

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЛЯ МАЛОРАЗМЕРНЫХ КВАЗИДВУМЕРНЫХ КЛАСТЕРОВ

© 2020 г. О. С. Ваулина^{a, b, *}, Э. А. Саметов^{a, b}, Е. А. Лисин^{a, b}, И. И. Лисина^{a, b}

^a Объединенный институт высоких температур РАН, Москва, Россия

^b Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),
Долгопрудный, Московская обл., Россия

*e-mail: olga.vaulina@bk.ru

Поступила в редакцию 25.03.2020 г.

После доработки 20.04.2020 г.

Принята к публикации 27.04.2020 г.

Представлены результаты исследования спектральных характеристик стохастического движения заряженных частиц для квазидвумерных кластеров в электрическом поле ловушки. Рассмотрены характерные частоты частиц и способ их аналитического вычисления. Предложены аналитические соотношения для спектральной плотности смещений в малоразмерных кластерах, состоящих до семи заряженных частиц, взаимодействующих с попарным потенциалом. Полученные соотношения проверены путем численного моделирования задачи.

Ключевые слова: пылевая плазма, заряженные частицы

DOI: 10.31857/S0367292120110098

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование стохастического (теплового) движения взаимодействующих частиц представляет интерес в различных областях науки и техники [1–6].

Комплексная (пылевая) плазма представляет собой ионизованный газ, содержащий заряженные частицы вещества микронных размеров (пыль) [1–3]. Экспериментальные и теоретические исследования теплового движения заряженных пылевых частиц в газоразрядной плазме представлены в различных работах [7–13]. В обычных условиях в центре газоразрядных камер наблюдается некоторое превышение концентрации ионов плазмы над концентрацией ее электронной компоненты [14], что приводит к формированию эффективных ловушек для отрицательно заряженных частиц пыли [1, 2]. Лабораторные эксперименты с небольшим количеством пылевых частиц позволяют проводить исследования собственных и вынужденных колебаний частиц, изучать влияние различных внешних воздействий, а также разрабатывать новые методы диагностики [15–22].

Подробную информацию об особенностях теплового движения заряженных частиц можно получить путем анализа спектральной плотности их смещений и характерных частот колебаний. Информация о спектральной плотности тепловых смещений частиц в равновесных системах

позволяет анализировать их температуру, коэффициенты трения и полный спектр частот их собственных колебаний. Это, в свою очередь, дает возможность оценить реакцию системы на кратковременные или периодические внешние возмущения, а также позволяет определить характер и тип потенциала взаимодействия между частицами среды [7–9, 23, 24].

Исследование взаимодействий между пылевыми частицами в комплексной плазме вызывает постоянный интерес [1–3]. За последние годы появилось немало работ, посвященных разработке экспериментальных методов определения потенциалов взаимодействия между пылевыми частицами в лабораторной плазме газовых разрядов [25–30]. Преимуществом обладают методы, основанные на решении обратной задачи Ланжевена [29], или на анализе корреляторов смещений и скоростей частиц [30]. В отличие от других, такие методы полностью учитывают диссипативные и случайные процессы. Тем не менее, и они могут давать некорректные результаты для частиц, колебания (смещения) которых искажены неучтенными регулярными и/или случайными внешними воздействиями [30].

В настоящее время задача о спектральной плотности смещений в системе взаимодействующих частиц детально рассмотрена только для двух случаев: 1) для двух заряженных частиц [31, 32]; 2) для малоразмерных цепочечных структур, со-

стоящих из идентичных частиц с попарным взаимодействием [33]. В данной работе приводятся результаты исследования спектральных характеристик для частиц, взаимодействующих с произвольным попарным потенциалом, в малоразмерных квазидвумерных кластерах. Представленные результаты могут быть полезны для экспериментального анализа характера и типа потенциала взаимодействия между пылевыми частицами в плазме.

Отметим, что основное внимание в настоящей работе уделяется спектральным плотностям для кластеров в электрическом поле ловушки при вертикальных смещениях частиц ортогонально плоскости кластера. Теоретические расчеты некоторых частот колебаний для плоских кластеров с различным числом частиц были выполнены ранее в работах [34, 35]. Данные о характерных частотах заряженных частиц для случая бесконечной решетки представлены в работе [36].

2. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассмотрим равновесную систему, состоящую из N частиц массой M_i и зарядами Q_i , взаимодействующих с произвольной формой потенциала в линейном электрическом поле ловушки с цилиндрической симметрией $E(r, z)$ при радиальной составляющей $E_r = \beta^r r$ и вертикальной составляющей $E_z = E_z^0 + b^z z$ (см. рис. 1). Здесь $r \equiv (x^2 + y^2)^{1/2}$ – радиальная координата, z – вертикальная координата по оси z в направлении силы тяжести, $\beta^r = \beta^x \equiv \beta^y$ и β^z – величины градиентов электрического поля, а значение E_z^0 определяется балансом сил, действующих в системе.

В предположении, что смещение, ξ_i , i -й частицы, где $i = 1, 2, \dots, N$, от ее положения равновесия под действием некоторой случайной силы F_{bi} ограничено малыми отклонениями, систему линейных уравнений движения в выбранном направлении (т.е. для каждой из степеней свободы: x, y, z) можно записать в общем виде

$$M_i \frac{dV_i}{dt} = -v_i M_i V_i - Q_i \beta \xi_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N b_{ji} (\xi_i - \xi_j) + F_{bi}, \quad (1)$$

где v_i – коэффициент трения i -й частицы за счет ее столкновений с нейтралами окружающего газа, $\beta = \beta^z$ для вертикальных смещений частиц по оси z , $\beta = \beta^r$ для смещений частиц в направлении оси x (или y), $V_i = d\xi_i/dt$ – скорость i -й частицы на одну степень свободы (x, y, z), F_{bi} – сила Ланжевена, являющаяся источником стохастической ки-

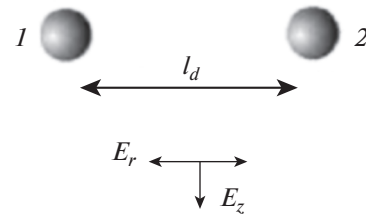


Рис. 1. Горизонтальная конфигурация двух заряженных частиц в электрическом поле ловушки $E = E(z, r)$ с цилиндрической симметрией.

нетической энергии частиц, а коэффициенты b_{ij} зависят от рассматриваемой степени свободы (x, y, z) для смещений частиц и от физики решаемой задачи (для попарного взаимодействия: $b_{ij} \equiv b_{ji}$).

