

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

УДК 533.951

КВАДРАТИЧНАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ СИЛЬНО НЕОДНОРОДНОЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЫ

© 2020 г. А. Ю. Попов^{a, *}, П. В. Третинников^a, Е. З. Гусаков^a, Л. В. Симончик^b

^a Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербург, Россия

^b Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси, Минск, Республика Беларусь

*e-mail: a.porov@mail.ioffe.ru

Поступила в редакцию 03.07.2019 г.

После доработки 22.08.2019 г.

Принята к публикации 22.08.2019 г.

Получено выражение для высокочастотной квадратичной восприимчивости сильно неоднородной магнитоактивной плазмы, которое описывает нелинейную связь волны необыкновенной поляризации с продольными колебаниями и позволяет объяснить большое аномальное поглощение волны накачки, наблюдаемое в модельных экспериментах.

Ключевые слова: трехволновое взаимодействие в неоднородной плазме, двухплазмонный параметрический распад электромагнитной волны

DOI: 10.31857/S0367292120020092

1. ВВЕДЕНИЕ

Нелинейные явления, которые имеют место при взаимодействии электромагнитного излучения большой мощности с плазмой в ионосфере, космическом пространстве, в термоядерных установках с магнитным удержанием и при лазерном термоядерном синтезе, интенсивно исследовались последние десятилетия. Было показано, что наиболее опасными среди них с точки зрения предсказуемости распространения волновых пучков и их поглощения является параметрическое возбуждение в плазме собственных колебаний, которое может сопровождаться аномальным нагревом, частичным отражением греющего излучения и генерацией групп ускоренных ионов и электронов. Был достигнут значительный прогресс в понимании природы этих явлений, сценариев их развития в неоднородной плазме [1, 2] и порогов возбуждения, в частности, применительно к СВЧ-диапазону частот [3, 4]. Последние оказались столь высоки, что, казалось бы, не оставляли возможности наблюдения параметрических распадных不устойчивостей где бы то ни было, за исключением дополнительного нагрева в тороидальных ловушках с использованием сильно замедленных электронных бернштейновских волн [5–7] и экспериментов в рамках программы лазерного термоядерного синтеза. Однако в последнее десятилетие как экспериментально [8, 9], так и теоретически [10–14] показана возможность низкорогового возбуждения каскада последовательных распадов микроволнового излучения в тороидальных магнитных ловушках. Это при-

влекло к теме, которая казалась ранее глубоко проработанной, пристальное внимание. В частности, для подробного изучения механизма низкороговых параметрических распадов микроволновых пучков были поставлены модельные эксперименты в разряде низкого давления на линейной установке “Гранит” (ИФ НАН Беларуси). Полученные результаты оказались обескураживающими. В условиях, когда линейные механизмы взаимодействия СВЧ-волны с электронами отсутствовали, было обнаружено гигантское (до 80%) поглощение мощности проходящей через плазму СВЧ-волны [15–17], причем только в условиях, когда верхняя гибридная частота в плазменном объеме была равна половине частоты волны накачки. Последнее указывало на связь возможного возбуждения дочерних верхнегибридных (ВГ) волн на частоте, равной половине частоты распадающейся волны, и наблюдавшегося сильного аномального эффекта. Поскольку размеры плазменного филамента в установке “Гранит” много меньше локальной длины волны излучения в плазме, то, фактически, имело место параметрическое возбуждение верхнегибридных (ВГ) волн однородным СВЧ электрическим полем. Однако, как хорошо известно в теории [18], нелинейный коэффициент связи пространственно однородных СВЧ-колебаний плазмы с потенциальными дочерними волнами, имеющими одинаковые частоты и распространяющимися в противоположных направлениях, равен нулю, что делает возбуждение двухплазмонного распада в этих условиях невозможным. Для объяснения экспериментальных данных был предложен но-

вый механизм нелинейной связи, учитывающий наличие большого градиента плотности плазмы [19]. Высокочастотная нелинейная восприимчивость сильно неоднородной плазмы была найдена в работе [19] в гидродинамическом приближении для случая распада волны необыкновенной поляризации на две дочерние ВГ-волны, имеющие одну частоту, что позволило качественно описать наблюдавшиеся закономерности [15, 16]. Однако для количественного согласия с экспериментальными данными и описания распада накачки на два продольных сильно замедленных колебания необходимо получить общее выражение для билинейной восприимчивости сильно неоднородной плазмы в кинетическом приближении. Ранее эта задача в литературе не обсуждалась, что делает актуальным последовательный вывод и подробный анализ функции отклика.

2. ВЫСОКОЧАСТОТНАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ СИЛЬНО НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ

Рассмотрим параметрический распад волны накачки необыкновенной поляризации, которая распространяется поперек внешнего магнитного поля $\mathbf{H}$, направленного по оси z , вдоль направления неоднородности плазмы x . Электрическое поле этой волны может быть представлено как

$$\mathbf{E}_0 = E_0(x) \mathbf{e}_0 \exp(-i\omega_0 t) + c.c., \quad (1)$$

где $\mathbf{e}_0 = -ig_0/\varepsilon_0 \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y$ – вектор поляризации, имеющий компоненты вдоль координат x и y , $g_0 = g(\omega_0)$ и $\varepsilon_0 = \varepsilon(\omega_0)$ – компоненты тензора диэлектрической проницаемости “холодной” плазмы. Рассмотрим случай, когда локальная длина волны накачки в области нелинейного взаимодействия значительно превышает как ее размер, так и характерный масштаб неоднородности L_n плазмы. Этот случай может реализовываться как в сферических токамаках на периферии плазмы, где имеет место большой градиент плотности, так и в обычных тороидальных установках в области транспортного барьера, а также в модельных экспериментах на линейных установках в разрядах слабоионизованной плазмы. Сделанное предположение позволяет пренебречь как пространственной структурой накачки (1), так и компонентами ее магнитного поля. В этом случае мы фактически рассматриваем пространственно однородные СВЧ-колебания плазмы и их распад на две продольные (электростатические) волны, которые возбуждаются на частоте $\omega_{1,2} = \omega_0/2$ и распространяются в противоположных направлениях, перпендикулярных внешнему магнитному полю и направлению неоднородности. Электрические поля дочерних электростатических коле-

баний могут быть выражены через их потенциалы и представлены в ВКБ-приближении в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= -i\phi_1 q \mathbf{e}_y \exp(iqy + i\omega_1 t) + c.c., \\ \mathbf{E}_2 &= -i\phi_2 q \mathbf{e}_y \exp(iqy - i\omega_2 t) + c.c., \end{aligned} \quad (2)$$

где $q = \text{const}$. Для того чтобы описать нелинейную связь продольных колебаний (2) в присутствии накачки (1), найдем выражение для нелинейной (квадратичной) восприимчивости. Для этого рассмотрим уравнение Власова бесстолкновительной замагниченной плазмы, которое описывает слабо неравновесную функцию распределения электронов,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{|e|E_i}{m_e} \frac{\partial}{\partial v_i} - \omega_c e_{ijz} v_j \frac{\partial}{\partial v_i} \right) f_e = 0, \quad (3)$$

где e_{ijz} – полностью антисимметричный единичный тензор. Будем искать решение уравнения (3), используя процедуру теории возмущений

$$f_e = f^{(0)} + \sum_{\substack{s=0-2, \\ k=1,2,\dots}} f_s^{(k)}(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t), \quad (4)$$

где квазиравновесная функция распределения неоднородной плазмы с постоянной температурой отличается от максвелловской f_M и имеет вид

$$f^{(0)} = f^{(0,0)} + f^{(0,1)} = \bar{n} f_M \left(1 + \frac{v_y}{\omega_c L_n} \right), \quad (5)$$

$f^{(0)} = \bar{n} f_M$, $\bar{n}$ – равновесная плотность, $f_M = f_M(v^2)$ – максвелловская функция распределения, нормированная на единицу $\int f_M(v^2) d^3v = 1$. Второй член в уравнении (5) описывает эффект диамагнитного тока частиц в магнитном поле в присутствии градиента плотности. Подставим (4) в уравнение (3) и, выделяя члены первого и второго порядка, выпишем сначала уравнение для линейной

$$\begin{aligned} \left(-i\alpha_s + i\lambda_s \sin(\theta) + \frac{v_\perp \cos(\theta)}{\omega_c} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \right) f_s^{(1)} = \\ = \frac{|e|E_{si}}{m_e \omega_c} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial v_i}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $s = 0-2$, $\lambda_0 = 0$, $\lambda_{1,2} = v_\perp q / \omega_c$, $\alpha_{0,2} = \omega_{0,2} / \omega_c$, $\alpha_1 = -\omega_1 / \omega_c$ а затем квадратичной поправки к функции распределения (приведем ее для $s = 2$)

$$\begin{aligned} \left(-i\alpha_2 + i\lambda_2 \sin(\theta) + \frac{v_\perp \cos(\theta)}{\omega_c} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \right) f_2^{(2)} = \\ = \frac{|e|}{m_e \omega_c} \frac{\partial}{\partial v_i} (E_{0i} f_1^{(1)} + E_{1i} f_0^{(1)}). \end{aligned} \quad (7)$$

