стратификацией δ_1, существенно отличаются от аналогичных выражений, полученных для плазмы во внешнем магнитном поле ω_{MR_2}, δ_2. Параметр β, описывающий эффекты сферичности, также присутствует в выражении для частоты волны магнито-Россби в горизонтальном магнитном поле ω_{MR_1} (38) и в выражении для поправки к ней δ_1, связанной со стратификацией (40), как это было отмечено в случае внешнего вертикального магнитного поля.

4. ТРЕХВОЛНОВЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН МАГНИТО-РОССБИ. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Исследуем слабонелинейные взаимодействия волн магнито-Россби в двуслойной модели мелкой воды. Для того чтобы оценить возможность межволновых взаимодействий для найденных волн, проанализируем дисперсионные соотношения, полученные в разделе 3. Условие синхронизма для трех взаимодействующих волн с волновыми векторами $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ и $\mathbf{k}_3$ и частотами $\omega(\mathbf{k}_1)$, $\omega(\mathbf{k}_2)$ и $\omega(\mathbf{k}_3)$, соответственно, имеет вид [15]

$$\omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) = \omega(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2); \quad \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3. \tag{43}$$

Чтобы определить, существуют ли такие три волны магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле (27), (29) и в горизонтальном магнитном поле (38), (40), удовлетворяющие условию синхронизма (43), необходимо изобразить две дисперсионные кривые, смещенные друг относительно друга, для каждого случая. Первое слагаемое $\omega(\mathbf{k}_1)$ в условии синхронизма (43) задает точку $(k_1, \omega(k_1))$ на дисперсионной кривой. На смещенной дисперсионной кривой слагаемое $\omega(\mathbf{k}_2)$ задает точку $(k_2, \omega(k_2))$. Если при смещении относительно начала координат одной из дисперсионных кривых она пересечет другую в некоторой точке $(k_3, \omega(k_3))$, то это будет означать выполнение условия синхронизма (43). На рис. 2 изображены дисперсионные кривые при наличии внешнего вертикального магнитного поля, на рис. 3 изображены кривые для случая горизонтального магнитного поля.

Как видно из рис. 2 и 3, в случае наличия внешнего магнитного поля и в случае горизонтального магнитного поля условие синхронизма выполняется [48].

Для изучения трехволновых взаимодействий мы используем асимптотический метод многомасштабных разложений для системы магнитогидродинамических уравнений (24) стратифицированной плазмы в приближении двуслойной мелкой воды на бета-плоскости во внешнем магнитном поле [14–16]. Поскольку метод многомасштабных разложений широко используется для исследования слабонелинейных взаимодействий, мы ограничимся кратким изложением вывода амплитудных уравнений и приведем полученные выражения для коэффициентов взаимодействия. Представим решение системы уравнений (24) в виде асимптотического ряда по малому параметру ε:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \varepsilon\mathbf{q}_1 + \varepsilon^2\mathbf{q}_2 + \ldots, \tag{44}$$

где $\mathbf{q}_0$ – стационарное решение полной системы, $\mathbf{q}_1$ – решение линеаризованной системы в виде плоской волны с известным законом дисперсии (27), (29) для уравнений мелкой воды во внешнем магнитном поле и законом дисперсии (38), (40) для уравнений мелкой воды в горизонтальном магнитном поле. Слагаемое $\mathbf{q}_2$ – поправка к решению, описывающая влияние квадратичной нелинейности. Уравнение для поправки $\mathbf{q}_2$ получается во втором порядке малости по параметру ε, в правой части которого содержатся резонансные слагаемые, приводящие к линейному росту реше-

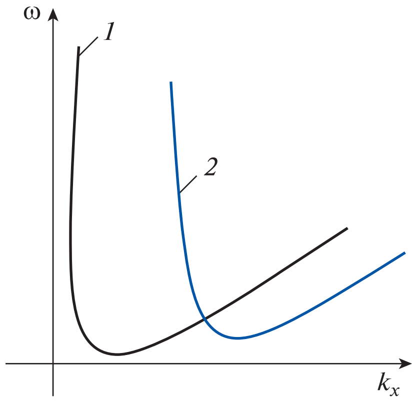

Рис. 2. Условие синхронизма для волн магнито-Россби во внешнем магнитном поле ($B_0 \neq 0$): *1* — $\omega = \omega(k)$, *2* — $\omega = \omega(k - k_{x_1}) - \omega(k_{x_1})$.