Спектральная плотность, G_i , для случайных (тепловых) смещений частиц определяется как косинус-преобразование Фурье для корреляционной функции, описывающей зависимость среднеквадратичного отклонения этих частиц от их начального положения: $\langle \xi_i^2 \rangle_t = \langle (\xi_i(t) - \xi_i(0))^2 \rangle_t$, где угловые скобки $\langle \dots \rangle_t$ обозначают усреднение по всем отрезкам времени равным t [40–42]. Основные гармоники частиц, ω_i , и их коэффициенты трения, v_i , можно получить путем решения характеристического уравнения для системы (1) при $F_{bi} = 0$ [40].

Спектральная плотность для одной заряженной частицы ($N = 1$) в ловушке описывается формулой для классического осциллятора [37–39]

$$G_1(\omega) \equiv S_1(\omega) = \frac{2\nu T/M}{\omega^4 + (\nu^2 - 2\omega_1^2)\omega^2 + \omega_1^4}, \quad (2)$$

где T – кинетическая температура частиц (удвоенная кинетическая энергия их стохастического движения на одну степень свободы), а $\omega_1^2 = (\omega_i^{z(r)})^2 \equiv Q\beta^{z(r)}/M$ – характерная частота ловушки в радиальном и вертикальном направлениях.

В отдельных случаях, например, для цепочечных структур, состоящих из идентичных частиц с попарным взаимодействием ($M_i \equiv M$, $Q_i \equiv Q$, $v_i \equiv \nu$), процедуру вычисления спектральной плотности для смещений каждой из частиц $G_i(\omega)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) можно свести к определению суперпозиции спектральных плотностей $S_k = S_k(\omega, \nu, \omega_k)$ для отдельных гармоник системы с характерной частотой ω_k [33]

$$G_i(\omega) = \sum_{k=1}^N A_k \frac{2\nu T/M}{\omega^4 + (\nu^2 - 2\omega_k^2)\omega^2 + \omega_k^4} \equiv \sum_{k=1}^N A_k S_k, \quad (3)$$

где A_k – некоторые коэффициенты, а N – число частиц.

Задача о спектральных характеристиках двух частиц с произвольной формой потенциала взаимодействия подробно рассматривалась в различных работах [31–33]. В случае двух идентичных частиц с попарным взаимодействием $G_1(\omega) \equiv G_2(\omega) = G(\omega)$ имеет место

$$G(\omega) = \sum_{i=1}^2 \frac{2\nu T/M}{\omega^4 + (\nu^2 - 2\omega_i^2)\omega^2 + \omega_i^4} \equiv \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} S_i. \quad (4)$$

Здесь характерные частоты, $\omega_{1(2)}$, определяются соотношениями: $\omega_1^2 = a - b$, $\omega_2^2 = a + b$. В случае горизонтальной конфигурации частиц (рис. 1) для их радиальных смещений, $\xi_{1(2)} = \delta r_{1(2)}$: $a = (Q\beta^r - F'')/M$ и $b = -F'/M$, где F' – производная силы F взаимодействия между двумя частицами в радиальном направлении. Для вертикальных смещений, $\xi_{1(2)} = \delta z_{1(2)}$: $a = (Q\beta^z - F/l)/M$, а $b = F/lM$, где l – расстояние между частицами. Для кулоновского взаимодействия: $F = Q^2/l^2$, $F' = -2Q^2/l^3$.

Уравнение баланса сил для горизонтальной конфигурации двух частиц имеет вид

$$\beta^r l = 2F, \quad (5)$$

а устойчивость такой конфигурации нарушается при условии [41]

$$\beta^r > \beta^z. \quad (6)$$

Отметим, что здесь под устойчивостью горизонтальной конфигурации двух частиц подразумевается их положение в горизонтальной (радиальной) плоскости ловушки.

Уравнения баланса сил и критерии устойчивости для малоразмерных систем (цепочечных структур и квазидвумерных кластеров при $N = 3-5$), состоящих из идентичных частиц с попарным взаимодействием, рассмотрены в работе [42]. В радиальной плоскости ловушки с цилиндрической симметрией частицы квазидвумерных кластеров при $2 \leq N \leq 7$ вращаются относительно центра этих кластеров [41, 43, 44], т.е. дрейфуют с тепловой скоростью вдоль эквипотенциальных силовых линий внешнего электрического поля. (Здесь и далее термином “радиальная плоскость” мы обозначили плоскость $[x, y]$ ловушки с цилиндрической симметрией, совпадающую с плоскостью кластера.) Данное обстоятельство затрудняет определение тепловых смещений частиц в радиальной плоскости (плоскости $[x, y]$) даже в условиях численного эксперимента. Вращение частиц в радиальной плоскости не оказывает влияния на величину их вертикальных смещений. Поэтому основное внимание в настоящей работе

уделяется спектральным характеристикам частиц при их вертикальных смещениях, ортогональных плоскости квазидвумерных кластеров.

Спектральные характеристики частиц для системы (1) при $F_{bi} = 0$, такие как их характерные частоты, ω_i , и спектральные плотности смещений, G_i , могут быть получены численно на основе существующих пакетов математического моделирования. Практически все современные программные пакеты имеют встроенные функции символьных вычислений и позволяют получить конечный результат в виде формул для ω_i и G_i , которые являются математическими решениями задачи. Кроме того, такие формулы имеют весьма громоздкий вид и занимают, со всеми входящими в них коэффициентами, от двух (для $N = 3$) и более (при $N > 3$) страниц текста. Таким образом, упомянутые соотношения являются малоэффективными для практического использования, включая анализ и/или обращение данных численных и лабораторных экспериментов.

Аналитические соотношения для характерных частот и спектральной плотности смещений для идентичных частиц ($M_i \equiv M$, $Q_i \equiv Q$, $\nu_i \equiv \nu$), взаимодействующих с попарным потенциалом, в квазидвумерных кластерах ($3 \leq N \leq 7$) рассмотрены в следующих разделах данной работы.

3. СЛУЧАЙ ТРЕХ, ЧЕТЫРЕХ, ПЯТИ И СЕМИ ЧАСТИЦ

Рассмотрим спектральные характеристики для случая трех, четырех, пяти и семи идентичных частиц ($Q_i = Q$, $M_i = M$, $\nu_i = \nu$), взаимодействующих с произвольной попарной силой $F_{ij} = F(l_{ij})$ в линейном электрическом поле $E(r, z)$ ловушки с цилиндрической симметрией (см. рис. 2); здесь $i = 1, 2, \dots, N$, $j = 1, 2, \dots, N$ и $i \neq j$. Критерии устойчивости таких систем представлены в работе [39]. В силу симметрии задачи относительно центра ловушки в таких системах, функции $G_i(\omega) \equiv G(\omega)$ для частиц, которые имеют одинаковое расстояние от центра структуры (т.е. центра ловушки), см. рис. 2.