Проинтегрируем (6) по азимутальным углам гиравращения электрона θ , придем к интегральному уравнению

$$f_s^{(1)} = \int_{-\infty}^{\theta} dt G_s(\theta, t) \times \left(-\frac{v_{\perp} \cos(t)}{\omega_c} \frac{\partial f_s^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{e}{m_e \omega_c} E_{si} f_s^{(0)} \right) \right). \quad (8)$$

Аналогично из уравнения (7) приходим к интегральному уравнению для квадратичной поправки к функции распределения (5)

$$f_2^{(2)} = \int_{-\infty}^{\theta} dt G_2(\theta, t) \times \left(-\frac{v_{\perp} \cos(t)}{\omega_c} \frac{\partial f_2^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{e}{m_e \omega_c} E_{0i} f_1^{(1)} + \frac{e}{m_e \omega_c} E_{1i} f_0^{(1)} \right) \right). \quad (9)$$

В уравнениях (8) и (9) ядро интегрального оператора есть

$$G_s(\theta, \tau) = \exp(i\alpha_s(\theta - \tau) + i\lambda_s(\cos(\theta) - \cos(\tau))). \quad (10)$$

Будем искать решения уравнений (8) и (9) в виде

$$f_s^{(j)} = f_s^{(j,0)} + f_s^{(j,1)}, \quad j = 1, 2, \quad (11)$$

где первые слагаемые в правых частях отвечают величинам, вычисленным в однородной плазме, а вторые слагаемые являются поправками и учитывают неоднородность плотности плазмы. Подставим (11) в интегральное уравнение (8) и, разделяя члены нулевого и первого порядка по параметру $v_{\perp}/(\omega_c L_n)$, получим для линейной поправки к функции распределения электронов без учета неоднородности следующее выражение:

$$f_s^{(1,0)} = -\frac{|e|}{2T_e \omega_c} v_{\perp} f_s^{(0)} \sum_{n,m} e^{i(n-m)(\theta-\pi/2)} \frac{J_m(\lambda_s)}{(n-\alpha_s)} \times (J_{n-1}(\lambda_s) E_s^- - J_{n+1}(\lambda_s) E_s^+), \quad (12)$$

где $E_s^{\pm} = E_{sx} \pm iE_{sy}$.

Выражение, определяющее линейную поправку к функции распределения, связанную с неоднородностью плазмы $f_s^{(1,1)}$, можно представить в виде

$$f_s^{(1,1)} = \frac{|e|}{4T_e \omega_c^2 L_n} v_{\perp}^2 f_s^{(0)} \sum_{n,m} e^{i(n-m)(\theta-\pi/2)} \frac{1}{(n-\alpha_s)} \times \left\{ (J_{n-1}(\lambda_s) E_s^- - J_{n+1}(\lambda_s) E_s^+) \times \left(J_{m+1}(\lambda_s) \frac{1}{(n+1-\alpha_s)} - J_{m-1}(\lambda_s) \frac{1}{(n-1-\alpha_s)} \right) + \right. \\ \left. + \frac{v_{te}^2}{v_{\perp}^2} J_m(\lambda_s) \left(\frac{v_{\perp}^2}{v_{te}^2} (J_{n-2}(\lambda_s) E_s^- - J_{n+2}(\lambda_s) E_s^+) + 2iJ_n(\lambda_s) E_{sy} \left(1 - \frac{v_{\perp}^2}{v_{te}^2} \right) \right) \right\}. \quad (13)$$

Подставим (11) в интегральное уравнение (9) и, разделяя члены нулевого и первого порядка по

параметру $v_{\perp}/(\omega_c L_n)$, получим для квадратичного ВЧ-возмущения функции распределения электронов в горячей однородной плазме:

$$f_2^{(2,0)} = \frac{|e|}{m_e \omega_c} \times \int_{-\infty}^{\theta} dt \exp(i\alpha_2(\theta - t) + i\lambda_2(\cos(\theta) - \cos(t))) \times \frac{\partial}{\partial v_i} (E_{0i} f_1^{(1,0)} + E_{1i} f_0^{(1,0)}). \quad (14)$$

