

ЧЕТЫРЕ ТЕНЗОРА, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ТЕПЛО- И ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ НЕВЫРОЖДЕННЫХ ЭЛЕКТРОНОВ В ЗАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЕ

© 2020 г. М. В. Глушихина*

Институт космических исследований РАН, Москва, Россия

**e-mail: m.glushikhina@iki.rssi.ru*

Поступила в редакцию 03.07.2019 г.

После доработки 05.09.2019 г.

Принята к публикации 20.09.2019 г.

Получено решение уравнения Больцмана для плазмы в магнитном поле с невырожденными электронами и ионами методом Чепмена–Энскога. Для получения приближенного решения использованы полиномы Сонина до третьего порядка. Рассмотрена полностью ионизованная плазма. Получены более точные значения компонент тензоров диффузии, термодиффузии и диффузионного термоэффекта по сравнению с предыдущими работами по данной тематике.

Ключевые слова: плазма, кинетические коэффициенты, магнитное поле

DOI: 10.31857/S0367292120020043

1. ВВЕДЕНИЕ

Перенос тепла и заряда в замагниченной невырожденной плазме играет важную роль в описании ее поведения как в лабораторных условиях, так и в строении и эволюции звезд. Кинетические коэффициенты, такие как теплопроводность, диффузия, термодиффузия и диффузионный термоэффект определяют потоки тепла и плотности токов. Зная распределение тепла и тока, можно рассчитать магнитотепловую эволюцию, распределение магнитного поля и температуры по поверхности звезд или описать поведение плазмы, получаемой и ускоряемой в лабораторных условиях.

Классические методы кинетической теории газов были разработаны Максвеллом, Больцманом, Гильбертом, Энскогом и Чепменом. Эти методы представлены в монографии Чепмена и Каулинга [1]. Они основаны на решении уравнения Больцмана методом последовательных приближений. В качестве нулевого приближения берется термодинамически равновесная функция распределения: для невырожденного газа – распределение Максвелла, если вырождение важно – распределение Ферми–Дирака. Равновесная функция распределения не дает точного решения уравнения Больцмана при наличии неоднородности. Следуя [1], мы ищем решение уравнения Больцмана в первом приближении как разложение по полиномам Сонина (Лагерра). Для учета вырождения, используется система ортогональ-

ных функций, которые являются обобщением полиномов Сонина, предложенная в [2–4], см. также [5]. Обычно для вычисления теплопроводности берутся первые два члена разложения. В [6] было показано, что такое приближение дает существенные погрешности для коэффициента теплопроводности, которые становятся намного меньше, когда используется разложение до третьей степени полинома.

Первое применение уравнения Больцмана к газу из заряженных частиц было сделано Чепменом [1]. Из-за расходимости интеграла столкновений при больших прицельных параметрах для частиц с кулоновским взаимодействием в качестве верхнего предела интегрирования по прицельному параметру было взято среднее расстояние между частицами. Таким образом, были получены коэффициенты вязкости, теплопроводности и диффузии для газов, состоящих из заряженных частиц. Расхождение интеграла столкновений для кулоновского взаимодействия при больших прицельных параметрах показывает, что рассеяние частиц с большим прицельным параметром и малым изменением импульса при единичном столкновении играет более важную роль, чем столкновения с большим изменением импульса. Ландау использовал этот факт для упрощения интеграла столкновений Больцмана [7]. Он выполнил разложение функции распределения после столкновения при малых изменениях импульса и оставил первые два члена разложения.

Кинетические коэффициенты для невырожденной плазмы при наличии и отсутствии магнитного поля были вычислены в [8–11] с использованием метода разложения Чепмена–Энскога. Брагинский [12, 13] вычислил кинетические коэффициенты для невырожденной плазмы в магнитном поле, состоящей из электронов и одного сорта положительно заряженных ионов, используя кинетические уравнения, нормированные на средние скорости, различные для ионов и электронов. Был использован интеграл столкновений Ландау и учитывались два полинома в разложении. Такой же подход использовался в [14], где представлены вычисления кинетических коэффициентов для полностью ионизированной плазмы со сложным составом. Кинетические коэффициенты для полностью ионизированной плазмы в магнитном поле были получены прямым численным расчетом уравнения Фоккера–Планка в [15].

Компоненты тензора теплопроводности для вырожденных звездных ядер были вычислены в приближении Лоренца для водородной плазмы в [16] и [17]. В [18] представлены нерелятивистские вычисления на основе квантового уравнения переноса Ленарда–Балеску для теплопроводности и электрической проводимости плазмы с сильно вырожденными, слабо связанными электронами и невырожденными, слабо связанными ионами. В [19] были вычислены коэффициенты диффузии, термодиффузии и диффузионного термоэффекта для плазмы в магнитном поле с сильно вырожденными электронами и невырожденными ядрами в приближении Лоренца. В работе [20] вычисляется тензор теплопроводности для произвольно вырожденных электронов и невырожденных ядер в магнитном поле.

Данная работа посвящена решению уравнения Больцмана методом Чепмена–Энскога для электронов в невырожденной плазме. Найдены тензоры термодиффузии, диффузии и диффузионного термоэффекта с использованием разложения из трех полиномов, и на примере лоренцевского газа показано, что метод обладает хорошей сходимостью к точному решению. Получено аналитическое выражение для компонент этих тензоров в трехполиномиальном приближении с учетом электрон-электронных столкновений для случая невырожденных электронов в присутствии магнитного поля. Учет третьей степени полинома существенно улучшил точность результатов. В приближении двух полиномов полученное решение совпадает с опубликованными результатами.

2. УРАВНЕНИЕ БОЛЬЦМАНА И УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА

Мы используем уравнение Больцмана для невырожденных электронов в магнитном поле, с

учетом взаимодействия электронов с ионами и друг с другом. Уравнение Больцмана, описывающее изменение функции распределения электронов f с течением времени в присутствии электрического и магнитного полей, записывается как [10, 11]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c_i \frac{\partial f}{\partial r_i} - \frac{e}{m_e} \left(E_i + \frac{1}{c} \epsilon_{ikl} c_k B_l \right) \frac{\partial f}{\partial c_i} + J = 0. \quad (1)$$

Здесь $(-e)$, m_e – заряд (отрицательный) и масса электрона, E_i , B_i – напряженность электрического поля и магнитная индукция, ϵ_{ikl} – полностью антисимметричный тензор Леви–Чивиты, c – скорость света. Интеграл столкновений J для невырожденных электронов и однозарядных ионов, согласно [1–4], записывается в форме

$$J = J_{ee} + J_{eI} = \int [ff_1 - ff_1'] g_{ee} bdbd\epsilon dc_{1i} + \int [ff_1 - ff_1'] g_{eI} bdbd\epsilon dc_{1i}. \quad (2)$$

Здесь прицельный параметр b и ϵ – геометрические параметры столкновения частиц с относительными скоростями g_{ee} , g_{eI} .

Интегрирование в электронной части интеграла столкновений в (2) производится по фазовому пространству налетающих частиц (dc_{1i}) и их физическому пространству ($bdbd\epsilon$) [1]. Функции со скоростями после столкновения отмечены штрихами.

Уравнение Больцмана для электронов с интегралом парных столкновений (2) может применяться, когда электронный газ считается почти идеальным, т. е. кинетическая энергия электронов много больше, чем энергия электростатических взаимодействий. Это справедливо для плазмы достаточно малой плотности. Детальное обсуждение применимости интеграла парных столкновений (2) и его модификаций для невырожденных газов высокой плотности можно найти в [1].