Численное моделирование стохастических процессов выполнялось методом Ланжевена для идентичных частиц с равными массами зарядами и температурой. Техника моделирования подробно описана в работах [1–3]. Шаг интегрирования составлял от $\Delta t \cong (40 \max[\omega_i^{z(r)}; \nu])^{-1}$ до $\Delta t \cong (100 \max[\omega_i^{z(r)}; \nu])^{-1}$ в зависимости от начальных условий задачи. Время расчетов t_c после установления равновесия в моделируемых системах варьировалось от $\sim 10^3 / \min[\omega_i^{z(r)}; \nu]$ до $\sim 10^4 / \min[\omega_i^{z(r)}; \nu]$; здесь $\omega_i^{z(r)} = (Q\beta^{z(r)}/M)^{1/2}$ – характерные частоты ловушки. Температура частиц в процессе модели-

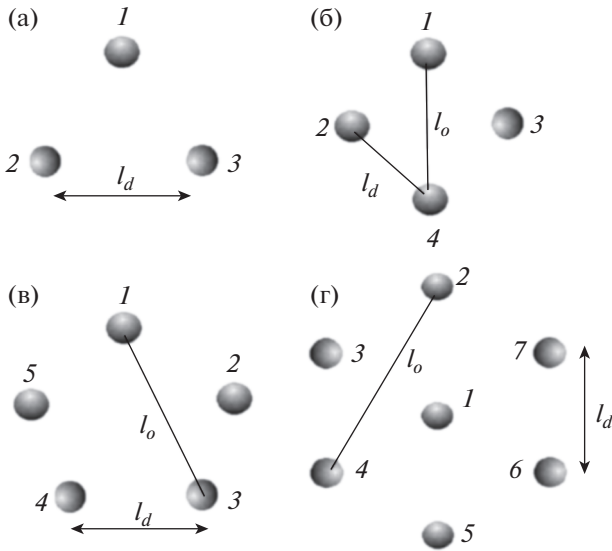


Рис. 2. Квазидвумерные конфигурации трех (а), четырех (б), пяти (в) и семи (г) заряженных частиц в электрическом поле ловушки $E = E(z, r)$ с цилиндрической симметрией.

рования не менялась, т.е. оставалась равной заданной $T_i = T_i^0 \equiv T$.

Вычисления спектральной плотности по результатам моделирования проводились на основе численных расчетов смещений $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ для отдельных частиц системы при помощи процедуры “N-D fast Fourier transform” в пакете прикладных программ MATLAB.

3.1. Три частицы

Обратимся к случаю трех частиц ($N = 3$), см. рис. 2а. В состоянии равновесия средние расстояния между частицами равны $l_{12} = l_{23} = l_{31} \equiv l_d$, а уравнение баланса сил можно записать в виде

$$Q\beta^r l_d = 3F, \tag{7}$$

где F – сила взаимодействия между частицами ($F_{12} = F_{23} = F_{13} \equiv F$). А устойчивость горизонтальной конфигурации трех частиц нарушается при условии [42]

$$\beta^r > \beta^z. \tag{8}$$

Для поиска спектральных характеристик выполним замену переменных в системе (1) для вертикальных смещений частиц ($\beta = \beta^z$) при $F_{bi} = 0$: $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$; $\eta_2 = \xi_1 - \xi_3$; $\eta_3 = 2\xi_2 - (\xi_1 + \xi_3)$. (Здесь и далее, для вертикальных смещений частиц в кластере – $\xi_i = \delta z_i$.) С учетом указанной за-



Рис. 3. Иллюстрация траекторий для трех частиц в радиальной плоскости цилиндрической ловушки за время $t = 40/v$ при коэффициенте трения $v = 2 \text{ с}^{-1}$ и температуре $T = 0.027 \text{ эВ}$.

мены переменных преобразуем систему уравнений движения (1) к виду

$$\frac{d^2 \eta_1}{dt^2} = -v \frac{d\eta_1}{dt} - \frac{Q\beta^z}{M} \eta_1, \tag{9a}$$

$$\frac{d^2 \eta_2}{dt^2} = -v \frac{d\eta_2}{dt} - \left(\frac{Q\beta^z}{M} + a + 2b \right) \eta_2, \tag{9б}$$

$$\frac{d^2 \eta_3}{dt^2} = -v \frac{d\eta_3}{dt} - \left(\frac{Q\beta^z}{M} + 3a \right) \eta_3. \tag{9в}$$

Здесь для вертикальных смещений частиц: $b \equiv a = -F/Ml_d$. Таким образом, данная система имеет две характерных частоты в вертикальном направлении: $\omega_1^2 = Q\beta^z/M$; $\omega_2^2 = Q\beta^z/M + 3a \equiv Q(\beta^z - \beta^r)/M$ ($\omega_3 \equiv \omega_2$).

Иллюстрация траекторий для трех частиц в радиальной плоскости цилиндрической ловушки, полученная в результате численного моделирования за время $t = 40/v$, представлена на рис. 3 при коэффициенте трения $v = 2 \text{ с}^{-1}$ и комнатной температуре $T = 0.027 \text{ эВ}$. Время полного оборота частицы вокруг центра ловушки $\sim 240/v$. С ростом кинетической температуры частиц данное время будет уменьшаться как минимум на величину пропорциональную \sqrt{T} .

Решение системы (9а)–(9в) для $\langle \eta_k^2 \rangle$ с учетом $\langle \xi_i \xi_j \rangle = 0$ при $i \neq j$ позволяет получить для спектральной плотности смещений отдельных частиц $G_i(\omega) \equiv G(\omega)$ ($i = 1, 2, 3$)