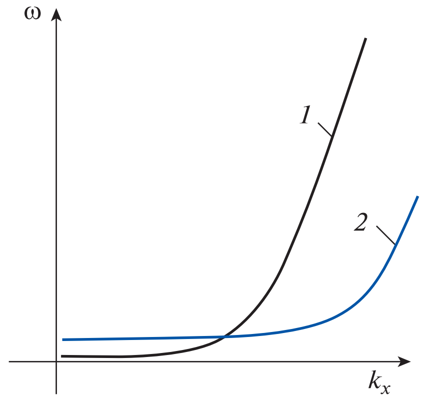

Рис. 3. Условие синхронизма для волн магнито-Россби в отсутствие внешнего магнитного поля ($B_0 = 0$): *1* — $\omega = \omega(k)$, *2* — $\omega = \omega(k - k_{x_1}) - \omega(k_{x_1})$.

ния по времени и координатам. Таким образом, условие $\varepsilon^2 q_2 \ll \varepsilon q_1$ на больших масштабах нарушается, поэтому, чтобы исключить влияние резонансных слагаемых, вводим медленно меняющуюся амплитуду, зависящую от медленного времени и больших пространственных масштабов.

Представим решение в виде суммы трех волн магнито-Россби, удовлетворяющих условию синхронизма (43)

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_1(T_1, X_1, Y_1)\exp[i(\omega T_0 - k_x X_0 - k_y Y_0)] = \\ = \phi\mathbf{a}(\mathbf{k}_1)\exp(i\theta_1) + \psi\mathbf{a}(\mathbf{k}_2)\exp(i\theta_2) + \\ + \chi\mathbf{a}(\mathbf{k}_3)\exp(i\theta_3) + c.c.,\end{aligned} \tag{45}$$

где ϕ, ψ, χ — амплитуды взаимодействующих волн, $\theta_i = -\omega(\mathbf{k}_i)T_0 + k_{xi}X_0 + k_{yi}Y_0$ — фазы волн, $\mathbf{a}$ — комплексный вектор волны, сокращение *c.c.* использовано для обозначения комплексно-сопряженных слагаемых.

“Быстрые” переменные (T_0, X_0, Y_0) связаны с “медленными” (T_1, X_1, Y_1) следующими соотношениями:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1}; \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X_0} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial X_1}; \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial Y_0} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial Y_1}.\end{gathered} \tag{46}$$

Подставим в систему (24) магнитогидродинамических уравнений стратифицированной плазмы во внешнем вертикальном магнитном поле в приближении мелкой воды решение (44) с учетом (46) и (45). Во втором порядке малости получим систему линейных неоднородных уравнений с резонансами в правой части. Для исключения резонансных слагаемых воспользуемся условием совместности, заключающемся в ортогональности правой части ядру линейного оператора, стоящего в левой части системы уравнений. Таким образом, умножая правую часть на собственный вектор линейного оператора, стоящего в левой части, выпишем последовательно слагаемые, пропорциональные $e^{i\theta_1}$, $e^{i\theta_2}$ и $e^{i\theta_3}$. В результате получим систему для трех амплитуд взаимодействующих пакетов волн магнито-Россби в приближении двуслойной мелкой воды

$$s_1\phi = f_1\psi^*\chi, \tag{47}$$

$$s_2\psi = f_2\phi^*\chi, \tag{48}$$

$$s_3\chi = f_3\phi\psi, \tag{49}$$

где s_n — дифференциальный оператор по “медленным” аргументам T_1, X_1, Y_1, а коэффициенты f_m зависят только от начальных условий и характеристик взаимодействующих волн. Система (47)–(49) описывает трехволновые взаимодействия волн магнито-Россби, удовлетворяющих условию синхронизма (43). Каждое из трех уравнений системы описывает нелинейное влияние величин амплитуд двух взаимодействующих волн на третью волну.