Квадратичная поправка, описывающая влияние неоднородности плазмы на функцию распределения, имеет вид

$$f_2^{(2,1)} = \int_{-\infty}^{\theta} dt \exp(i\alpha_2(\theta - t) + i\lambda_2(\cos(\theta) - \cos(t))) \times \left(\frac{|e|}{m_e \omega_c} \frac{\partial}{\partial v_i} (E_{0i} f_1^{(1,1)} + E_{1i} f_0^{(1,1)}) - \frac{v_{\perp} \cos(t)}{\omega_c L} f_2^{(2,0)} \right). \quad (15)$$

Отметим, что явное вычисление нелинейных возмущений функции распределения весьма громоздко и не обязательно для описания квадратичной функции отклика плазмы. Вместо этого удобнее сразу приступить к вычислению билинейной плотности заряда $\rho_2^{(2)} = -|e| \int_0^{\infty} v_{\perp} dv_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \int_0^{2\pi} d\theta f_2^{(2)}$. Поскольку в случае пространственно-однородной плазмы и волны накачки нелинейная плотность заряда $\rho_2^{(2,0)}$ равна нулю [20, 21], необходимо вычислить лишь квадратичную составляющую плотности заряда, связанную с неоднородностью плазмы $f_2^{(2,1)}$,

$$\rho_2^{(2)} = \frac{|e|^2}{m_e \omega_c} \int_0^{\infty} v_{\perp} dv_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_{-\infty}^{\theta} dt \exp(i\alpha_2(\theta - t) + i\lambda_2(\cos(\theta) - \cos(t))) \times \left(\frac{v_{\perp} \cos(t)}{\omega_c L} \int_{-\infty}^t ds \exp(i\alpha_2(t - s) + i\lambda_2(\cos(t) - \cos(s))) \frac{\partial}{\partial v_i} (E_{0i} f_1^{(1,0)} + E_{1i} f_0^{(1,0)}) - \frac{\partial}{\partial v_i} (E_{0i} f_1^{(1,1)} + E_{1i} f_0^{(1,1)}) \right). \quad (16)$$

Проинтегрировав выражение (16) по частям, а затем, последовательно проведя интегрирование по переменным s, t, θ, v_z , в итоге получим следую-

щее выражение плотности заряда на частоте второй дочерней волны:

$$\rho_2^{(2)} = -2\pi^2 q^2 \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_c^2} \frac{c}{\omega_c L_n} \Phi_1 \times \int_0^\infty dv_\perp v_\perp \int_0^\infty dv_z f_M(W_1 + W_2), \quad (17)$$

где безразмерные подынтегральные функции суть

$$\begin{aligned} W_1 = & \frac{1}{H} \sum_n J_n(\lambda_2) \left\| \frac{2}{((\alpha_2 - n)^2 - 1)} \times \right. \\ & \times \left(\frac{v_\perp^2}{v_{te}^2} \left(\frac{J_{n-2}(\lambda_2)}{(\alpha_0 - 1)} E_0^- - \frac{J_{n+2}(\lambda_2)}{(\alpha_0 + 1)} E_0^+ + \right. \right. \\ & + J_n(\lambda_2) \frac{1}{\alpha_0} \left(\frac{E_0^+}{\alpha_0 + 1} + \frac{E_0^-}{\alpha_0 - 1} \right) \Bigg) + i J_n(\lambda_2) \frac{2}{\alpha_0} \times \\ & \times E_{0y} \left(1 - \frac{v_\perp^2}{v_{te}^2} \right) \Bigg) + \frac{1}{(\alpha_2 - n)} + \frac{1}{(\alpha_1 - n)} \times \\ & \times \left(\frac{E_0^+}{(\alpha_2 - n + 1)} - \frac{E_0^-}{(\alpha_2 - n - 1)} \right) \times \\ & \times \left(\frac{v_\perp^2}{v_{te}^2} \left(\frac{2(n-1)J_{n-1}(\lambda_1)}{(\alpha_1 - n + 1)\lambda_1} - \frac{2(n+1)J_{n+1}(\lambda_1)}{(\alpha_1 - n - 1)\lambda_1} \right) + \right. \\ & + i \left(-\frac{v_\perp^2}{v_{te}^2} (J_{n+2}(\lambda_1) + J_{n-2}(\lambda_1)) + \right. \\ & \left. \left. + 2J_n(\lambda_1) \left(1 - \frac{v_\perp^2}{v_{te}^2} \right) \right) \right\|, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\alpha_2 = -\alpha_1 = \alpha_0/2, \text{ и}$$