Введем тепловую скорость электронов $v_i = c_i - c_{0i}$, где c_{0i} является средней массовой скоростью. Таким образом, мы можем написать уравнение Больцмана относительно тепловой скорости в форме [11]

$$\frac{df}{dt} + v_i \frac{\partial f}{\partial r_i} - \left[\frac{e}{m_e} \left(E_i + \frac{1}{c} \epsilon_{ikl} v_k B_l \right) + \frac{dc_{0i}}{dt} \right] \frac{\partial f}{\partial v_i} - \frac{e}{m_e c} \epsilon_{ikl} v_k B_l \frac{\partial f}{\partial v_i} - \frac{\partial f}{\partial v_i} v_k \frac{\partial c_{0i}}{\partial r_k} + J = 0, \quad (3)$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + c_{0i} \frac{\partial}{\partial r_i}.$$

Уравнения переноса для концентрации электронов, полного импульса и энергии электронов в двухкомпонентной смеси из электронов и ядер могут быть получены обычным способом из уравнения Больцмана в квазинейтральной плазме [1, 9–11] как

$$\frac{dn_e}{dt} + n_e \frac{\partial c_{0i}}{\partial r_i} + \frac{\partial}{\partial r_i} (n_e \langle v_i \rangle) = 0, \quad (4)$$

$$\rho \frac{dc_{0i}}{dt} = \frac{1}{c} \epsilon_{ikl} j_k B_l, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} kn_e \frac{dT}{dt} - \frac{3}{2} kT \frac{\partial}{\partial r_i} (n_e \langle v_i \rangle) + \frac{\partial q_{ei}}{\partial r_i} = \\ = j_i \left(E_i + \frac{1}{c} \epsilon_{ikl} c_{0k} B_l \right) - \rho_e \langle v_i \rangle \frac{dc_{0i}}{dt}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\langle v_{\alpha i} \rangle = \frac{1}{n_\alpha} \int f_\alpha v_{\alpha i} dc_{\alpha i}, \quad n_e = \int f dc_{ei}, \quad (7)$$

$$c_{0i} = \frac{1}{\rho} \sum_\alpha \rho_\alpha \langle c_{\alpha i} \rangle, \quad j_i = -n_e e \langle v_i \rangle, \quad (8)$$

$$q_{\alpha i} = \frac{1}{2} n_\alpha m_\alpha \langle v_{\alpha i}^2 v_{\alpha i} \rangle, \quad \rho = \sum_\alpha m_\alpha n_\alpha \quad (9)$$

Здесь суммирование производится по электронам и ионам, $P_e = n_e m_e \langle v^2 \rangle / 3$, когда мы пренебрегаем электронной вязкостью, P_e является электронным давлением; $\langle v_i \rangle$ – средняя скорость электронов в сопутствующей системе, q_i – тепловой поток электронов и j_i – электрический ток электронов. Здесь и в дальнейшем рассмотрении мы полагаем среднюю массовую скорость равной средней скорости ионов $c_{0i} = \langle c_{ii} \rangle$, также мы рассматриваем электрический ток и тепловой поток только от электронов.

3. ВЫВОД ОБЩИХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ В ПЕРВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Уравнение Больцмана может быть решено методом последовательных приближений Чепмена–Энскога [1]. Данный метод используется, когда функции распределения близки к своим термодинамически равновесным значениям, а отклонения считаются линейными. Уравнение для второго порядка отклонений от функции равновесного распределения было получено в [22] для простого газа, см. также [1]. Применение данного подхода сильно ограничено сложностью уравнения и узкой областью, где играют роль корреляции второго порядка.

Нулевое приближение для функции распределения электронов – это распределение Максвел-

ла, которое найдено путем приравнивания к нулю интеграла столкновений J_{ee} из (2)

$$f_0 = n_e \left(\frac{m_e}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m_e v^2}{2kT} \right), \quad \int f_0 dv_i = n_e. \quad (10)$$

Здесь k – постоянная Больцмана, T – температура. Функция распределения для ионов в нулевом приближении f_{i0} предполагается аналогичной функции распределения электронов.

Пользуясь (10) в (4)–(9), мы получаем нулевое приближение для уравнения переноса, в этом приближении $\langle v_i \rangle = 0$, $q_i = 0$.

В первом приближении мы ищем функцию f в виде

$$f = f_0(1 + \chi). \quad (11)$$

Функция χ позволяет записать решение в виде

$$\chi = -A_i \frac{\partial \ln T}{\partial r_i} - n_e D_i d_i, \quad (12)$$

$$d_i = \frac{\rho_N}{\rho} \frac{\partial \ln P_e}{\partial r_i} - \frac{\rho_e}{P_e \rho} \frac{\partial P_N}{\partial r_i} + \frac{e}{kT} \left(E_i + \frac{1}{c} \epsilon_{ikl} c_{0k} B_l \right). \quad (13)$$

Плазма предполагается квазинейтральной. Функции A_i и D_i определяют тепловой поток и диффузию соответственно. Подставляя (12) в уравнение для χ , получаем уравнения для A_i , D_i [1]. В работах [10, 11] было показано, что в присутствии магнитного поля с аксиальным вектором B_i , полярные вектора A_i и D_i можно искать в виде

$$\begin{aligned} A_i &= A^{(1)} v_i + A^{(2)} \epsilon_{ijk} v_j B_k + A^{(3)} B_i (v_j B_j), \\ D_i &= D^{(1)} v_i + D^{(2)} \epsilon_{ijk} v_j B_k + D^{(3)} B_i (v_j B_j), \end{aligned} \quad (14)$$

где v_i , $\epsilon_{ijk} v_j B_k$, $B_i (v_j B_j)$ – три линейно независимых полярных вектора и $A^{(\alpha)}$, $D^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, 3$ являются функциями скаляров v^2 и B^2 . Вводя функции

$$\xi_A = A^{(1)} + iBA^{(2)}, \quad \xi_D = D^{(1)} + iBD^{(2)}, \quad (15)$$

и безразмерную скорость $u_i \sqrt{m_e / (2kT)} v_i$, мы получаем, опуская малые по сравнению с единицей члены m_e / m_i , уравнения для ξ_A и ξ_D в виде

$$\begin{aligned} f_0 \left(u^2 - \frac{5}{2} \right) u_i = \\ = -iBf_0 \frac{e\xi_A}{m_e c} u_i + I_{ee} (\xi_A u_i) + I_{ei} (\xi_{Aii} u_{ii}), \end{aligned} \quad (16)$$

$$f_0 u_i = -iBf_0 \frac{e\xi_D}{m_e c} u_i + I_{ee} (\xi_D u_i) + I_{ei} (\xi_{Dii} u_{ii}), \quad (17)$$

где

$$I_{ee}(\xi_k u_i) = \int f_0 f_{01} (\xi_k u_i + \xi_{k1} u_{i1} - \xi'_k u'_i - \xi'_{k1} u'_{i1}) g_{ee} b d b d \varepsilon d c_i, \quad (18)$$

$$I_{eI}(\xi_k u_{II}) = \int f_0 f_{I0} (\xi_k u_i - \xi'_k u'_i) g_{eI} b d b d \varepsilon d c_i, \quad (19)$$

$k = A, D.$

Согласно [1], решение для функций ξ_A и ξ_D ищется в форме ряда ортогональных полиномов. Полиномы Сонина являются коэффициентами разложения функции $(1-s)^{\frac{3}{2}-1} \exp[xs/(1-s)]$ по степеням s

$$(1-s)^{\frac{3}{2}-1} \exp\left(\frac{xs}{1-s}\right) = \sum S_{3/2}^{(p)}(x) s^p. \quad (20)$$

Они ортогональны,

$$\int_0^\infty e^{-x} S_{3/2}^{(p)}(x) S_{3/2}^{(q)}(x) x^{3/2} dx = \frac{\Gamma(p+5/2)}{p!} \delta_{pq}, \quad (21)$$

и первые три полинома имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} S_{3/2}^{(0)}(x) &= 1, & S_{3/2}^{(1)}(x) &= \frac{5}{2} - x, \\ S_{3/2}^{(2)}(x) &= \frac{35}{8} - \frac{7}{2}x + \frac{1}{2}x^2. \end{aligned} \quad (22)$$

Мы ищем ξ_A , ξ_D , $D^{(3)}$ и $A^{(3)}$ в виде

$$\begin{aligned} \xi_A &= a_0 S_{3/2}^{(0)} + a_1 S_{3/2}^{(1)} + a_2 S_{3/2}^{(2)}, \\ A^{(3)} &= c_0 S_{3/2}^{(0)} + c_1 S_{3/2}^{(1)} + c_2 S_{3/2}^{(2)}, \\ \xi_D &= d_0 S_{3/2}^{(0)} + d_1 S_{3/2}^{(1)} + d_2 S_{3/2}^{(2)}, \\ D^{(3)} &= z_0 S_{3/2}^{(0)} + z_1 S_{3/2}^{(1)} + z_2 S_{3/2}^{(2)}. \end{aligned} \quad (23)$$

Умножая (16) и (17) на $S_{3/2}^{(0)}(u^2)u_i$, $S_{3/2}^{(1)}(u^2)u_i$ и $S_{3/2}^{(2)}(u^2)u_i$ и интегрируя относительно dc_i , мы получаем системы уравнений в общем виде для коэффициентов теплопроводности и термодиффузии

$$\begin{cases} 0 = -\frac{3}{2}i\omega n_e a_0 + a_0(a_{00} + b_{00}) + \\ + a_1(a_{01} + b_{01}) + a_2(a_{02} + b_{02}), \\ -\frac{15}{4}n_e = -\frac{15}{4}i\omega n_e a_1 + a_0(a_{10} + b_{10}) + \\ + a_1(a_{11} + b_{11}) + a_2(a_{12} + b_{12}), \\ 0 = -\frac{105}{16}i\omega n_e a_2 + a_0(a_{20} + b_{20}) + \\ + a_1(a_{21} + b_{21}) + a_2(a_{22} + b_{22}), \end{cases} \quad (24)$$

и для коэффициентов диффузии и диффузионного термоэффекта

$$\begin{cases} -\frac{3}{2} = -\frac{3}{2}i\omega n_e d_0 + d_0(a_{00} + b_{00}) + \\ + d_1(a_{01} + b_{01}) + d_2(a_{02} + b_{02}), \\ 0 = -\frac{15}{4}i\omega n_e d_1 + d_0(a_{10} + b_{10}) + \\ + d_1(a_{11} + b_{11}) + d_2(a_{12} + b_{12}), \\ 0 = -\frac{105}{16}i\omega n_e d_2 + d_0(a_{20} + b_{20}) + \\ + d_1(a_{21} + b_{21}) + d_2(a_{22} + b_{22}). \end{cases} \quad (25)$$

Здесь a_{jk} , b_{jk} матричные элементы для интегралов столкновений, $\omega = eB/(m_e c)$ – циклотронная частота.

4. МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ a_{jk} И b_{jk}

Для расчета матричных элементов a_{jk} , введем следующие переменные [1]:

$$\begin{aligned} G_{ii} &= \frac{1}{2}(c_i + c_{II}) = \frac{1}{2}(c'_i + c'_{II}), \\ g_{ee,i} &= c_{ii} - c_i, & g'_{ee,i} &= c'_{ii} - c'_i, \\ g_{ee} &= |g_{ee,i}| = |g'_{ee,i}| = g_{ee}, & G_{0i} &= G_{II} - c_{0i}, \\ v_i &= G_{0i} - \frac{1}{2}g_{ee,i}, & v_{iI} &= G_{0i} + \frac{1}{2}g_{ee,i}, \\ v^2 + v_1^2 &= 2G_0^2 + \frac{1}{2}g_{ee}^2. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь G_{II} скорость центра масс двух сталкивающихся электронов в лабораторной системе отсчета, G_{0i} – та же величина в сопутствующей системе отсчета, $g_{ee,i}$ – относительная скорость сталкивающихся электронов перед столкновением, $g'_{ee,i}$ – та же величина после столкновения; v_i и v_{iI} – скорости сталкивающихся частиц в сопутствующей системе отсчета, определенной выше. Введем безразмерные переменные

$$\begin{aligned} g_i &= \frac{1}{2}\left(\frac{m_e}{kT}\right)^{1/2} g_{ee,i}, & g'_i &= \frac{1}{2}\left(\frac{m_e}{kT}\right)^{1/2} g'_{ee,i}, \\ g &= |g_i| = |g'_i| = g', & G_i &= \left(\frac{m_e}{kT}\right)^{1/2} G_{0i}, \\ dc_i dc_{iI} &= \left(\frac{2kT}{m_e}\right)^3 dG_i dg_i, & g_i * g'_i &= g^2 \cos(\theta) \\ u^2 + u_1^2 &= G^2 + g^2, & u^2 &= u_i^2, \\ u_1^2 &= u_{iI}^2, & G^2 &= G_i^2. \end{aligned} \quad (27)$$

Элементы

$$a_{j0} = \int f_0 f_{01} S_{3/2}^{(j)}(u^2) u_i [u_i + u_{i'} - u_i' - u_{i'}'] g b d b d \varepsilon d g_i d G_i = 0 \quad (28)$$

равны нулю, поскольку сохранение импульса при столкновении зануляет скобку в (28). Отличные от нуля элементы a_{jk} ($j, k \geq 1$) определяются как

$$a_{jk} = \int f_0 f_{01} [S_{3/2}^{(j)}(u^2) u_i + S_{3/2}^{(j)}(u_1^2) u_{i'} - S_{3/2}^{(j)}(u^2) u_i' - S_{3/2}^{(j)}(u_1^2) u_{i'}'] S_{3/2}^{(k)}(u^2) u_i g b d b d \varepsilon d g_i d G_i. \quad (29)$$

Для того чтобы вычислить матричные элементы b_{jk} и a_{jk} нужно, согласно [1], вычислить следующий типичный интеграл:

$$\frac{1}{n_\alpha n_\beta} \int f_\alpha f_\beta [S_{3/2}^{(j)}(u^2) u_i - S_{3/2}^{(j)}(u^2) u_i'] S_{3/2}^{(k)}(u^2) u_i g_{\alpha\beta} b d b d \varepsilon d c_{\alpha i} d c_{\beta i}, \quad (30)$$

где индексами α и β частицы разных сортов.

Проинтегрировав как показано в [1], можем записать

$$[S_{3/2}^{(j)}(u^2) u_i, S_{3/2}^{(k)}(u^2) u_i]_e = \pi^{-3/2} \int e^{-g^2} \sum A_{jkr} g^{2r} (1 - \cos^l(\theta)) g b d b d \varepsilon d g, \quad (31)$$

где A_{pqrl} — просто число, формула для расчета которого представлена в [1].

Введем функции $\Omega_{ee}^{(l)}(r)$ как

$$\Omega_{ee}^{(l)}(r) = \sqrt{\pi} \int_0^\infty e^{-g^2} g^{2r+1} \phi_{ee}(l) d g, \quad (32)$$

где

$$\phi_{ee}(l) = \int_0^\infty (1 - \cos^l \theta) g b d b. \quad (33)$$

Таким образом (31) можно выразить через (32)

$$[S_{3/2}^{(j)}(u^2) u_i, S_{3/2}^{(k)}(u^2) u_i]_e = 8 \sum A_{jkr} \Omega_{ee}^{(l)}(r) \quad (34)$$

Матричные коэффициенты a_{jk} в общем виде выглядят так

$$\begin{aligned} a_{11} &= 4n_e^2 \Omega_{ee}^{(2)}(2), \\ a_{12} &= 7n_e^2 \Omega_{ee}^{(2)}(2) - 2n_e^2 \Omega_{ee}^{(2)}(3), \\ a_{22} &= \frac{77}{4} n_e^2 \Omega_{ee}^{(2)}(2) - 7n_e^2 \Omega_{ee}^{(2)}(3) + n_e^2 \Omega_{ee}^{(2)}(4). \end{aligned} \quad (35)$$

Расчет матричных элементов b_{jk} , выполняется аналогично, см. [1].

Введем функции $\Omega_{ei}^{(l)}(r)$, аналогично (32):

$$\Omega_{ei}^{(l)}(r) = \sqrt{\pi} \int_0^\infty e^{-g^2} g^{2r+2} \phi_{ei}^{(l)} d g, \quad (36)$$

где

$$\phi_{ei}^{(l)} = \int_0^\infty (1 - \cos^l \theta) g_{ei} b d b. \quad (37)$$

Интегрируя в (37) по прицельному параметру db , видим, что интеграл логарифмически стремится к бесконечности. Он сходится при более точном рассмотрении кулоновских столкновений в плазме с учетом корреляционных функций [23], при этом возникает верхний предел интегрирования b_{\max} .

Для электрон-ионных столкновений с $g_{ei} \sim v_e$ приближенное выражение для кулоновского логарифма записывается в виде [24]

$$\Lambda = \ln \left(\frac{b_{\max} \bar{v}_e^2 m_e}{Z e^2} \right), \quad \Lambda \gg 1, \quad (38)$$

где

$$\bar{v}_e^2 = \frac{3kT}{m_e}. \quad (39)$$

Выражение для электрон-электронного кулоновского логарифма получается из (38) при $Z = 1$. Величина b_{\max} — общий радиус дебаевского экранирования для электронов $r_{\mathcal{D}e}$ и ионов $r_{\mathcal{D}i}$, которую можно выразить как

$$\frac{1}{b_{\max}^2} = \frac{1}{r_{\mathcal{D}i}^2} + \frac{1}{r_{\mathcal{D}e}^2} = \frac{4\pi e^2}{kT} (n_N Z^2 + n_e). \quad (40)$$

Средняя частота электрон-ионных столкновений ν_{ei} в [25] в предельном случае невырожденных электронов записывается как

$$\nu_{ei} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{m_e}} \frac{Z^2 e^4 n_N \Lambda}{(kT)^{3/2}}, \quad \tau_{nd} = 1/\nu_{nd}. \quad (41)$$