Во внешнем вертикальном магнитном поле дифференциальный оператор s_n имеет вид

$$s_n = r_n\frac{\partial}{\partial T_1} + p_n\frac{\partial}{\partial X_1} + q_n\frac{\partial}{\partial Y_1},$$

где коэффициент r_n при производной по медленному времени T_1

$$\begin{aligned}r_n = \{z_1a_1 + h_{01}(ik_{y_n}z_2a_3 + z_3a_4 + z_4a_5 + z_5a_6)\} + \\ + \{z_6a_{2-1} + \Delta h_0(ik_{y_n}z_7a_7 + z_8a_8 + z_9a_9 + z_{10}a_{10})\},\end{aligned} \tag{50}$$

коэффициент p_n при производной по координате X_1

$$p_n = \{h_{01}(z_1a_3 + z_2ik_{y_n}ga_1)\} + \\ + \frac{\rho_2}{\rho_1}z_2ik_{y_n}gh_{01}a_{2-1} + \{\Delta h_0(z_6a_7 + z_7ik_{y_n}ga_1)\}, \tag{51}$$

а коэффициент q_n при производной по координате Y_1

$$q_n = \Big\{h_{01}(z_1a_4 + z_2(-i\omega(\mathbf{k}_n)a_3 + ik_{x_n}ga_1 - \\ - \frac{B_0a_5}{h_{01}} - f_0a_4) + z_3ga_1)\Big\} + \frac{\rho_2}{\rho_1}a_{2-1}gh_{01}(z_2ik_{x_n} + z_3) + \\ + \Big\{\Delta h_0(z_6a_8 + z_7(-i\omega(\mathbf{k}_n)a_7 + ik_{x_n}ga_1 - \\ - \frac{B_0a_9}{\Delta h_0} - f_0a_8) + z_8a_1)\Big\}. \tag{52}$$

В этих коэффициентах $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{k}_n)$, $n = 1, 2, 3$. Здесь и далее $a_{2-1} = a_2 - a_1$.

Коэффициенты f_m, зависящие только от начальных условий и характеристик взаимодействующих волн, имеют следующий вид:

$$f_m = \{L_1\} + \frac{\rho_2}{\rho_1}R + \{L_2\}. \tag{53}$$

Выражение L_1 соответствует нижнему слою плазмы и имеет вид

$$L_1 = 2iz_1[k_{x_m}a_1a_3 + k_{y_m}a_1a_4] + z_2[k_{y_m}(2\omega(\mathbf{k}_m)a_1a_3 - \\ - 2k_{x_m}(a_3^*a_3 - a_5^*a_5) - 2k_{y_m}(a_3a_4 - a_5a_6) + \\ + \alpha g(k_{x_l}a_1a_1^* - \alpha k_{x_c}a_1^*a_1)) - if_0(k_{y_c}a_1^*a_4 - k_{y_l}a_1a_4^*) - \\ - 2\beta a_1a_4] + z_3[-2i\omega(\mathbf{k}_m)a_1a_4 + 2ik_{y_m}(a_4^*a_4 - a_6^*a_6) + \\ + 2ik_{x_m}(a_3a_4 - a_5a_6) + ik_{y_m}ga_1a_1^* + 2f_0a_1a_3] - \\ - 2iz_4[\omega(\mathbf{k}_m)a_1a_5 + k_{y_m}h_0(a_3a_6 - a_4a_5)] - \\ - 2iz_5[\omega(\mathbf{k}_m)a_1a_6 + k_{x_m}h_0(a_4a_5 - a_3a_6)].$$