$$\begin{aligned} W_2 = & \frac{1}{H} \frac{v_\perp^2}{v_{te}^2} \sum_{p,n} \frac{1}{(\alpha_2 - p)} \times \\ & \left\| \left(\frac{J_{p+1}(\lambda_2)}{(\alpha_2 - p - 1)} - \frac{J_{p-1}(\lambda_2)}{(\alpha_2 - p + 1)} \right) \times \right. \\ & \times \left((\delta_{n,p+1} E_0^+ - \delta_{n,p-1} E_0^-) \frac{2nJ_n(\lambda_2)}{(\alpha_1 - n)\lambda_2} + \right. \\ & + \left(\frac{2(p-n)J_{p-n}(\lambda_2)}{\lambda_2} \times \right. \\ & \times \left(\delta_{n-1} \frac{E_0^+}{(\alpha_0 + 1)} - \delta_{n,1} \frac{E_0^-}{(\alpha_0 - 1)} \right) \Bigg) - \\ & - \left(\frac{J_{p+1}(\lambda_2)}{(\alpha_2 - p - 1)} - \frac{J_{p-1}(\lambda_2)}{(\alpha_2 - p + 1)} \right) \times \\ & \times \left(\frac{2nJ_n(\lambda_2)}{(\alpha_1 - n)\lambda_2} \left(\frac{1}{\lambda_1} (\delta_{n,p-1} E_0^- (p+1) + \right. \right. \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & + \delta_{n,p+1} E_0^+ (p-1) + 2\delta_{n,p} E_{0y} \Bigg) + \\ & + \frac{1}{\lambda_1} \left((p+1)J_{p-n-1}(\lambda_2) - (p-1)J_{p-n+1}(\lambda_2) \right) \times \\ & \times \left(\delta_{n-1} \frac{E_0^+}{(\alpha_0 + 1)} - \delta_{n,1} \frac{E_0^-}{(\alpha_0 - 1)} \right) \Bigg\|. \end{aligned}$$

Из выражения (17) согласно определению $4\pi\rho_2^{(2)} = -\chi_e^{nl} \Phi_1$ найдем выражение для нелинейной восприимчивости сильно неоднородной замагниченной плазмы

$$\chi_e^{nl} = -\frac{\pi}{2} q^2 \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_c^2} \frac{c}{\omega_c L_n} \int_0^\infty dv_\perp v_\perp \int_0^\infty dv_z f_M(W_1 + W_2). \quad (20)$$

Отметим, что это выражение описывает также распад на два продольных колебания с разными частотами. Причем, для того чтобы эффекты неоднородности доминировали, разница частот должна удовлетворять неравенству

$$\frac{2|\omega_2 - \omega_1|}{\omega_0} \ll \frac{1}{qL_n}. \quad (21)$$

В противоположном неравенству (21) предельном случае $2|\omega_2 - \omega_1|/\omega_0 > (q_\perp L_n)^{-1}$ основной вклад в нелинейную восприимчивость вносят члены, пропорциональные $2|\omega_2 - \omega_1|/\omega_0$, а эффект неоднородности плазмы приводит лишь к малой поправке к знакомому выражению для нелинейной проницаемости, полученному для однородной плазмы в дипольном приближении [18].

В пределе длинных дочерних волн ($\lambda_{1,2} \ll 1$) выражение (20) сводится к формуле

$$\chi_e^{nl} = q^2 \frac{\omega_{pe}^2 \omega_c^2}{\Delta_0 \Delta} \frac{c}{\omega L_n H} \left(E_{0x} \frac{\Delta}{\omega \omega_c} + i \frac{3}{2} E_{0y} \right) \quad (22)$$

(где $\omega_{1,2} = \omega$ и $\Delta = \omega^2 - \omega_c^2$), которая совпадает с выражением для нелинейной восприимчивости χ_e^{nl} , полученным в гидродинамическом приближении (см. Приложение, соотношение (П12)).