С учетом (36), элементы симметричной матрицы b_{ij} имеют вид

$$b_{00} = 8n_e n_i \Omega_{ei}^{(1)}(1), \quad (42)$$

$$b_{01} = 8n_e n_i \left(\frac{5}{2} \Omega_{ei}^{(1)}(1) - \Omega_{ei}^{(1)}(2) \right), \quad (43)$$

$$b_{11} = 8n_e n_i \left(\frac{25}{4} \Omega_{ei}^{(1)}(1) - 5\Omega_{ei}^{(1)}(2) + \Omega_{ei}^{(1)}(3) \right), \quad (44)$$

$$b_{02} = 8n_e n_i \left[\frac{35}{8} \Omega_{eN}^{(1)}(1) - \frac{7}{2} \Omega_{eN}^{(1)}(2) + \frac{1}{2} \Omega_{eN}^{(1)}(3) \right], \quad (45)$$

$$b_{12} = 8n_e n_N \left[\frac{175}{16} \Omega_{ei}^{(1)}(1) - \frac{105}{8} \Omega_{ei}^{(1)}(2) + \frac{19}{4} \Omega_{ei}^{(1)}(3) - \frac{1}{2} \Omega_{ei}^{(1)}(4) \right], \quad (46)$$

$$b_{22} = 8n_e n_i \left[\frac{35^2}{8^2} \Omega_{ei}^{(1)}(1) - \frac{245}{8} \Omega_{ei}^{(1)}(2) + \frac{133}{8} \Omega_{ei}^{(1)}(3) - \frac{7}{2} \Omega_{ei}^{(1)}(4) + \frac{1}{4} \Omega_{ei}^{(1)}(5) \right]. \quad (47)$$

Согласно [1] находим выражения для $\Omega_{eN}^{(1)}(r)$ в виде

$$\Omega_{ei}^{(1)}(r) = \sqrt{\pi} \frac{e^4 \Lambda Z^2}{(2kT)^2} \Gamma(r), \quad \Gamma(1) = 1; \quad (48)$$

$$\Gamma(2) = 1; \quad \Gamma(3) = 2; \quad \Gamma(4) = 6; \quad \Gamma(5) = 24.$$

Используя (41), можно записать b_{jk}

$$b_{00} = 8\sqrt{\pi} \frac{n_e n_N e^4 Z^2 \Lambda}{(2kT)^{3/2} \sqrt{m_e}} = \frac{3n_e}{2\tau_{nd}}, \quad (49)$$

$$b_{01} = 12\sqrt{\pi} \frac{n_e n_N e^4 Z^2 \Lambda}{(2kT)^{3/2} \sqrt{m_e}} = \frac{9n_e}{4\tau_{nd}}, \quad (50)$$

$$b_{11} = 26\sqrt{\pi} \frac{n_e n_N e^4 Z^2 \Lambda}{(2kT)^{3/2} \sqrt{m_e}} = \frac{39n_e}{8\tau_{nd}}, \quad (51)$$

$$b_{02} = 15\sqrt{\pi} \frac{n_e n_N e^4 Z^2 \Lambda}{(2kT)^{3/2} \sqrt{m_e}} = \frac{45n_e}{16\tau_{nd}}, \quad (52)$$

$$b_{12} = \frac{69\sqrt{\pi}}{2} \frac{n_e n_N e^4 Z^2 \Lambda}{(2kT)^{3/2} \sqrt{m_e}} = \frac{207n_e}{32\tau_{nd}}, \quad (53)$$

$$b_{22} = \frac{433\sqrt{\pi}}{8} \frac{n_e n_N e^4 Z^2 \Lambda}{(2kT)^{3/2} \sqrt{m_e}} = \frac{1299n_e}{128\tau_{nd}}. \quad (54)$$

Для плазмы с $\Lambda \gg 1$ из (38) имеем

$$\phi_{ee}(2) \approx \frac{16e^4}{m_e^2 g_{ee}^3}, \quad \Omega_{ee}^{(2)}(r) = \sqrt{\pi} \frac{e^4 \Lambda}{\sqrt{m_e} (kT)^{3/2}} \Gamma(r). \quad (55)$$

Пользуясь (55), имеем из (35) с $n_e = Zn_i$

$$a_{11} = 4n_e^2 \frac{\sqrt{\pi} \Lambda_{ei} e^4}{\sqrt{m_e} (kT)^{3/2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{n_e}{Z\tau_{nd}}, \quad (56)$$

$$a_{12} = 3n_e^2 \frac{\sqrt{\pi} \Lambda_{ei} e^4}{\sqrt{m_e} (kT)^{3/2}} = \frac{9}{4\sqrt{2}} \frac{n_e}{Z\tau_{nd}}, \quad (57)$$

$$a_{22} = \frac{45}{4} n_e^2 \frac{\sqrt{\pi} \Lambda_{ei} e^4}{\sqrt{m_e} (kT)^{3/2}} = \frac{135}{16\sqrt{2}} \frac{n_e}{Z\tau_{nd}}. \quad (58)$$

5. ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ТЕНЗОРОВ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПЕРЕНОСА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Общее соотношение для потока тепла q_i , и средней направленной (диффузионной) скорости электронов $\langle v_i \rangle$, записываются в виде

$$q_i = -\lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} - n_e v_{ij} d_j = q_i^{(A)} + q_i^{(D)}, \quad (59)$$

$$\langle v_i \rangle = -\mu_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} - n_e \eta_{ij} d_j = \langle v_i^{(A)} \rangle + \langle v_i^{(D)} \rangle, \quad (60)$$

где λ_{ij} и v_{ij} – тензоры теплопроводности и диффузионного термоэффекта, а μ_{ij} и η_{ij} – тензоры термодиффузии и диффузии соответственно [5, 26]. Индексами (A) и (D) определяются потоки тепла и диффузионные скорости электронов, определяемые градиентом температуры $\partial T / \partial x_j$, и вектором диффузии d_j соответственно. Тензоры коэффициентов переноса можно записать в виде

$$\lambda_{ik} = \frac{5k^2 T n_e}{2 m_e} \left\{ [a_0^1 - a_1^1] \delta_{ik} - \varepsilon_{ikn} B_n [b_0^1 - b_1^1] + B_i B_k [c_0^1 - c_1^1] \right\}, \quad (61)$$

$$v_{ik} = \frac{5k^2 T^2 n_e}{2 m_e} \left\{ [d_0^1 - d_1^1] \delta_{ik} - \varepsilon_{ikn} B_n [e_0^1 - e_1^1] + B_i B_k [z_0^1 - z_1^1] \right\}, \quad (62)$$

$$\mu_{ik} = \frac{k}{m_e} \left\{ a_0^1 \delta_{ik} - \varepsilon_{ikn} B_n b_0^1 + B_i B_k c_0^1 \right\}, \quad (63)$$

$$\eta_{ik} = \frac{kT}{m_e} \left\{ d_0^1 \delta_{ik} - \varepsilon_{ikn} B_n e_0^1 + B_i B_k z_0^1 \right\}. \quad (64)$$

Здесь a_0^1, b_0^1 есть действительные и мнимые части коэффициента a_0

$$a_0 = a_0^1 + iBb_0^1, \quad a_1 = a_1^1 + iBb_1^1, \quad (65)$$

$$B^2 c_0^1 = (a_0^1)_{B=0} - a_0^1, \quad B^2 c_1^1 = (a_1^1)_{B=0} - a_1^1,$$

а $d_0^1, e_0^1, d_1^1, e_1^1$ есть действительные и мнимые части коэффициентов d_0, d_1

$$d_0 = d_0^1 + iBe_0^1, \quad d_1 = d_1^1 + iBe_1^1, \quad (66)$$

$$B^2 z_0^1 = (d_0^1)_{B=0} - d_0^1, \quad B^2 z_1^1 = (d_1^1)_{B=0} - d_1^1.$$

Метод нахождения коэффициентов тензора теплопроводности λ_{ij} для произвольного вырождения подробно изложен в работе [20], где найдены для них аналитические выражения. Для сильно вырожденных электронов, коэффициенты термодиффузии, диффузии и диффузионного термоэффекта в приближении Лоренца найдены в работе [19].

5.1. Тензор термодиффузии для невырожденных электронов

Чтобы найти коэффициент a_0 , необходимо решить систему уравнений (24) с матричными элементами b_{jk} из (49)–(54) и матричными элементами a_{jk} из (56)–(58). Система для трехполиномиального решения для электронов в присутствии магнитного поля, согласно (24), с учетом (49)–(54), (56)–(58), записывается как

$$\begin{cases} 0 = -\frac{3}{2}i\omega\tau_{nd}a_0 + \frac{3}{2}a_0 + \frac{9}{4}a_1 + \frac{45}{16}a_2, \\ -\frac{15}{4}\tau_{nd} = -\frac{15}{4}i\omega\tau_{nd}a_1 + \frac{9}{4}a_0 + \\ + \frac{3}{2}\left(\frac{13}{4} + \frac{\sqrt{2}}{Z}\right)a_1 + \frac{9}{8}\left(\frac{23}{4} + \frac{\sqrt{2}}{Z}\right)a_2, \\ 0 = -\frac{105}{16}i\omega\tau_{nd}a_2 + \frac{45}{16}a_0 + \\ + \frac{9}{8}\left(\frac{23}{4} + \frac{\sqrt{2}}{Z}\right)a_1 + \frac{3}{32}\left(\frac{433}{4} + \frac{45\sqrt{2}}{Z}\right)a_2. \end{cases} \quad (67)$$

Два первых уравнения при $a_2 = 0$ определяют двухполиномиальное приближение, давая с учетом (63) следующие результаты для случая $B = 0$:

$$a_0 = \frac{15}{4} \frac{\tau_{nd}}{1 + \sqrt{2}/Z}, \quad (68)$$

$$\mu_{nd}^{(2)} = \frac{15}{4} \frac{k}{m_e} \frac{\tau_{nd}}{1 + \sqrt{2}/Z} = 3.75 \frac{k}{m_e} \frac{\tau_{nd}}{1 + \sqrt{2}/Z}. \quad (69)$$

Результаты выше совпадают с результатами, полученными в [9, 10].