$$G(\omega) = \frac{S_1 + 2S_2}{3}, \tag{10}$$

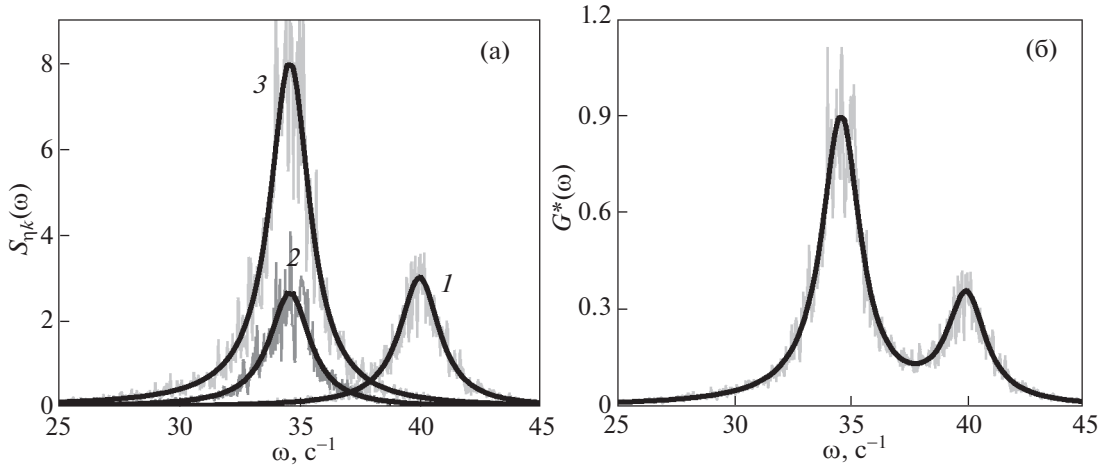


Рис. 4. Функции $S_{\eta_k}^*(\omega)$ (а) и $G^*(\omega)$ (б) для вертикальных смещений частиц при $\beta^z/\beta^r = 4$, $\omega_i^z = 40 \text{ c}^{-1}$, $\omega_i^r = 20 \text{ c}^{-1}$ и $\nu = 2 \text{ c}^{-1}$. Здесь: 1 – $S_{\eta_1}^* = 3S_1^*$; 2 – $S_{\eta_2}^* = 2S_2^*$; 3 – $S_{\eta_3}^* = 6S_3^*$. Черными линиями показаны аналитические решения задачи, серыми – результаты численного моделирования.

где $S_k = S_k(\omega, \nu, \omega_k)$ – спектральная плотность классического осциллятора с частотой ω_k ; здесь $k = 1, 2$.

Напомним, что спектральная плотность для смещений η_k является Фурье-преобразованием функций $\langle \eta_k^2 \rangle_t$, а величина $S_{\eta_k} = D_k S_k$, где коэффициент D_k определяется суммарной температурой частиц, входящих в данный коррелятор. Так для η_1 значение $D_1 = 3$, для $\eta_2 - D_2 = 2$, а для $\eta_3 - D_3 = 6$.

Нормированные спектральные плотности $S_{\eta_k}^*(\omega) = S_{\eta_k}(\omega)/B$ и $G^*(\omega) = G(\omega)/B$ для системы из трех частиц с кулоновским взаимодействием представлены на рис. 4 при $\nu = 2 \text{ c}^{-1}$ и $\beta^z/\beta^r = 4$. Здесь и далее $B = 2T/(\omega_i^z \nu M)$, где $\omega_i = \omega_i^{z(r)} \equiv (Q\beta^{z(r)}/M)^{1/2}$.

3.2. Четыре частицы

Уравнения баланса сил для горизонтальной конфигурации четырех частиц (рис. 2б) можно записать в виде

$$Q\beta^r = \frac{2F}{l_d} + \frac{2F_o}{l_o}, \quad (11)$$

где l_d – среднее расстояние между двумя соседними периферическими частицами, а $l_o = \sqrt{2}l_d$ – среднее расстояние между двумя противоположенными частицами, $F_{12} = F_{24} = F_{43} = F_{31} \equiv F$, $F_{14} = F_{23} \equiv F_o$. Для частиц с кулоновским взаимодействием: $F = Q^2/l_d^2$, $F_o = Q^2/l_o^2$. Устойчивость такой конфигурации нарушается при условии [42]

$$Q\beta^z < 4F/l_d. \quad (12)$$

Для поиска спектральных характеристик выполним замену переменных в системе (1) для вертикальных смещений частиц ($\beta = \beta^z$) при $F_{bi} = 0$: $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4$; $\eta_2 = (\xi_3 + \xi_2) - (\xi_1 + \xi_4)$; $\eta_3 = \xi_2 - \xi_3$; $\eta_4 = \xi_1 - \xi_4$. Откуда получим

$$\frac{d^2\eta_1}{dt^2} = -\nu \frac{d\eta_1}{dt} - \frac{Q\beta^z}{M} \eta_1, \quad (13a)$$

$$\frac{d^2\eta_2}{dt^2} = -\nu \frac{d\eta_2}{dt} - \left(\frac{Q\beta^z}{M} + 4a \right) \eta_2, \quad (13б)$$

$$\frac{d^2\eta_3}{dt^2} = -\nu \frac{d\eta_3}{dt} - \left(\frac{Q\beta^z}{M} + 2a + 2b \right) \eta_3, \quad (13в)$$

$$\frac{d^2\eta_4}{dt^2} = -\nu \frac{d\eta_4}{dt} - \left(\frac{Q\beta^z}{M} + 2a + 2b \right) \eta_4. \quad (13г)$$

Здесь $a = -F/MI_d$, $b = -F_o/MI_o$. Рассматриваемая система имеет три характерных частоты в вертикальном направлении: $\omega_1^2 = Q\beta^z/M$; $\omega_2^2 = Q\beta^z/M + 4a$; $\omega_3^2 = Q\beta^z/M + 2a + 2b$ ($\omega_4 \equiv \omega_3$).

Решение системы (13а)–(13г) позволяет получить для спектральной плотности смещений отдельных частиц $G_i(\omega) \equiv G(\omega)$ ($i = 1-4$)

$$G(\omega) = \frac{S_1 + S_2 + 2S_3}{4}, \quad (14)$$

где $S_k = S_k(\omega, \nu, \omega_k)$ – спектральная плотность осциллятора с частотой ω_k ; здесь $k = 1, 2, 3$.

Спектральная плотность для смещений η_k равна $S_{\eta_k} = D_k S_k$, где коэффициент, D_k , определяется суммарной температурой частиц, входящих в со-