Выражение L_2 соответствует верхнему слою и имеет вид

$$L_2 = 2iz_6[k_{x_m}a_{2-1}a_7 + k_{y_m}a_{2-1}a_8] + z_7[k_{y_m}(2\omega(\mathbf{k}_m)a_{2-1}a_7 - \\ - 2k_{x_m}(a_7^*a_7 - a_9^*a_9) - 2k_{y_m}(a_7a_8 - a_9a_{10}) + \\ + \alpha g(k_{x_l}a_{2-1}a_1^* - \alpha k_{x_c}a_{2-1}^*a_1)) - if_0(k_{y_c}a_{2-1}^*a_8 - \\ - k_{y_l}a_{2-1}a_8^*) - 2\beta a_{2-1}a_8] + z_8[-2i\omega(hbfk_2)a_{2-1}a_8 + \\ + 2ik_{y_m}(a_8^*a_8 - a_{10}^*a_{10}) + 2ik_{x_m}(a_7a_8 - a_9a_{10}) + \\ + ig(k_{y_c}a_1a_{2-1}^* - k_{y_l}a_1^*a_{2-1}) + 2f_0a_{2-1}a_7] - \\ - 2iz_9[\omega(\mathbf{k}_m)a_{2-1}a_9 + k_{y_m}\Delta h_0(a_7a_{10} - a_8a_9)] - \\ - 2iz_{10}[\omega(\mathbf{k}_m)a_{2-1}a_{10} + k_{x_m}\Delta h_0(a_8a_9 - a_7a_{10})].$$

Выражение R описывает влияние стратификации и имеет вид:

$$R = g[z_2\alpha k_{y_m}(k_{x_l}a_1a_{2-1}^* - \alpha k_{x_c}a_1^*a_{2-1}) + \\ + z_3i(k_{y_c}a_1^*a_{2-1} - k_{y_l}a_{2-1}^*a_1)].$$

Произведения вида $a_ia_j = [a_i^*(\mathbf{k}_l)a_j(\mathbf{k}_c) + a_i(\mathbf{k}_c)a_j^*(\mathbf{k}_l)]/2$. Если индекс $m = 1$, то индекс $l = 2$, индекс $c = 3$ и множитель $\alpha = 1$. Если индекс $m = 2$,то индекс $l = 1$, индекс $c = 3$ и множитель $\alpha = 1$. Если индекс $m = 3$, то индекс $l = 1$, индекс $c = 2$, множитель $\alpha = -1$ и $a_i^* = a(\mathbf{k}_1)$.

Рассмотрим подробнее коэффициенты взаимодействия (51)–(53). Слагаемые в каждом коэффициенте разделяются на два выражения в фигурных скобках, имеющие схожий вид, и промежуточные слагаемые, включающие в себя отношение плотностей слоев плазмы. Слагаемые в первой фигурной скобке относятся к нижнему слою плазмы, слагаемые, стоящие во второй фигурной скобке, относятся к верхнему. Промежуточные слагаемые описывают эффекты стратификации. При условии равенства нулю одной из высот слоев, равенства плотностей ($\rho_2 = \rho_1$) и компонент $a_{2-1} = a_1$ комплексного волнового вектора волны $\mathbf{a}$ коэффициенты (51)–(53) взаимодействия трех волн магнито-Россби во внешнем магнитном поле в приближении двуслойной мелкой воды переходят в коэффициенты для трех взаимодействующих волн магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле в однослойной мелкой воде [19].

Рассмотрим далее систему уравнений стратифицированной плазмы в приближении двуслойной мелкой воды в горизонтальном магнитном поле. Аналогично получим систему амплитудных уравнений для трех волн с отличием в коэффициентах p_n и q_n:

$$p'_n = \{h_{01}(z_1a_3 + z_2ik_{y_n}(ga_1 - a_5B_{x_{01}}) - \\ - B_{x_{01}}(z_3a_6 + z_4a_3 + z_5a_4))\} + \frac{\rho_2}{\rho_1}z_2ik_{y_n}gh_{01}a_{2-1} + \\ + \{\Delta h_0(z_6a_7 + ik_{y_n}z_7(ga_1 - a_9B_{x_{02}}) - \\ - B_{x_{02}}(z_8a_{10} + z_9a_7 + z_{10}a_8))\}.$$