В трехполиномиальном приближении и при $B = 0$ мы получаем решение (67) для a_0 в виде

$$a_0 = \frac{165}{32} \frac{1 + 15\sqrt{2}/(11Z)}{1 + 61\sqrt{2}/(16Z) + 9/(2Z^2)} \tau_{nd}, \quad (70)$$

$$\mu_{nd}^{(3)} = 5.1563 \frac{k}{m_e} \frac{1 + 15\sqrt{2}/(11Z)}{1 + 61\sqrt{2}/(16Z) + 9/(2Z^2)} \tau_{nd}. \quad (71)$$

Величина

$$Q = \frac{32m_e\mu_{nd}^{(3)}}{165k\tau_{nd}} = \frac{1 + 15\sqrt{2}/(11Z)}{1 + 61\sqrt{2}/(16Z) + 9/(2Z^2)}, \quad (72)$$

показывающая насколько невырожденные электрон-электронные столкновения уменьшают коэффициент термодиффузии при $B = 0$, представлена в табл. 1 для различных значений Z .

В двухполиномиальном приближении с учетом магнитного поля, принимая $a_2 = 0$, мы получаем решение системы (67) в виде

$$a_0 = \frac{15}{4} \tau_{nd} \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{Z} - \frac{5}{2} \omega^2 \tau_{nd}^2 - \left(\frac{23}{4} + \frac{\sqrt{2}}{Z} \right) i\omega\tau_{nd} \right]^{-1}, \quad (73)$$

Таблица 1. Значения Q для различных химических элементов: водород ($Z = 1$); гелий ($Z = 2$); углерод ($Z = 6$); кислород ($Z = 8$); железо ($Z = 26$), ожидаемые для наружных слоев белых карликов и нейтронных звезд

Z	1	2	6	8	26	∞
Q	0.268	0.407	0.653	0.712	0.885	1

$$a_0^1 = \frac{15}{4} \tau_{nd} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{Z} - \frac{5}{2} \omega^2 \tau_{nd}^2 \right) \zeta, \quad (74)$$

$$b_0^1 = \frac{15\omega\tau_{nd}^2}{4B} \left(\frac{23}{4} + \frac{\sqrt{2}}{Z} \right) \zeta, \quad (75)$$

где коэффициент

$$\zeta = \left[\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{Z} \right)^2 + \left(\frac{449}{16} + \frac{13\sqrt{2}}{2Z} + \frac{2}{Z^2} \right) \omega^2 \tau_{nd}^2 + \frac{25}{4} \omega^4 \tau_{nd}^4 \right]^{-1}. \quad (76)$$

В трехполиномиальном приближении решение системы (67) имеет вид

$$a_0 = \frac{165}{32} \tau_{nd} \left(1 + \frac{15\sqrt{2}}{11Z} - \frac{35}{11} i\omega\tau_{nd} \right) \frac{1}{\zeta_1 - i\omega\tau_{nd}\zeta_2}, \quad (77)$$

$$a_0^1 = \frac{165}{32} \tau_{nd} \left[\left(1 + \frac{15\sqrt{2}}{11Z} \right) \zeta_1 + \frac{35}{11} \omega^2 \tau_{nd}^2 \zeta_2 \right] \times \frac{1}{\zeta_1^2 + \omega^2 \tau_{nd}^2 \zeta_2^2}, \quad (78)$$

$$b_0^1 = \frac{165\omega\tau_{nd}^2}{32B} \left[-\frac{35}{11} \zeta_1 + \left(1 + \frac{15\sqrt{2}}{11Z} \right) \zeta_2 \right] \times \frac{1}{\zeta_1^2 + \omega^2 \tau_{nd}^2 \zeta_2^2}, \quad (79)$$

где

$$\zeta_1 = 1 + \frac{61\sqrt{2}}{16Z} + \frac{9}{2Z^2} - \left(\frac{5385}{128} + \frac{365\sqrt{2}}{32Z} \right) \omega^2 \tau_{nd}^2, \quad (80)$$

$$\zeta_2 = \frac{1017}{64} + \frac{667\sqrt{2}}{32Z} + \frac{9}{2Z^2} - \frac{175}{16} \omega^2 \tau_{nd}^2. \quad (81)$$

Значения c_0^1 в двух и трехполиномиальном приближении определяются с использованием (65).

Диффузионная скорость $\langle v_i^A \rangle$ из (60), (63) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \langle v_i^A \rangle &= -\frac{k}{m_e} \left[a_0^1 \delta_{ik} - \varepsilon_{ikn} B_n b_0^1 + B_i B_k c_0^1 \right] \frac{\partial T}{\partial r_k} = \\ &= \langle v_i^A \rangle^{(1)} + \langle v_i^A \rangle^{(2)} + \langle v_i^A \rangle^{(3)}, \end{aligned} \quad (82)$$

$$\langle v_i^A \rangle^{(1)} = -\frac{k}{m_e} a_0^1 \frac{\partial T}{\partial r_i} = -\mu_{nd}^{(1)} \frac{\partial T}{\partial r_i}, \quad (83)$$

$$\langle v_i^A \rangle^{(2)} = \frac{k}{m_e} \varepsilon_{ikn} B_n b_0^1 \frac{\partial T}{\partial r_k} = \varepsilon_{ikn} B_n \mu_{nd}^{(2)} \frac{\partial T}{\partial r_k}, \quad (84)$$

$$\langle v_i^A \rangle^{(3)} = -\frac{k}{m_e} B_i B_k c_0^1 \frac{\partial T}{\partial r_k} = -B_i B_k \mu_{nd}^{(3)} \frac{\partial T}{\partial r_k}. \quad (85)$$

Для двухполиномиального приближения получаем

$$\begin{aligned} \mu_{nd}^{(12)} &= \frac{k}{m_e} a_0^1 = \frac{15}{4} \frac{k}{m_e} \tau_{nd} \times \\ &\quad \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{Z} - \frac{5}{2} \omega^2 \tau_{nd}^2 \right), \quad (86) \\ &\times \frac{1}{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{Z} \right)^2 + \left(\frac{449}{16} + \frac{13\sqrt{2}}{2Z} + \frac{2}{Z^2} \right) \omega^2 \tau_{nd}^2 + \frac{25}{4} \omega^4 \tau_{nd}^4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{nd}^{(22)} &= -\frac{k}{m_e} b_0^1 = -\frac{15}{4} \frac{k}{m_e} \frac{\omega \tau_{nd}^2}{B} \times \\ &\quad \frac{23 + \frac{\sqrt{2}}{Z}}{4}, \quad (87) \\ &\times \frac{1}{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{Z} \right)^2 + \left(\frac{449}{16} + \frac{13\sqrt{2}}{2Z} + \frac{2}{Z^2} \right) \omega^2 \tau_{nd}^2 + \frac{25}{4} \omega^4 \tau_{nd}^4}, \end{aligned}$$

$$B^2 \mu_{nd}^{(32)} = \mu_{nd}^{(12)}(B=0) - \mu_{nd}^{(12)}. \quad (88)$$

Выражения для коэффициентов термодиффузии в трехполиномиальном приближении могут быть записаны явно, с использованием (78)–(85)

$$\begin{aligned} \mu_{nd}^{(13)} &= \frac{k}{m_e} a_0^1 = \\ &= \frac{165}{32} \frac{k}{m_e} \tau_{nd} \frac{\left(1 + \frac{15\sqrt{2}}{11Z} \right) \zeta_1 + \frac{35}{11} \omega^2 \tau_{nd}^2 \zeta_2}{\zeta_1^2 + \omega^2 \tau_{nd}^2 \zeta_2^2}, \quad (89) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{nd}^{(23)} &= -\frac{k}{m_e} b_0^1 = \\ &= -\frac{165}{32} \frac{k}{m_e} \frac{\omega \tau_{nd}^2}{B} \frac{-\frac{35}{11} \zeta_1 + \left(1 + \frac{15\sqrt{2}}{11Z} \right) \zeta_2}{\zeta_1^2 + \omega^2 \tau_{nd}^2 \zeta_2^2}, \quad (90) \end{aligned}$$

$$B^2 \mu_{nd}^{(33)} = \mu_{nd}^{(13)}(B=0) - \mu_{nd}^{(13)}. \quad (91)$$

Пользуясь (63), можно получить другую форму записи компонентов тензора термодиффузии в магнитном поле. Три компонента теплового потока: параллельная $\langle v_i^A \rangle_{\parallel}$, перпендикулярная $\langle v_i^A \rangle_{\perp}$ к магнитному полю \mathbf{B} , и компонента Холла $\langle v_i^A \rangle_{\text{hall}}$, перпендикулярная к обоим векторам ∇T и \mathbf{B} , с учетом (69) или (71) определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \langle v_i^A \rangle_{\parallel} &= -\mu_{\parallel} \nabla T_{\parallel}, \\ \mu_{\parallel} &= \frac{k}{m_e} [a_0^1 + B^2 c_0^1] = \mu_{nd}, \quad (92) \end{aligned}$$