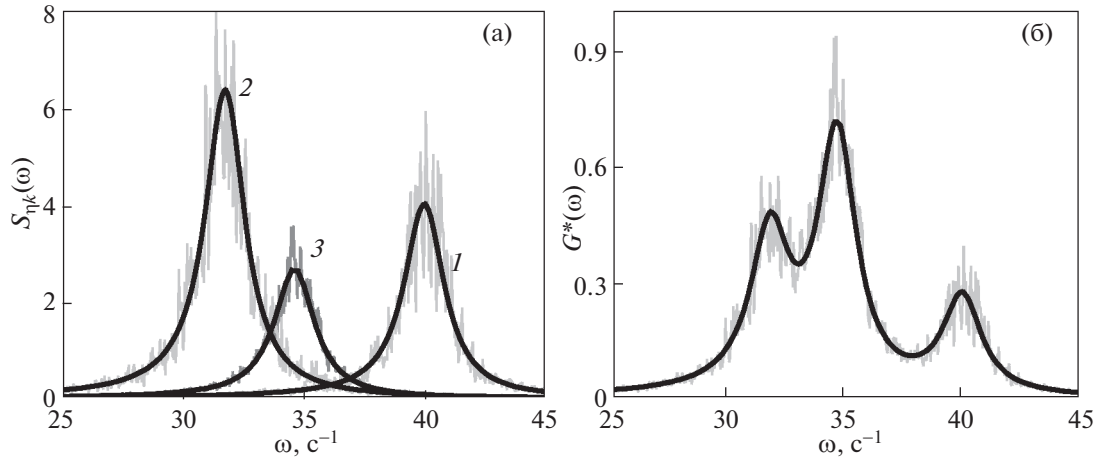


Рис. 5. Функции $S_{\eta_k}^*(\omega)$ (а) и $G^*(\omega)$ (б) для вертикальных смещений частиц при $\beta^z/\beta^r = 4$, $\omega_i^z = 40 \text{ c}^{-1}$, $\omega_i^r = 20 \text{ c}^{-1}$ и $v = 2 \text{ c}^{-1}$. Здесь: 1 – $S_{\eta_1}^* = 4S_1^*$; 2 – $S_{\eta_2}^* = 4S_2^*$; 3 – $S_{\eta_3}^* = 2S_3^*$. Черными линиями показаны аналитические решения задачи, серыми – результаты численного моделирования.

ответствующий коррелятор. Так для η_1 значение $D_1 = 4$, для $\eta_2 - D_2 = 4$, а для η_4 и $\eta_3 - D_{3(4)} = 2$.

Нормированные спектральные плотности $S_{\eta_k}^*(\omega) = S_{\eta_k}(\omega)/B$ и $G^*(\omega) = G(\omega)/B$ для системы из четырех частиц с кулоновским взаимодействием показаны на рис. 5 при $v = 2 \text{ c}^{-1}$ и $\beta^z/\beta^r = 4$ для вертикальных смещений частиц.

3.3. Пять частиц

Уравнение баланса сил для горизонтальной конфигурации пяти частиц (рис. 2в) позволяют получить величину $Q\beta^r$, используя математические соотношения для правильного пятиугольника и величину сил ($F = F(l_d)$; $F_o = F_o(l_o)$), действующих между частицами

$$Q\beta^r R = 2c_1 F + 2c_2 F_o. \quad (15)$$

Здесь l_d – расстояние между двумя ближайшими частицами, $l_o = 2l_d \sin \theta$, где $\theta = 3\pi/10$, $R = l_d(2/(5 - \sqrt{5}))^{1/2}$, $c_1 = \cos \theta$, а $c_2 = c_3(1 - c_3/4)^{1/2}$, где $c_3 = (l_d/l_o)^2$. Для частиц с кулоновским взаимодействием $F = Q^2/l_d^2$, $F_o = Q^2/l_o^2$.

Для поиска спектральных характеристик выполним замену переменных в системе (1) для вертикальных смещений частиц ($\beta = \beta^z$) при $F_{bi} = 0$: $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \xi_5$; $\eta_2 = \xi_1 - \xi_2$; $\eta_3 = \xi_3 - \xi_5$; $\eta_4 = 2\xi_4 - (\xi_1 + \xi_2)$; $\eta_5 = 2\xi_4 - (\xi_3 + \xi_5)$. Откуда получим

$$\frac{d^2\eta_1}{dt^2} = -v \frac{d\eta_1}{dt} - \frac{Q\beta^z}{M} \eta_1, \quad (16a)$$

$$\frac{d^2\eta_2}{dt^2} = -v \frac{d\eta_2}{dt} - \left(\frac{Q\beta^z}{M} + 3b + 2a \right) \eta_2 - (a - b)\eta_3, \quad (16б)$$

$$\frac{d^2\eta_3}{dt^2} = -v \frac{d\eta_3}{dt} - \left(\frac{Q\beta^z}{M} + 3a + 2b \right) \eta_3 - (a - b)\eta_2, \quad (16в)$$

$$\frac{d^2\eta_4}{dt^2} = -v \frac{d\eta_4}{dt} - \left(\frac{Q\beta^z}{M} + 3a + 2b \right) \eta_4 - (a - b)\eta_5, \quad (16г)$$

$$\frac{d^2\eta_5}{dt^2} = -v \frac{d\eta_5}{dt} - \left(\frac{Q\beta^z}{M} + 3b + 2a \right) \eta_5 - (a - b)\eta_4. \quad (16д)$$

Здесь $a = -F/ML_d$, $b = -F_o/ML_o$. Рассматриваемая система имеет три характерных частоты в вертикальном направлении: $\omega_1^2 = Q\beta^z/M$, $\omega_2^2 = Q\beta^z/M + \omega + 5(a + b)/2 + d$, $\omega_3^2 = Q\beta^z/M + 5(a + b)/2 - d$, где $d = \sqrt{5(b - a)}/2$ ($\omega_4 \equiv \omega_2$, $\omega_5 \equiv \omega_3$). Устойчивость горизонтальной конфигурации пяти частиц нарушается при условии [42]

$$\frac{Q\beta^z}{M} < -\frac{5(b + a)}{2} + \frac{\sqrt{5(b - a)}}{2}. \quad (17)$$

Решение системы (16а)–(16д) дает для спектральной плотности смещений частиц $G_i(\omega) \equiv G(\omega)$ ($i = 1-5$)

$$G(\omega) = \frac{S_1 + 2S_2 + 2S_3}{5}, \quad (18)$$

где $S_k = S_k(\omega, v, \omega_k)$ – спектральная плотность осциллятора с частотой ω_k ; здесь $k = 1, 2, 3$.

Спектральная плотность для смещений η_1 равна $S_{\eta_1} = D_1 S_1$, а для системы уравнений (16б), (16в) и системы уравнений (16г), (16д) имеют место сле-