$$q'_n = \{h_{01}(z_1a_4 + z_2[-i\omega(\mathbf{k}_n)a_3 - ia_5(B_{x_{01}}k_{x_n} + 2B_{y_{01}}k_{y_n}) + \\ + ik_{x_n}ga_1 - f_0a_4] + z_3g(a_1 - a_6B_{y_{01}}) - z_4a_3B_{y_{01}} - \\ - z_5a_4B_{y_{01}})\} + \frac{\rho_2}{\rho_1}a_{2-1}h_{01}g(z_2ik_{x_n} + z_3) +$$

$$+\left\{\Delta h_0(z_6a_8 + z_7[-i\omega a_7 - ia_9(B_{x_{02}}k_{x_n} + 2B_{y_{02}}k_{y_n}) + \right.$$
$$+ ik_{x_n}ga_1 - f_0a_8] + z_8(a_1 - a_{10}B_{y_{02}}) -$$
$$\left. - z_9a_7B_{y_{02}} - z_{10}a_8B_{y_{02}}\right\}.$$

Здесь, как и в случае с внешним вертикальным магнитным полем, слагаемые в первой фигурной скобке относятся к нижнему слою плазмы, слагаемые, стоящие во второй фигурной скобке относятся к верхнему слою плазмы, а промежуточные слагаемые связаны со стратификацией. Поскольку остальные коэффициенты будут отличаться от аналогичных для внешнего вертикального магнитного поля только компонентами собственного вектора **z**, то для них верны все предыдущие выводы, включая переход к аналогичным коэффициентам воднослойной мелкой воде [15].

Система уравнений (47)–(49) описывает параметрические неустойчивости в обоих рассмотренных случаях как во внешнем вертикальном магнитном поле, так и в горизонтальном поле [15, 16]. Поскольку уравнения трехволновых взаимодействий для стратифицированной жидкости в двуслойном приближении отличаются лишь коэффициентами взаимодействия, то в двуслойной модели реализуются те же самые параметрические неустойчивости, которые были найдены в [15]. Основное отличие в нашем случае заключается в инкрементах параметрических неустойчивостей и пороговых значениях, которые теперь зависят от соотношения плотностей.

В случае когда амплитуда одной из волн много больше амплитуд двух других ($\phi \gg \psi, \chi$, $\phi = \phi_0$) система (47)–(49) принимает вид

$$s_2\psi = f_2\phi_0^*\chi,$$
$$s_3\chi = f_3\phi_0\psi.$$

Решение полученной системы ищется в виде $(\psi,\chi)^T = (\psi',\chi)^T \exp(\Gamma_1 T_1)$, откуда для инкремента неустойчивости получаем выражение $\Gamma_1 = \sqrt{|f_2f_3|/|r_2r_3|}|\phi_0| > 0$.

Таким образом, волна магнито-Россби с волновым вектором $\mathbf{k}_1$ и частотой $\omega(\mathbf{k}_1)$ распадается на две волны магнито-Россби с волновыми векторами $\mathbf{k}_2$ и $\mathbf{k}_3$, частотами $\omega(\mathbf{k}_2)$ и $\omega(\mathbf{k}_3)$ соответственно.

Второй тип параметрической неустойчивости – усиление волнами магнито-Россби с волновыми векторами $\mathbf{k}_2$ и $\mathbf{k}_3$, частотами $\omega(\mathbf{k}_2)$ и $\omega(\mathbf{k}_3)$, соответственно, волны магнито-Россби с волновым вектором $\mathbf{k}_1$ и частотой $\omega(\mathbf{k}_1)$. Данный тип неустойчивости имеет место, когда амплитуда одной из волн много меньше двух других ($\phi \ll \psi, \chi$, $\psi = \psi_0$, $\chi = \chi_0$). Тогда система (47)–(49) вырождается в уравнение вида

$$s_1\phi = f_1\psi_0^*\chi_0.$$

Решение данного уравнения ищется в виде $\phi = \phi'\exp(\Gamma_2 T_1)$, откуда для инкремента неустойчивости получаем выражение $\Gamma_2 = (|f_1|/|r_1|)|\psi_0\chi_0| > 0$.