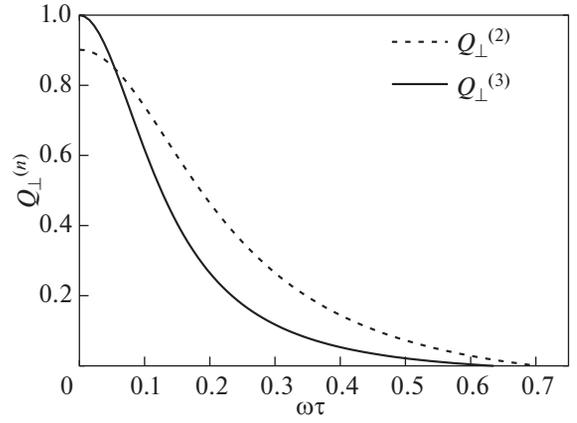


Рис. 1. Сравнение 2- и 3-полиномиального приближения для невырожденной углеродной плазмы при $Z = 6$ для различных $\omega\tau$. Сплошной линией показаны результаты для трехполиномиального приближения, штриховой показаны результаты для двухполиномиального приближения.

$$\langle v_i^A \rangle_{\perp} = -\mu_{\perp} \nabla T_{\perp}, \quad \mu_{\perp} = \frac{k}{m_e} a_0^1, \quad (93)$$

$$\langle v_i^A \rangle_{\text{hall}} = -\mu_{\text{hall}} \frac{\nabla T \times \mathbf{B}}{B}, \quad \mu_{\text{hall}} = -\frac{k}{m_e} B b_0^1. \quad (94)$$

Различие между двух- и трехполиномиальным приближением можно охарактеризовать сравнением величин $Q_{\perp}^{(2)}$ и $Q_{\perp}^{(3)}$

$$Q_{\perp}^{(2)} = \frac{\mu_{nd}^{(12)}}{\mu_{nd}^{(3)}}, \quad Q_{\perp}^{(3)} = \frac{\mu_{nd}^{(13)}}{\mu_{nd}^{(3)}}, \quad (95)$$

где $\mu_{nd}^{(12)}$ определяется в (86), $\mu_{nd}^{(13)}$ определяется в (71) и $\mu_{nd}^{(3)}$ определяется в (89). Функции $Q_{\perp}^{(2)}(\omega\tau_{nd})$, $Q_{\perp}^{(3)}(\omega\tau_{nd})$ представлены на рис. 1 для углерода, $Z = 6$. На данном графике имеем $Q_{\perp}^{(2)} = 0.3531$ и $Q_{\perp}^{(3)} = 0.1754$, при $\omega\tau = 0.25$.

5.2. Точное решение в приближении Лоренца

Приближение Лоренца для решения кинетического уравнения используется, когда масса легких частиц намного меньше, чем масса тяжелых частиц, и, кроме того, можно пренебречь электрон-электронными столкновениями. В этом приближении линеаризованное уравнение Больцмана имеет точное решение. Данное приближение хорошо работает для переноса в металле, где сильное электронное вырождение позволяет пренебречь электрон-электронными столкновениями. Приближение Лоренца можно использовать для проверки приближенного полиномиального решения, так как оно дает возможность проследить за сходимостью прибли-

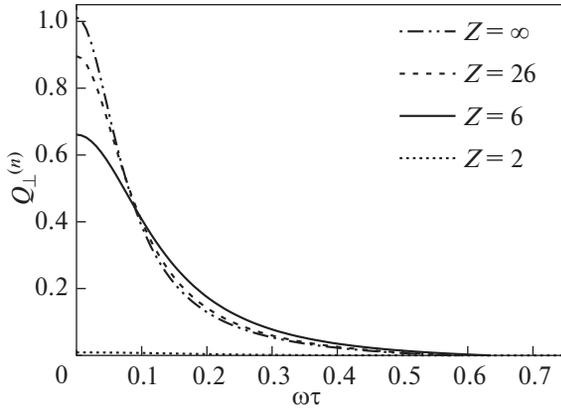


Рис. 2. Графики значений $Q_{\perp}^{(3l)}$ как функции $\omega\tau$ в трехполиномиальном приближении для невырожденной плазмы гелия ($Z = 2$), углерода ($Z = 6$), железа ($Z = 26$) в сравнении с лоренцевской плазмой, формально отвечающей $Z = \infty$. Отклонение от лоренцевской плазмы связано с вкладом электрон-электронных столкновений. Пересечение лоренцевской трехполиномиальной кривой ($Z = \infty$) с осью Y при 1.0124 связано с отклонением от точного решения в приближении Лоренца.

женного решения к точному с увеличением степени полиномов. Решение в приближении Лоренца рассматривалось в разных подходах [1, 16, 17, 27], см. также [24]. Для теплопроводности сходимость полиномиального решения к точному была рассмотрена в [20]. Точное решение в явном виде для приближения Лоренца получено для случая $B = 0$:

$$\langle v_i^A \rangle = -\frac{128k}{\Lambda} \frac{m_e(kT)^3}{n_N n_e Z^2 e^4 h^3} \left(G_4 - \frac{5G_{5/2}}{8G_{3/2}} G_3 \right) \frac{\partial T}{\partial r_i}. \quad (96)$$

Здесь G_i – интеграл Ферми, см. [24]. В предельных случаях коэффициент в (96) сводится к

$$\begin{aligned} \mu_e^l &= \frac{12k}{\pi^{3/2} \Lambda n_N} \frac{(kT)^{3/2}}{e^4 Z^2 \sqrt{2m_e}} = \frac{16k}{m_e \pi} \tau_{nd}(ND) \\ &= \frac{2}{3\Lambda} \frac{k^2 T \pi h}{n_e n_N Z^2 e^4 m_e} \left(\frac{3n_e}{8\pi} \right)^{4/3} = \frac{4\pi^3}{3} \frac{k^2 T}{n_e h^2} \left(\frac{3n_e}{\pi} \right)^{1/3} \tau_d(D). \end{aligned} \quad (97)$$

Точные формулы в модели Лоренца используются [1] для оценки точности полиномиального приближения. Вклад электрон-электронных столкновений в коэффициент термодиффузии для различных Z можно оценить из графика нормированных трехполиномиальных коэффициентов термодиффузии в направлении, перпендикулярном к магнитному полю, введя величину $Q_{\perp}^{(3l)}$, определяемую как

$$Q_{\perp}^{(3l)} = \frac{\mu_{nd}^{(13)}}{\mu_{e,nd}^l}. \quad (98)$$

Здесь $\mu_{e,nd}^l$ взято из верхней строчки в (97). Кривые для различных Z , включая $Z = \infty$, относящиеся к приближению Лоренца, изображены на рис. 2. Пересечение графиков с осью y на рис. 2 происходит в точках, данных в табл. 1, умноженных на $\mu_{nd}^{(3l)}/\mu_{e,nd}^l = 1.0124$. При $\omega\tau = 0.25$ имеем $Q_{\perp}^{(3l)} = 0.0824, 0.0908, 0.1159, 0.0025$ для $Z = \infty, 26, 6, 2$ соответственно.