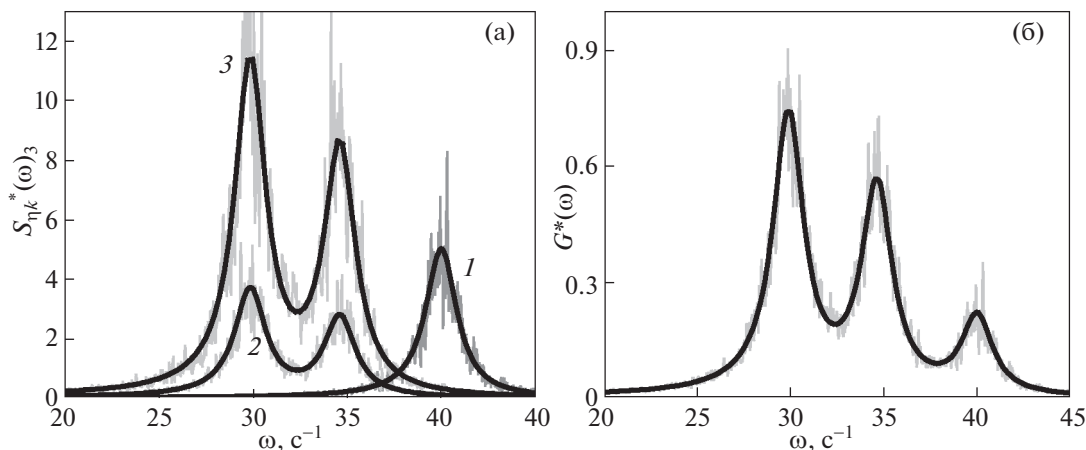


Рис. 6. Функции $S_{\eta_k}^*(\omega)$ (а) и $G^*(\omega)$ (б) для вертикальных смещений частиц при $\beta^z/\beta^r = 4$, $\omega_i^z = 40 \text{ с}^{-1}$, $\omega_i^r = 20 \text{ с}^{-1}$ и $v = 2 \text{ с}^{-1}$. Здесь: $1 - S_{\eta_1}^* = 5S_1^*$; $2 - S_{\eta_2}^* + S_{\eta_3}^* = 2(S_2^* + S_3^*)$; $3 - S_{\eta_4}^* + S_{\eta_5}^* = 6(S_2^* + S_3^*)$. Черными линиями показаны аналитические решения задачи, серыми – результаты численного моделирования.

дующие соотношения: $S_{\eta_2} + S_{\eta_3} = D_{2(3)}(S_2 + S_3)$, $S_{\eta_4} + S_{\eta_5} = D_{4(5)}(S_2 + S_3)$ [33]. Здесь коэффициенты D_k определяются суммарной температурой частиц, входящих в соответствующий коррелятор. Так для η_1 значение $D_1 = 5$, для η_2 и $\eta_3 - D_{2(3)} = 2$, а для η_4 и $\eta_5 - D_{4(5)} = 6$.

Нормированные спектральные плотности $S_{\eta_k}^*(\omega) = S_{\eta_k}(\omega)/B$ и $G^*(\omega) = G(\omega)/B$ для системы из пяти частиц с кулоновским взаимодействием показаны на рис. 6 при $v = 2 \text{ с}^{-1}$ и $\beta^z/\beta^r = 4$.

3.4. Семь частиц

Уравнение баланса сил для горизонтальной конфигурации семи частиц (рис. 2г) можно записать в виде

$$Q\beta^r l_d = 2F(l_d) + F^*(2l_d) + \sqrt{3}F_o(l_o). \quad (19)$$

Здесь l_d – среднее расстояние между двумя ближайшими частицами $l_o = \sqrt{3}l_d$. Для частиц с кулоновским взаимодействием $F = Q^2/l_d^2$, $F^* = Q^2/(4l_d^2)$, $F_o = Q^2/l_o^2$.

Для поиска спектральных характеристик выполним замену переменных в системе (1) для вертикальных смещений частиц ($\beta = \beta^z$) при $F_{bi} = 0$: $\eta_1 = \sum_{i=1}^7 \xi_i$, $\eta_2 = \xi_2 - \xi_4$, $\eta_3 = \xi_7 - \xi_5$, $\eta_4 = \xi_3 + \xi_5 + \xi_7 - (\xi_2 + \xi_4 + \xi_6)$. Откуда получим

$$\frac{d^2\eta_1}{dt^2} = -v\frac{d\eta_1}{dt} - \frac{Q\beta^z}{M}\eta_1, \quad (20a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\eta_2}{dt^2} &= -v\frac{d\eta_2}{dt} - \\ &- \left(\frac{Q\beta^z}{M} + 3a + b + 3c \right) \eta_2 + (a - b)\eta_3, \end{aligned} \quad (20б)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\eta_3}{dt^2} &= -v\frac{d\eta_3}{dt} - \\ &- \left(\frac{Q\beta^z}{M} + 3a + b + 3c \right) \eta_3 + (a - b)\eta_2, \end{aligned} \quad (20в)$$

$$\frac{d^2\eta_4}{dt^2} = -v\frac{d\eta_4}{dt} - \left(\frac{Q\beta^z}{M} + 5a + 2b \right) \eta_4, \quad (20г)$$

$$\frac{d^2\xi_1}{dt^2} = -v\frac{d\xi_1}{dt} - \left(\frac{Q\beta^z}{M} + 7a \right) \xi_1 + a\eta_1. \quad (20д)$$

Здесь $a = -F/Ml_d$, $b = -F^*/2Ml_d$, $c = -F_o/Ml_o$. Рассматриваемая система имеет пять характерных частот в вертикальном направлении: $\omega_1^2 = Q\beta^z/M$, $\omega_2^2 = Q\beta^z/M + 2a + 2b + 3c$, $\omega_3^2 = Q\beta^z/M + 4a + 3c$, $\omega_4^2 = Q\beta^z/M + 5a + 2b$, $\omega_5^2 = Q\beta^z/M + 7a$. Устойчивость горизонтальной конфигурации семи частиц нарушается при условии

$$Q\beta^z < 7F/l_d. \quad (21)$$

Решение системы (20a)–(20д) дает для спектральной плотности смещений частиц $G_i(\omega) \equiv G(\omega)$ ($i = 2-7$) на оболочке кластера