В случае параметрического распада при наличии линейного затухания система (47)–(49) принимает вид

$$s_2\psi + \eta_2\psi = f_2\phi_0^*\chi,$$
$$s_3\chi + \eta_3\chi = f_3\phi_0\psi,$$

где η_2, η_3 – линейные коэффициенты затухания амплитуд ψ, χ соответственно.

В таком случае существует пороговое значение амплитуды волны накачки $\phi_{0_{cr}} = \sqrt{(\eta_2\eta_3|r_2r_3|)/(|f_2f_3|)}$, начиная с которого развивается неустойчивость с инкрементом $\Gamma_1' = \sqrt{(\phi_{0_{cr}}|f_2f_3|)/(|r_2r_3|)}$.

В случае параметрического усиления при наличии линейного затухания система (47)–(49) вырождается в уравнение вида

$$s_1\phi + \eta_1\phi = f_1\psi_0^*\chi_0,$$

где η_1 – линейный коэффициент затухания амплитуды ϕ.

В таком случае существует пороговое значение на произведение амплитуд волн накачки $(\psi_0^*\chi_0)_{cr} = (\eta_1|r_1|)/(f_1)$, начиная с которого развивается неустойчивость с инкрементом $\Gamma_2' = ((\psi_0^*\chi_0)_{cr}|f_1|)/(|r_1|)$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развита нелинейная теория течений тонкого слоя стратифицированной плазмы в поле силы тяжести со свободной границей во внешнем вертикальном магнитном поле при наличии вращения. Получены магнитогидродинамические уравнения в приближении мелкой воды при разбиении плазмы на два слоя различной плотности. В частном случае равенства высот и плотностей каждого слоя магнитогидродинамические уравнения двуслойной мелкой воды сводятся к уравнениям однослойной мелкой воды во внешнем магнитном поле, полученным в [9, 14, 40]. Показано, что, несмотря на двухкомпонентность и двумерность поля скоростей в каждом из слоев, магнитное поле является трехкомпонентным и осесимметричным в приближении мелкой воды.

Развитая теория обобщена на случай сферических течений в приближении бета-плоскости для силы Кориолиса. Показано, что в линейном приближении полученная система допускает решение в виде волн магнито-Россби, характеристики которых модифицированы соотношением плотностей слоев плазмы. Найдено, что поправка к частоте, связанная со стратификацией, уменьшает групповые скорости волн магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле и увеличивает их фазовые скорости.

Полученная система магнитогидродинамических уравнений двуслойной плазмы в приближении мелкой воды при отсутствии внешнего магнитного поля имеет решение в виде стационарного горизонтального магнитного поля. Дисперсионное уравнение в этом приближении также имеет решение в виде волн магнито-Россби, модифицированных соотношением плотностей. Найдено, что поправка к частоте, связанная со стратификацией, также уменьшает групповые скорости волн магнито-Россби. Фазовая скорость демонстрирует более сложное поведение, а именно, при очень малых волновых векторах ($k_x < 1$) поправка к частоте увеличивает фазовую скорость, а затем, при больших значениях волнового вектора, уменьшает.

Качественный анализ полученных дисперсионных соотношений показывает выполнение условия синхронизма для трех взаимодействующих волн как при наличии внешнего магнитного поля, так и в его отсутствии. Методом многомасштабных разложений получены уравнения взаимодействия трех волн в обоих рассмотренных случаях, и показана возможность наличия параметрических неустойчивостей, и найдены их характеристики. Несмотря на универсальность полученных уравнений трехволновых взаимодействий, коэффициенты взаимодействия в полученных уравнениях, и как следствие, характеристики найденных параметрических неустойчивостей различаются для каждого рассмотренного случая.