5.3. Вычисления полиномов без учета столкновений между электронами, термодиффузия

Чтобы проверить точность полиномиального приближения для коэффициентов термодиффузии, мы сравниваем их с коэффициентами, полученными как точное решение в приближении Лоренца. В отсутствии магнитного поля в приближении Лоренца с $a_{jk} = 0$ система (24) сводится к

$$\begin{cases} 0 = a_0 b_{00} + a_1 b_{01} + a_2 b_{02}, \\ -\frac{15}{4} n_e = a_0 b_{10} + a_1 b_{11} + a_2 b_{12}, \\ 0 = a_0 b_{20} + a_1 b_{21} + a_2 b_{22}. \end{cases} \quad (99)$$

С учетом (49)–(54) запишем данную систему как

$$\begin{cases} 0 = \frac{3}{2} a_0 + \frac{9}{4} a_1 + \frac{45}{16} a_2, \\ -\frac{15}{4} \tau_{nd} = \frac{9}{4} a_0 + \frac{39}{8} a_1 + \frac{207}{32} a_2, \\ 0 = \frac{45}{16} a_0 + \frac{207}{32} a_1 + \frac{1299}{128} a_2. \end{cases} \quad (100)$$

Эта система записывается для трехполиномиального приближения. Два первых уравнения при $a_2 = 0$ задают двухполиномиальное приближение, давая, с учетом (63), следующие результаты:

$$a_0 = \frac{15}{4} \tau_{nd}, \quad \mu_{ndl}^{(2)} = \frac{15}{4} \frac{k}{m_e} \tau_{nd} = 3.75 \frac{k}{m_e} \tau_{nd}. \quad (101)$$

В трехполиномиальном приближении мы получаем решение (100) для a_0 и, с учетом (63), коэффициент термодиффузии в виде:

$$a_0 = \frac{165}{32} \tau_{nd}, \quad \mu_{ndl}^{(3)} = \frac{165}{32} \frac{k}{m_e} \tau_{nd} = 5.1563 \frac{k}{m_e} \tau_{nd}. \quad (102)$$

Термодиффузию, полученную методом последовательных приближений полиномов, следует сравнить с точным решением λ_{nd}^l , полученным методом Лоренца (97) для невырожденных электронов

$$\mu_{nd}^{(l)} = \frac{16}{\pi} \frac{k}{m_e} \tau_{nd} = 5.0931 \frac{k^2 T n_e}{m_e} \tau_{nd}. \quad (103)$$

Ясно, что двухполиномиальное решение недооценивает коэффициент термодиффузии на 26%,

а трехполиномиальное решение переоценивает приблизительно на 1.3%. Уравнения в случае трехполиномиального приближения в присутствии магнитного поля получены из (24) с учетом (49)–(54), (100) в виде

$$\begin{cases} 0 = -\frac{3}{2}i\omega\tau_{nd}a_0 + \frac{3}{2}a_0 + \frac{9}{4}a_1 + \frac{45}{16}a_2, \\ -\frac{15}{4}\tau_{nd} = -\frac{15}{4}i\omega\tau_{nd}a_1 + \frac{9}{4}a_0 + \frac{39}{8}a_1 + \frac{207}{32}a_2, \\ 0 = -\frac{105}{16}i\omega\tau_{nd}a_2 + \frac{45}{16}a_0 + \frac{207}{32}a_1 + \frac{1299}{128}a_2. \end{cases} \quad (104)$$

Явное решение уравнений (104) для двух- и трехполиномиальных приближений определяется формулами (73)–(79) при формально бесконечном значении Z .

5.4. Частично вырожденные электроны

Для частично вырожденных электронов, для которых матричные коэффициенты b_{jk} были посчитаны в работе [20], при $x_0 = 0$ с уровнем вырождения $DL = \epsilon_{fe}/kT = 1.011$, система (24) записывается в виде

$$\begin{cases} 0 = -1.5i\omega n_e a_0 + a_0 b_{00} + a_1 b_{01} + a_2 b_{02}, \\ -3.88n_e = -3.88i\omega n_e a_1 + a_0 b_{10} + a_1 b_{11} + a_2 b_{12}, \\ 0 = -7.138i\omega n_e a_2 + a_0 b_{20} + a_1 b_{21} + a_2 b_{22}. \end{cases} \quad (105)$$

В отсутствие магнитного поля эта система сводится к

$$\begin{cases} 0 = 1.5a_0 + 2.16a_1 + 2.588a_2, \\ -3.88\tau_{d0} = 2.16a_0 + 5.162a_1 + 6.671a_2, \\ 0 = 2.588a_0 + 6.671a_1 + 11.038a_2. \end{cases} \quad (106)$$

Первые два уравнения при $a_2 = 0$ определяют двухполиномиальное приближение, которое с учетом (63), дает следующий результат:

$$a_0 = 2.723\tau_{d0}, \quad \mu_{d0l}^{(2)} = 2.723 \frac{k}{m_e} \tau_{d0}. \quad (107)$$

В трехполиномиальном приближении, с учетом (63), мы получаем решение (106) для a_0, a_1 , а также коэффициент теплопроводности в виде

$$a_0 = 3.533\tau_{d0}, \quad \mu_{d0l}^{(3)} = 3.533 \frac{k}{m_e} \tau_{d0}. \quad (108)$$

Сравним коэффициент термодиффузии, полученный методом последовательных приближений полиномами с точным решением μ_{nd}^l , полученным методом Лоренца (96) для невырожденных электронов

$$\mu_{d0}^{(l)} = 0.744 \frac{16}{\pi} \frac{k}{m_e} \tau_{d0} = 3.789 \frac{k}{m_e} \tau_{d0}. \quad (109)$$

Видно, что двухполиномиальное решение недооценивает коэффициент термодиффузии более, чем на 28%, а трехполиномиальное решение отличается от точного решения приблизительно на 7%.

6. ТЕНЗОРЫ ДИФFUЗИИ И ДИФFUЗИОННОГО ТЕРМОЭФФЕКТА ДЛЯ НЕВЫРОЖДЕННЫХ ЭЛЕКТРОНОВ

Для невырожденных электронов тензоры (64) и (62) записываются в виде

$$\eta_{ik} = \frac{kT}{m_e} [d_0^l \delta_{ik} - \epsilon_{ijk} B_n e_0^l + B_i B_k z_0^l], \quad (110)$$

$$\begin{aligned} v_{ik} = \frac{5k^2 T^2}{2m_e} n_e [(d_0^l - d_1^l) \delta_{ik} - \\ - \epsilon_{ijk} B_n (e_0^l - e_1^l) + B_i B_k (z_0^l - z_1^l)]. \end{aligned} \quad (111)$$

Чтобы найти коэффициенты d_0, d_1 для произвольного вырождения электронов, аналогично поиску коэффициентов термодиффузии, необходимо решить систему уравнений (25) с матричными элементами b_{jk} из (42)–(47) и матричными элементами a_{jk} .

Для невырожденных электронов с учетом трехполиномиального разложения, система (25) должна быть записана как

$$\begin{cases} -\frac{3}{2} \frac{\tau_{nd}}{n_e} = -\frac{3}{2} i\omega\tau_{nd} d_0 + \frac{3}{2} d_0 + \frac{9}{4} d_1 + \frac{45}{16} d_2, \\ 0 = -\frac{15}{4} i\omega\tau_{nd} d_1 + \frac{9}{4} d_0 + \frac{3}{2} \left(\frac{13}{4} + \frac{\sqrt{2}}{Z} \right) d_1 + \\ + \frac{9}{8} \left(\frac{23}{4} + \frac{\sqrt{2}}{Z} \right) d_2, \\ 0 = -\frac{105}{16} i\omega\tau_{nd} d_2 + \frac{45}{16} d_0 + \frac{9}{8} \left(\frac{23}{4} + \frac{\sqrt{2}}{Z} \right) d_1 + \\ + \frac{3}{32} \left(\frac{433}{4} + \frac{45\sqrt{2}}{Z} \right) d_2. \end{cases} \quad (112)$$

Два первых уравнения при $d_2 = 0$ определяют двухполиномиальное приближение, давая с учетом (64), (62) следующие результаты для случая $B = 0$:

$$d_0 = -\frac{\tau_{nd}}{n_e} \frac{13/4 + \sqrt{2}/Z}{1 + \sqrt{2}/Z}, \quad d_1 = \frac{3}{2} \frac{\tau_{nd}}{n_e} \frac{1}{1 + \sqrt{2}/Z}, \quad (113)$$

$$\begin{aligned} \eta_{nd}^{(2)} = -\frac{kT}{m_e} \frac{\tau_{nd}}{n_e} \frac{13/4 + \sqrt{2}/Z}{1 + \sqrt{2}/Z}, \\ v_{nd}^{(2)} = -\frac{5k^2 T^2}{2m_e} \tau_{nd} \frac{19/4 + \sqrt{2}/Z}{1 + \sqrt{2}/Z}. \end{aligned} \quad (114)$$

Результаты выше совпадают с результатами, полученными в [9, 10].