$$G(\omega) = \frac{S_1 + S_5/6}{7} + \frac{2S_2 + 2S_3 + S_4}{6}, \quad (22)$$

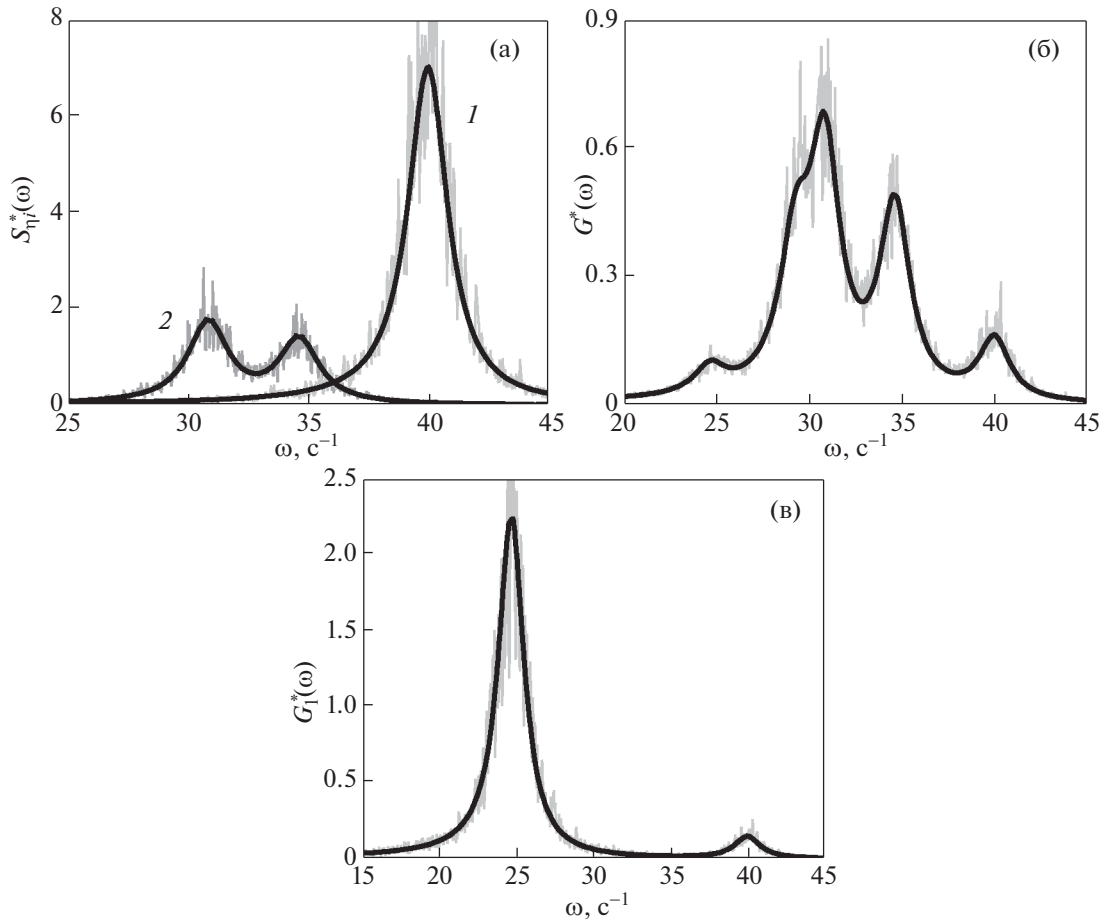


Рис. 7. Функции $S_{\eta_1}^*(\omega)$ (а) и $G^*(\omega)$ (б) и $G_1^*(\omega)$ (в) для вертикальных смещений частиц при $\beta^z/\beta^r = 4$, $\omega_r^z = 40 \text{ с}^{-1}$, $\omega_r^r = 20 \text{ с}^{-1}$ и $v = 2 \text{ с}^{-1}$. Здесь: $1 - S_{\eta_1}^* = 7S_1^*$; $2 - S_{\eta_2}^* + S_{\eta_3}^* = 2(S_2^* + S_3^*)$. Черными линиями показаны аналитические решения задачи, серыми – результаты численного моделирования.

а для центральной частицы кластера

$$G_1(\omega) = \frac{S_1 + 6S_5}{7}. \tag{23}$$

Здесь $S_k = S_k(\omega, v, \omega_k)$ – спектральная плотность осциллятора с частотой ω_k , где $k = 1-5$.

Спектральная плотность для смещений η_1 равна $S_{\eta_1} = D_1 S_1$, для смещений $\eta_4 - S_{\eta_4} = D_4 S_4$, а для системы уравнений (20б), (20в) имеет место следующее соотношение: $S_{\eta_2} + S_{\eta_3} = D_{2(3)}(S_2 + S_3)$ [33]. Здесь коэффициенты, D_k , определяются суммарной температурой частиц, входящих в соответствующий коррелятор. Так для η_1 значение $D_1 = 7$, для η_2 и $\eta_3 - D_{2(3)} = 2$, а для $\eta_4 - D_4 = 6$.

Нормированные спектральные плотности $S_{\eta_k}^*(\omega) = S_{\eta_k}(\omega)/B$, $G^*(\omega) = G(\omega)/B$ и $G_1^*(\omega) = G_1(\omega)/B$ для системы из семи частиц с кулоновским взаимодействием показаны на рис. 7 при $v = 2 \text{ с}^{-1}$ и $\beta^z/\beta^r = 4$.

3.5. Обсуждение результатов

Представленные аналитические соотношения для спектральной плотности вертикальных смещений частиц в квазидвумерных кластерах сравнивались с результатами определения спектральной плотности, полученными путем преобразования Фурье для решений системы (1) при $F_{bi} = 0$ при помощи пакета прикладных программ MATLAB. (Полученные аналитические соотношения полностью совпадают с вычислениями спектральной плотности для решений системы (1).)

Было получено, что для случая малых кластерных систем, состоящих из идентичных частиц с попарным взаимодействием, процедуру вычисления спектральной плотности для смещений каждой из частиц $G_j(\omega)$ ($j = 1, 2, \dots, N$) можно свести определению суперпозиции спектральных плотностей $S_k = S_k(\omega, v, \omega_k)$ для отдельных гармоник системы с характерной частотой ω_k ; здесь N – число частиц.

Для такой системы, коэффициент трения частиц ν и частоты ловушки $\omega_l = \omega_l^{z(r)} \equiv \equiv (Q\beta^{z(r)}/M)^{1/2}$ (а соответственно, величина градиентов внешнего электрического поля, β^z и β^r) в реальном эксперименте легко определить из измерений спектральной плотности $S_{\eta_1}(\omega)$ для суммарных смещений частиц, $\eta_1 = \sum_{i=1}^N \xi_i$, которые пропорциональны смещению центра масс анализируемой системы. А, именно, $S_{\eta_1}(\omega) = NS(\omega, \nu, \omega_l^{z(r)})$. Для определения других гармоник системы, $\omega_k \neq \omega$, можно использовать как измерения спектральных плотностей для отдельных частиц $G_j(\omega)$, так и измерения спектральных плотностей для их взаимных смещений $(\xi_i - \xi_j)$; здесь $i = 1, 2, \dots, N$, $j = 1, 2, \dots, N$ и $i \neq j$.

Добавим также, что измерение вертикальных смещений в квазидвумерных кластерах дает информацию о силах межчастичного взаимодействия $F_{ij} = F(l_{ij})$, что, в свою очередь, позволяет получить информацию о потенциале взаимодействия между частицами системы. Расстояния между частицами, как в численных, так и в реальных экспериментах легко измеряется; и случае численного моделирования полностью соответствует аналитическим уравнениям баланса сил, см. (7), (11), (15), (19).