Работа поддержана Фондом развития теоретической физики и математики “Базис” и грантом РФФИ номер 19-02-00016; выполнена по проекту КП19-270 “Вопросы происхождения и эволюции Вселенной с применением методов наземных наблюдений и космических исследований” программы крупных проектов по проведению фундаментальных научных исследований по приоритетным направлениям, определяемым президиумом РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gilman P.A.* // Astrophys. J. Lett. 2000. V. 544 (1). P. L79. https://doi.org/10.1086/317291.B
2. *Miesch M.S., Gilman P.A.* // Solar Phys. 2004. V. 200 (2). P. 287. https://doi.org/10.1023/b:sola.0000031382.93981.2c
3. *Zaqarashvili T.V., Oliver R., Ballester J.L.* // Astrophys. J. Lett. 2009. V. 691. P. L41. https://doi.org/10.1088/0004-637x/691/1/l41
4. *Dikpati M., Gilman P.A.* // Astrophys. J. 2001. V. 551 (1). P. 536.
5. *Dikpati M., McIntosh S.W., Bothun G., Cally P.S., Ghosh S.S., Gilman P.A., Umurhan O.M.* // Astrophys. J. 2018. V. 853 (2). P. 144. https://doi.org/10.3847/1538-4357/aaa70d
6. *Márquez-Artavia X., Jones C.A., Tobias S.M.* // Geophys. Astrophys. Fluid Dynam. 2017. V. 111 (4). P. 282. https://doi.org/10.1080/03091929.2017.1301937
7. *Cho J.Y.-K.* // Phillos. Trans Royal Soc. London Ser. A. 2008. V. 366 (1884). P. 4477. https://doi.org/10.1098/rsta.2008.0177
8. *Spitkovsky A., Levin Y., Ushomirsky G.* // Astrophys. J. 2002. V. 566. P. 1018. https://doi.org/10.1086/338040
9. *Heng K., Spitkovsky A.* // Astrophys. J. 2009. V. 703. P. 1819. https://doi.org/10.1088/0004-637x/703/2/1819
10. *Inogamov N.A., Sunyaev R.A.* // Astron. Lett. 2010. V. 36. P. 848. https://doi.org/10.1134/s1063773710120029
11. *Inogamov N.A., Sunyaev R.A.* // Astron. Lett. 1999. V. 25. P. 269.
12. *Zeitlin V.* // Nonlin. Proc. Geophys. 2013. V. 20. P. 893. https://doi.org/10.5194/npg-20-893-2013
13. *Hunter S.* Waves in Shallow Water Magnetohydrodynamics. Diss. University of Leeds. 2015. http://etheses.whiterose.ac.uk/11475/
14. *Klimachkov D.A., Petrosyan A.S.* // Phys. Lett. A. 2017. V. 381. P. 106. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2016.10.011
15. *Климачков Д.А., Петросян А.С.* // ЖЭТФ. 2017. Т. 152. С. 705.
16. *Климачков Д.А., Петросян А.С.* // ЖЭТФ. 2016. Т. 150. С. 602.
17. *Vallis G.K.* Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics: Fundamentals and Large-Scale Circulation. Cambridge Univ. Press, 2006.
18. *Должанский Ф.* Основы геофизической гидродинамики. Litres, 2018.
19. *Незлин М.В., Снежкин Е.Н.* Вихри Россби и спиральные структуры: Астрофизика и физика плазмы в опытах на мелкой воде. М.: Физматлит, 1990.
20. *Онищенко О.Г., Похотелов О.А., Астафьева Н.М.*// УФН. 2008. Т. 178 С. 605. https://doi.org/10.3367/UFNr.0178.200806c.0605
21. *Saio H.* // Astrophys. J. 1982. V. 256. P. 717.
22. *Sturrock P.A., Bush R., Gough D.O., Scargle J.D.* // Astrophys. J. 2015. V. 804. P. 47. https://doi.org/10.1088/0004-637x/804/1/47
23. *Wolff C.L.* // Astrophys. J. 1998. V. 502. P. 961. https://doi.org/10.1086/305934
24. *McIntosh S.W., Cramer W.J., Pichardo Marcano M., Leamon R.J.* // Nat. Astron. 2017. V. 1 (4). P. 0086. https://doi.org/10.1038/s41550-017-0086