Отметим, что нелинейная восприимчивость χ_e^{nl} (см. (20), (22)) является комплексной величиной. В однородной плазме инкремент неустойчивости γ определяется ее модулем $|\chi_e^{nl}|$ [1–3], т.е. $\gamma = |\chi_e^{nl}| / |\partial \chi_e^l / \partial \omega| - \nu_d$, где χ_e^l – линейная восприимчивость плазмы на частоте дочерней волны, ν_d – декремент, описывающий ее столкновительное или бесстолкновительное поглощение. В неоднородной плазме коэффициент пространственного усиления Γ дочерних волн, покидающих область резонансного взаимодействия размером l_d с групповой скоростью v_g вдоль на-

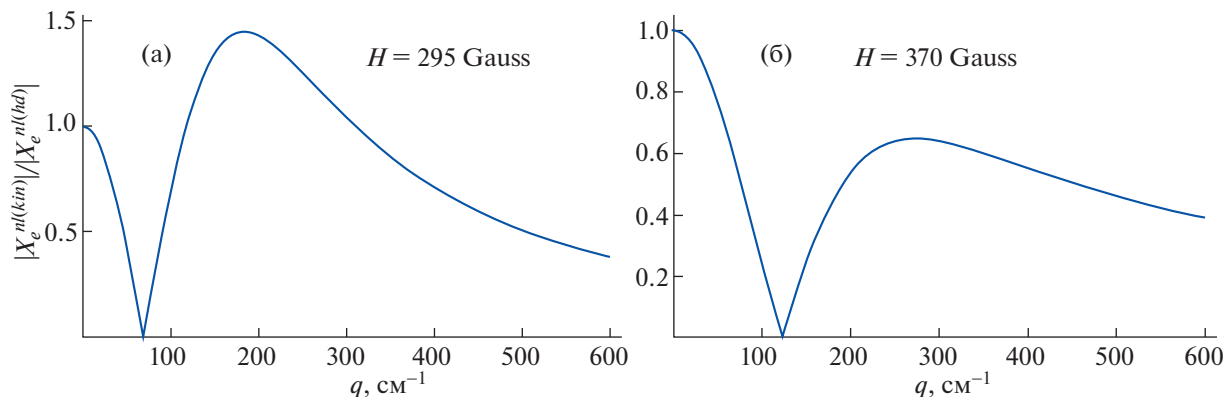


Рис. 1. Зависимость отношения выражений (П12) и (22), $\left| \chi_e^{nl(kin)} \right| / \left| \chi_e^{nl(hd)} \right|$, от волнового числа q дочерних волн для двух значений магнитного поля: а) – $H = 295$ Гс; б) – $H = 370$ Гс.

правления неоднородности, определяется квадратом модуля этой величины [1, 2], т.е.

$$\Gamma = \frac{\pi |\chi_e^{nl}|^2}{|\partial \chi_e^l / \partial \omega|^2} \frac{l_d^2}{|v_g|^2}.$$

Далее мы сравним два выражения для нелинейной восприимчивости: полученные в гидродинамическом приближении (П12) и из кинетического уравнения (20) для конечных значений волнового числа дочерних волн. На рисунке 1 приведено отношение выражений $\left| \chi_e^{nl(kin)} \right| / \left| \chi_e^{nl(hd)} \right|$ как функция волнового вектора q для двух значений магнитного поля, типичных для экспериментов на линейной установке “Гранит” [17]. Видно, что для разных параметров, выражение (П12) может как занижать, так и завышать величину нелинейной связи, что делает актуальным использование полученного в настоящей работе выражения (20) с коэффициентами (18) и (19) для описания экспериментов.

3. ВЫВОДЫ

В работе впервые получено выражение для нелинейной (квадратичной) высокочастотной восприимчивости сильно неоднородной плазмы в кинетическом приближении, которое описывает нелинейную связь СВЧ-колебаний плазмы с двумя электростатическими колебаниями. В предельном случае длинноволновых дочерних колебаний полученное выражение (22) воспроизводит выражения, выведенные в рамках гидродинамического приближения (П12). Оно позволяет прописать нелинейную связь пространственно однородных колебаний с продольными волнами, возбуждаемыми в сильно неоднородной плазме на одной частоте, которая отсутствует в однородном случае $L_n \rightarrow \infty$. Полученные результаты развивают представления нелинейной электродинамики и могут быть полез-

ны при анализе нелинейных эффектов при СВЧ-нагреве в сферических токамаках на периферии плазмы, где имеет место большой градиент плотности. Они позволяют количественно описать гигантское аномальное поглощение СВЧ-волн в плазменном филаменте в модельных экспериментах на линейной установке [17].