Еще раз напомним, что значение характерных частот ω_k , частиц и спектральной плотности смещений G_j , в системе из N взаимодействующих частиц можно получить численно на основе существующих программных пакетов, см. раздел 2. Тем не менее применение аналитических соотношений существенно сокращает время необходимое для обращения экспериментальных данных.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлены результаты аналитических и численных исследований спектральных характеристик стохастического движения для спектральной плотности вертикальных смещений частиц в малоразмерных квазидвумерных кластерах (смещений, ортогональных плоскости кластеров). Предложены соотношения для спектральной плотности вертикальных смещений частиц в таких системах. Рассмотрены характерные частоты частиц и способ их аналитического вычисления.

Результаты настоящей работы применимы для малых кластерных систем при любом типе попарных взаимодействий. Полученные результаты могут быть полезны для разработки новых методов диагностики физических свойств пылевой плазмы.

Данная работа была частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследо-

ваний (грант № 18-38-20175), а также программой Президиума РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ваулина О.С., Петров О.Ф., Фортвов В.Е., Храпак А.Г., Храпак С.А. Пылевая плазма (эксперимент и теория). М.: Физматлит, 2009.
2. Complex and Dusty Plasmas / Eds. Fortov V.E. and Morfill G.E. CRC Press, 2010.
3. Ivlev A., Morfill G., Lowen H., Royall C.P. Complex Plasmas and Colloidal Dispersions: Particle-Resolved Studies of Classical Liquids and Solids. Singapore: World Scientific, 2012.
4. Photon Correlation and Light Beating Spectroscopy / Eds. H.Z. Cummins and E.R. Pike. N.Y.: Plenum, 1974.
5. Balescu R. Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics. Chichester: Wiley Interscience, 1975.
6. Овчинников А.А., Тимашев С.Ф., Белый А.А. Кинетика диффузионно-контролируемых химических процессов. М.: Химия, 1986.
7. Ваулина О.С., Адамович К.Г. // ЖЭТФ. 2008. Т. 133. С. 1091.
8. Ваулина О.С., Адамович К.Г., Петров О.Ф., Фортвов В.Е. // ЖЭТФ. 2008. Т. 134. С. 367.
9. Lisin E.A., Timirkhanov R.A., Vaulina O.S., Petrov O.F., Fortov V.E. // New J. Phys. 2013. V. 15. P. 053004.
10. Vaulina O.S., Lisin E.A. // Physics of plasmas 2009. V. 16. P. 113702.
11. Фортвов В.Е., Петров О.Ф., Ваулина О.С., Косс К.Г. // Письма в ЖЭТФ. 2013. Т. 97. С. 366.
12. Hebner G.A., Riley M.E., Greenberg K.E. // Phys. Rev. E. 2002. V. 66. P. 046407.
13. Vaulina O.S., Drangevski I.E. // Phys. Scripta. 2006. V. 73. P. 577.
14. Райзер Ю.П. Физика газового разряда. М.: Наука, 1987.
15. Juan W.-T., Huang Z.-H., Hsu J.-W., Lai Y.-J., I L. // Phys. Rev. E. 1998. V. 58. P. 6947.
16. Ishihara O., Kamimura T., Hirose K.I., Sato N. // Phys. Rev. E. 2002. V. 66. P. 046406.
17. Klindworth M., Melzer A., Piel A., Schweigert V.A. // Phys. Rev. B. 2000. V. 61. P. 8404.
18. Melzer A., Klindworth M., Piel A. // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 87. P. 115002.
19. Ivlev A.V., Bartnick J., Heinen M., Du C.R., Nosenko V., Löwen H. // Physical Review X. 2015. V. 5. P. 011035.
20. Ваулина О.С., Лисина И.И., Косс К.Г. // Физика плазмы 2013. Т. 39. С. 455.
21. Lisina I.I., Vaulina O.S. // EPL. 2003. V. 103. P. 55002.
22. Mukhopadhyay A.K., Goree J. // Phys. Rev. E. 2014. V. 90. P. 013102.
23. Лисин Е.А., Ваулина О.С. // ЖЭТФ. 2012. Т. 142. С. 1077.
24. Лисин Е.А., Ваулина О.С., Петров О.Ф. // ЖЭТФ. 2017. Т. 151. С. 791.
25. Pieper J.B., Goree J. // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 77. P. 3137.

26. *Hotann A., Melzer A., Piel A.* // Phys. Rev. E. 1996. V. 59. P. 3835.
27. *Qiao K., Ding Z., Kong J., Chen M., Matthews L.S., Hyde T.W.* // arXiv:1810.07173. 2018.
28. *Yousefi R., Chen M., Matthews L.S., Hyde T.W.* // arXiv:1607.03177. 2016.
29. *Ваулина О.С., Лисин Е.А., Гавриков А.В., Петров О.Ф., Фортвов В.Е.* // ЖЭТФ. 2010. Т. 137. С. 751.
30. *Lisin E.A., Vaulina O.S., Petrov O.F.* // Phys. Plasmas. 2018. V. 25. P. 013702.
31. *Саметов Э.А., Лисин Е.А., Ваулина О.С.* // ЖЭТФ. 2020. Т. 157. С. 552.
32. *Саметов Э.А., Лисин Е.А., Ваулина О.С.* // Вестник ОИВТ. 2019. Т. 2. С. 33.
33. *Ваулина О.С.* // Физика плазмы. 2020. Т. 46. С. 1.
34. *Amiranashvili Sh., Gusein-zade N., Ignatov A.* // Phys. Rev. A. 1999. V. 59. P. 3098.
35. *Amiranashvili Sh.G., Gusein-zade N.G., Tsyrovich V.N.* // Phys. Rev. E. 2001. V. 64. P. 016407.
36. *Игнатов А.М.* // Физика плазмы. 2017. Т. 43. С. 560.
37. *Ваулина О.С., Саметов Э.А.* // ЖЭТФ. 2018. Т. 154. С. 407.
38. *Климонтович Ю.Л.* Статистическая физика. М.: Наука, 1982.
39. *Воронов А.А.* Теория автоматического управления. Часть 2. М.: Высшая школа, 1986.
40. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1986.
41. *Ваулина О.С., Адамович К.Г., Дранжевский И.Е.* // Физика плазмы. 2005. Т. 31. С. 562.
42. *Ваулина О.С., Лисина И.И., Лисин Е.А.* // Физика плазмы. 2018. Т. 44. С. 229.
43. *Lisina I.I., Vaulina O.S., Lisin E.A.* // Phys. Rev. E. 2019. V. 99. P. 013207.
44. *Koss K.G., Petrov O.F., Myasnikov M.I., Statsenko K.B., Vasiliev M.M.* // JETP. 2016. V. 123. P. 98.