25. *Loeptien B., Gizon L., Birch A.C., Schou J., Proxauf B., Duvall Jr. T.L., Bogart R.S., Christensen U.R.* // Nat. Astron. 2018. V. 2 (7). P. 568. https://doi.org/10.1038/s41550-018-0460-x
26. *Dikpati M., Cally P.S., McIntosh S.W., Heifetz E.* // Sci. Rep. 2017. V. 7 (1). P. 14750. https://doi.org/10.1038/s41598-017-14957-x
27. *Dikpati M., Belucz B., Gilman P.A., McIntosh S.W.* // Astrophys. J. 2018. V. 862(2). P. 159. https://doi.org/10.3847/1538-4357/aacefa
28. *Zaqarashvili T.V., Gurgenashvili E.* // Front. Astron. Space Sci. 2018. V. 6. P. 7. https://doi.org/10.3389/fspas.2018.00007
29. *Dikpati M., Charbonneau P.* // Astrophys. J. 1999. V. 518. P. 508. https://doi.org/10.1086/307269
30. *Hughes D.W., Rosner R., Weiss N.O.* The Solar Tachocline. Cambridge Univ. Press, 2007.
31. *Zaqarashvili T.V., Oliver R., Ballester J. L., Carbonell M., Khodachenko M.L., Lammer H., Leitzinger M., Odert P.* // Astron. Astrophys. 2011. V. 532. P. A139. https://doi.org/10.1051/0004-6361/201117122
32. *Zaqarashvili T.V., Oliver R., Ballester J.L., Schergerashvili B.M.* // Astron. Astrophys. 2007. V. 470. P. 815.
33. *Onishchenko O.G., Pokhotelov O.A., Sagdeev R.Z., Shukla P.K., Stenflo L.* // Nonlin. Proc. Geophys. 2004. V. 11 (2). P. 241. https://doi.org/10.5194/npg-11-241-2004
34. *Lovelace R.V.E., Romanova M.M.* // Fluid Dynam. Res. 2014. V. 46 (4). P. 041401. https://doi.org/10.1088/0169-5983/46/4/041401
35. *Зиняков Т.А., Петросян А.С.* // Письма ЖЭТФ. 2018. Т. 108. С. 75.
36. *Tobias S.M., Diamond P.H., Hughes D.W.* // Astrophys. J. Lett. 2007. V. 667 (1). P. L113. https://doi.org/10.1086/521978
37. *Hori K., Jones C.A., Teed R.J.* // Geophys. Res. Lett. 2015. V. 42 (16). P. 6622. https://doi.org/10.1002/2015gl064733
38. *Петвиашвили В.И., Похотелов О.А.* Уединенные волны в плазме и атмосфере. М.: Энергоатомиздат, 1989.
39. *Raphaldini B., Raupp C.F.M.* // Astrophys. J. 2015. V. 799 (1). P. 78.
40. *Климачков Д.А., Петросян А.С.* // ЖЭТФ. 2018. Т. 154. С. 1239.
41. *Арцимович Л.А., Сагдеев Р.З.* Физика плазмы для физиков. М.: Атомиздат, 1979.
42. *Кадомцев Б.Б.* Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1976.
43. *Карельский К.В., Петросян А.С., Тарасевич С.В.* // ЖЭТФ. 2011. Т. 140. С. 606.
44. *Karelsky K.V., Petrosyan A.S., Tarasevich S.V.* // Phys. Scripta. 2013. V. 155. P. 014024. https://doi.org/10.1088/0031-8949/2013/t155/014024
45. *Карельский К.В., Петросян А.С., Тарасевич С.В.* // ЖЭТФ. 2014. Т. 146. С. 352.
46. *Karelsky K.V., Petrosyan A.S.* // Fluid Dyn. Res. 2006. V. 38. P. 339. https://doi.org/10.1016/j.fluiddyn.2006.02.001
47. *Карельский К.В., Петросян А.С., Черняк А.В.* // ЖЭТФ. 2013. Т. 143. С. 779.
48. *Newell A.C.* // J. Fluid Mech. 1969. V. 35. P. 255. https://doi.org/10.1017/s0022112069001108