Кинетический анализ билинейной восприимчивости плазмы выполнен при поддержке гранта РФФИ 18-52-00010, а гидродинамическое рассмотрение проведено в рамках государственного контракта ФТИ им. А.Ф. Иоффе РАН.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Найдем выражение для нелинейной (квадратичной) восприимчивости из уравнений гидродинамики

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{u}) = 0, \quad (\text{П1})$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\omega_c (\mathbf{u} \times \mathbf{e}_z) - \frac{|e|}{m_e} \mathbf{E}, \quad (\text{П2})$$

где (П1) – уравнение непрерывности, (П2) – уравнение баланса сил, $\omega_c = |\omega_{ce}|$, ω_{ce} – электронная циклотронная частота. Будем искать плотность электронов как сумму квазиравновесного неоднородного распределения $\bar{n} = \bar{n}(x)$ и высокочастотных возмущений

$$n_e = \bar{n} + n_0 + n_1 + n_2, \quad (\text{П3})$$

вызванных присутствием колебаний (1) и (2), где $n_0 \propto \exp(-i\omega_0 t)$, $n_1 \propto \exp(iqy + i\omega_1 t)$, $n_2 \propto \exp(iqy - i\omega_2 t)$. Осцилляторная скорость электрона $\mathbf{u}$ в уравнении (П2) есть сумма осцилляторных скоростей

$$\mathbf{u} = \sum_{i=0+2}^{s=1,2} \mathbf{u}_i^{(s)} \quad (\text{П4})$$

частицы в электрических полях взаимодействующих волн

$$\mathbf{E} = \sum_{i=0-2} \mathbf{E}_i \quad (\text{П5})$$

В выражении (П4) верхний индекс (1) маркирует компоненты скорости, отвечающие электрическим полям в линейном приближении, а индекс (2) соответствует компонентам скорости частицы, появляющимся в результате биений двух колебаний. Решение линеаризованной системы (П2) имеет вид

$$\begin{aligned} u_{ix}^{(1)} &= -\frac{|e|\omega_c}{m_e \Delta_i} (i\alpha_i E_{ix} + E_{iy}), \\ u_{iy}^{(1)} &= -\frac{|e|\omega_c}{m_e \Delta_i} (i\alpha_i E_{iy} - E_{ix}), \quad i = 0, 1, 2. \end{aligned} \quad (\text{П6})$$

Подставим (П6) в уравнение (П1) и в результате получим

$$n_0^{(1)} = -\frac{i}{L_n \omega_0} \bar{n} u_{0x}^{(1)}, \quad (\text{П7})$$

$$n_{1,2}^{(1)} = \pm \frac{i}{L_n \omega_{1,2}} \bar{n} u_{1,2x}^{(1)} \mp \frac{q}{\omega_{1,2}} \bar{n} u_{1,2y}^{(1)}, \quad (\text{П8})$$

где введены обозначения $\Delta_i = \omega_i^2 - \omega_c^2$, $\alpha_{0,2} = \omega_{0,2}/\omega_c$, $\alpha_1 = -\omega_1/\omega_c$. Билинейная составляющая решения системы (П1), (П2) для колебаний на частоте ω_2 дает

$$\begin{pmatrix} u_{2x}^{(2)} \\ u_{2y}^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta_2} \begin{pmatrix} \omega_2 & -i\omega_c \\ i\omega_c & \omega_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q u_{0y}^{(1)} u_{1x}^{(1)} \\ q u_{1y}^{(1)} u_{0y}^{(1)} \end{pmatrix} \quad (\text{П9})$$

и

$$\begin{aligned} n_2^{(2)} &= -\frac{1}{\omega_2 L_n} \left(\bar{n}(x) u_{2x}^{(2)} + n_0^{(1)} u_{1x}^{(1)} + n_1^{(1)} u_{0x}^{(1)} \right) + \\ &+ \frac{q}{\omega_2} \left(\bar{n}(x) u_{2y}^{(2)} + n_0^{(1)} u_{1y}^{(1)} + n_1^{(1)} u_{0y}^{(1)} \right). \end{aligned} \quad (\text{П10})$$

В итоге, нелинейная плотность заряда $\rho_2^{(2)} = -|e|n_2^{(2)}$ на частоте второй ВГ волны равна

$$\begin{aligned} \rho_e^{nl} &= -q^2 \frac{\omega_{pe}^2 \omega_c^2}{\Delta_0 \Delta_1 \omega_1 \omega_2} \frac{c}{L_n} \frac{\Phi_1}{4\pi H} \times \\ &\times \left(E_{0x} \frac{(\omega_1 \omega_2 - \omega_c^2)}{\omega_c} - i E_{0y} \frac{(\omega_1 \omega_2 - \omega_0^2)}{\omega_0} \right). \end{aligned} \quad (\text{П11})$$

Введем определение нелинейной восприимчивости согласно соотношению $4\pi\rho_2^{(2)} = -\chi_e^{nl} \Phi_1$. Учитывая, что $\omega_{1,2} = \omega$, в рассматриваемом случае имеем

$$\chi_e^{nl} = q^2 \frac{\omega_{pe}^2 \omega_c^2}{\Delta \Delta_0} \frac{c}{\omega L_n} \frac{1}{H} \left(E_{0x} \frac{\Delta}{\omega_c} + i \frac{3}{2} E_{0y} \right), \quad (\text{П12})$$

где $\Delta = \omega^2 - \omega_c^2$, $E_{0x,y} = \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{e}_{0x,y}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rosenbluth M.N. // Phys. Rev. Lett. 1972. V. 29. P. 565.
2. Пилия А.Д. // ЖЭТФ. 1973. Т. 64. С. 1237. [A.D. Piliya // Sov. Phys. JETP. 1973. V. 37. P. 629]
3. Cohen B.I., Cohen R.H., Nevins W.M., Rognlien T.D. // Rev. Mod. Phys. 1991. V. 63. P. 949.
4. Litvak A.G., Sergeev A.M., Suvorov E.V., Tokman M.D., Khazanov I.V. // Phys. Fluids B. 1993. V. 5. P. 4347.
5. Булыгинский Д.Г., Дьяченко В.В., Ирзак М.А., Ларионов М.М., Левин Л.С., Серебряный Г.А., Шустова Н.В. // Физика плазмы. 1986. Т. 12. С. 138. [D.G. Bulyginsky, V.V. Dyachenko, M.A. Irzak, M.M. Larionov, L.S. Levin, G.A. Serebreniy, N.V. Shustova // Sov. J. Plasma Phys. 1986. V. 12. P. 884.]
6. Laqua H. P., Erckmann V., Hartfuß H.J. and the W7-AS Team ECRH Group // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 78. P. 3467.
7. Gusakov E.Z., Surkov A.V. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2007. V. 49. P. 631.
8. Westerhof E., Nielsen S.K., Oosterbeek J.W., Salewski M., de Baar M.R., Bongers W.A., Bürger A., Hennen B.A., Korsholm S.B., Leipold F., Moseev D., Stejner M., Thoen D.J. and the TEXTOR Team // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 103. 125001.
9. Nielsen S.K., Salewski M., Westerhof E., Bongers W., Korsholm S.B., Leipold F., Oosterbeek J.W., Moseev D., Stejner M. and the TEXTOR Team // Plasma Phys. Control. Fusion. 2013. V. 55. 115003.
10. Gusakov E.Z., Popov A.Yu. // Phys. Rev. Lett. 2010. V. 105. 115003.
11. Gusakov E.Z., Popov A.Yu. // Europhys. Lett. 2012. V. 99. 15001.
12. Popov A.Yu., Gusakov E.Z. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2015. V. 57. 025022.
13. Popov A.Yu., Gusakov E.Z. // Europhys. Lett. 2016. V. 116. 45002.
14. Popov A.Yu., Gusakov E.Z. // JETP Lett. 2017. V. 105. P. 78.
15. Altukhov A.B., Arkhipenko V.I., Gurchenko A.D., Gusakov E.Z., Popov A.Yu., Simonchik L.V., Sysoeva E.V., Usachonak M.S. // Proc. 44th EPS Conf. on Plasma Physics, Belfast, 2017. ECA. V. 41F. P. P5.415.
16. Simonchik L.V., Altukhov A.B., Arkhipenko V.I., Gurchenko A.D., Gusakov E.Z., Popov A.Yu., Usachonak M.S. // EPJ Web of Conferences. 2017. V. 149. 03013.
17. Altukhov A.B., Arkhipenko V.I., Gurchenko A.D., Gusakov E.Z., Popov A.Yu., Simonchik L.V., Usachonak M.S. // EPL. 2019. V. 126. 15002.
18. Силин В.П. Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму. М.: Наука, 1973.
19. Гусаков Е.З., Попов А.Ю., Третинников П.В. // Письма в ЖЭТФ. 2018. Т. 108. С. 83.
20. Гусаков Е.З., Попов А.Ю. // ЖЭТФ. 2018. Т. 154. С. 179.
21. Gusakov E.Z., Popov A.Yu. // Nucl. Fusion. 2018. V. 58. 096033.