В трехполиномиальном приближении и при $B = 0$ мы получаем решение (112) для d_0 и d_1 , в виде

$$d_0 = -\frac{\tau_{nd}}{n_e} \frac{217/64 + 151\sqrt{2}/(16Z) + 9/(2Z^2)}{1 + 61\sqrt{2}/(16Z) + 9/(2Z^2)}, \quad (115)$$

$$d_1 = \frac{\tau_{nd}}{n_e} \frac{33/16 + 45\sqrt{2}/(16Z)}{1 + 61\sqrt{2}/(16Z) + 9/(2Z^2)}, \quad (116)$$

$$\eta_{nd}^{(3)} = -\frac{kT \tau_{nd}}{m_e n_e} \frac{217/64 + 151\sqrt{2}/(16Z) + 9/(2Z^2)}{1 + 61\sqrt{2}/(16Z) + 9/(2Z^2)}, \quad (117)$$

$$v_{nd}^{(3)} = -\frac{5k^2 T^2}{2 m_e} \times \frac{349/64 + 196\sqrt{2}/(16Z) + 9/(2Z^2)}{1 + 61\sqrt{2}/(16Z) + 9/(2Z^2)} \tau_{nd}. \quad (118)$$

Значения величины

$$U = \frac{64m_e n_e \eta_{nd}^{(3)}}{217kT \tau_{nd}} = -\frac{1 + 302\sqrt{2}/(17Z) + 288(217Z^2)}{1 + 61\sqrt{2}/(16Z) + 9/(2Z^2)}, \quad (119)$$

$$W = \frac{128m_e v_{nd}^{(3)}}{1745k^2 T^2 \tau_{nd}} = -\frac{1 + 784\sqrt{2}/(349Z) + 288/(349Z^2)}{1 + 61\sqrt{2}/(16Z) + 9/(2Z^2)}, \quad (120)$$

показывающие насколько невырожденные электрон-электронные столкновения уменьшают коэффициенты диффузии и диффузионного термоэффекта при $B = 0$, представлены в табл. 2 и 3 для различных значений Z .

В двухполиномиальном приближении с учетом магнитного поля, принимая $d_2 = 0$, мы получаем решение системы (112) в виде

$$d_0 = \left(-\frac{13}{4} - \frac{\sqrt{2}}{Z} + \frac{5}{2} i\omega\tau_{nd} \right) \frac{\tau_{nd}}{n_e} \times \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{Z} - \frac{5}{2} \omega^2 \tau_{nd}^2 - \left(\frac{23}{4} + \frac{\sqrt{2}}{Z} \right) i\omega\tau_{nd} \right]^{-1}, \quad (121)$$

$$d_0^1 = \frac{\tau_{nd}}{n_e} \left(-\frac{13}{4} - \frac{17\sqrt{2}}{4Z} - \frac{25}{4} \omega^2 \tau_{nd}^2 - \frac{2}{Z^2} \right) \zeta, \quad (122)$$

$$e_0^1 = -\frac{1}{n_e} \frac{\omega\tau_{nd}^2}{B} \left(\frac{259}{16} + \frac{13\sqrt{2}}{2Z} + \frac{2}{Z^2} + \frac{25}{4} \omega^2 \tau_{nd}^2 \right) \zeta, \quad (123)$$

$$d_1 = \frac{13}{4} \frac{\tau_{nd}}{n_e} \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{Z} - \frac{5}{2} \omega^2 \tau_{nd}^2 - \left(\frac{23}{4} + \frac{\sqrt{2}}{Z} \right) i\omega\tau_{nd} \right]^{-1}, \quad (124)$$

Таблица 2. Значения U для различных химических элементов: водород ($Z = 1$); гелий ($Z = 2$); углерод ($Z = 6$); кислород ($Z = 8$); железо ($Z = 26$), ожидаемые для наружных слоев белых карликов и нейтронных звезд

Z	1	2	6	8	26	∞
U	0.575	0.684	0.836	0.868	0.949	1

Таблица 3. Значения W для различных химических элементов: водород ($Z = 1$); гелий ($Z = 2$); углерод ($Z = 6$); кислород ($Z = 8$); железо ($Z = 26$), ожидаемые для наружных слоев белых карликов и нейтронных звезд

Z	1	2	6	8	26	∞
W	0.459	0.579	0.767	0.809	0.925	1

$$d_1^1 = \frac{\tau_{nd}}{n_e} \frac{3}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{Z} - \frac{5}{2} \omega^2 \tau_{nd}^2 \right) \zeta, \quad (125)$$

$$e_1^1 = \frac{1}{n_e} \frac{\omega\tau_{nd}^2}{B} \frac{3}{2} \left(\frac{23}{4} + \frac{\sqrt{2}}{Z} \right) \zeta, \quad (126)$$

где значения ζ , ζ_1 , ζ_2 определены в (76), (80), (81).

В трехполиномиальном приближении решение системы (112) имеет вид

$$d_0 = \frac{\tau_{nd}}{n_e} \left(-\frac{217}{64} - \frac{151\sqrt{2}}{16Z} - \frac{9}{2Z^2} + \frac{175}{16} \omega^2 \tau_{nd}^2 + i\omega\tau_{nd} \left(\frac{3985}{128} + \frac{365\sqrt{2}}{32Z} \right) \right) \frac{1}{\zeta_1 - i\omega\tau_{nd}\zeta_2}, \quad (127)$$

$$d_0^1 = \frac{\tau_{nd}}{n_e} \left[\left(-\frac{217}{64} - \frac{151\sqrt{2}}{16Z} - \frac{9}{2Z^2} + \frac{175}{16} \omega^2 \tau_{nd}^2 \right) \zeta_1 - \omega^2 \tau_{nd}^2 \left(\frac{3985}{128} + \frac{365\sqrt{2}}{32Z} \right) \zeta_2 \right] \frac{1}{\zeta_1^2 + \omega^2 \tau_{nd}^2 \zeta_2^2}, \quad (128)$$

$$e_0^1 = \frac{1}{n_e} \frac{\omega\tau_{nd}^2}{B} \left[\left(\frac{3985}{128} + \frac{365\sqrt{2}}{32Z} \right) \zeta_1 - \left(\frac{217}{64} + \frac{151\sqrt{2}}{16Z} + \frac{9}{2Z^2} - \frac{175}{16} \omega^2 \tau_{nd}^2 \right) \zeta_2 \right] \frac{1}{\zeta_1^2 + \omega^2 \tau_{nd}^2 \zeta_2^2}, \quad (129)$$

$$d_1 = \frac{\tau_{nd}}{n_e} \left(\frac{33}{16} + \frac{45\sqrt{2}}{16Z} - \frac{105}{16} i\omega\tau_{nd} \right) \frac{1}{\zeta_1 - i\omega\tau_{nd}\zeta_2}, \quad (130)$$

$$d_1^1 = \frac{\tau_{nd}}{n_e} \left[\left(\frac{33}{16} + \frac{45\sqrt{2}}{16Z} \right) \zeta_1 + \frac{105}{16} \omega^2 \tau_{nd}^2 \zeta_2 \right] \times \frac{1}{\zeta_1^2 + \omega^2 \tau_{nd}^2 \zeta_2^2}, \quad (131)$$

$$e_1^1 = \frac{1}{n_e} \frac{\omega\tau_{nd}^2}{B} \left[-\frac{105}{16} \zeta_1 + \left(\frac{33}{16} + \frac{45\sqrt{2}}{16Z} \right) \zeta_2 \right] \times \frac{1}{\zeta_1^2 + \omega^2 \tau_{nd}^2 \zeta_2^2}. \quad (132)$$

Значения z_0^1 в двух- и трехполиномиальном приближении определяются с использованием (66).

Скорость $\langle v_i^D \rangle$ может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \langle v_i^D \rangle &= -n_e \frac{kT}{m_e} \left[d_0^1 \delta_{ik} - \varepsilon_{ikn} B_n e_0^1 + B_i B_k z_0^1 \right] d_k = \\ &= \langle v_i^D \rangle^{(1)} + \langle v_i^D \rangle^{(2)} + \langle v_i^D \rangle^{(3)}. \end{aligned} \quad (133)$$

Поток тепла $q_i^{(D)}$ может быть записан как

$$\begin{aligned} q_i^D &= -n_e \frac{5k^2 T^2 n_e}{2 m_e} \left[(d_0^1 - d_1^1) \delta_{ik} - \varepsilon_{ikn} B_n (e_0^1 - e_1^1) + B_i B_k (z_0^1 - z_1^1) \right] d_k = \\ &= q_i^{D(1)} + q_i^{D(2)} + q_i^{D(3)}, \end{aligned} \quad (134)$$

Откуда:

$$\langle v_i^D \rangle^{(1)} = -n_e \frac{kT}{m_e} d_0^1 d_k = -n_e \eta_{nd}^{(1)} d_k, \quad (135)$$

$$\langle v_i^D \rangle^{(2)} = n_e \frac{kT}{m_e} \varepsilon_{ikn} B_n e_0^1 d_k = n_e \varepsilon_{ikn} B_n \eta_{nd}^{(2)} d_k, \quad (136)$$

$$\langle v_i^D \rangle^{(3)} = -n_e \frac{kT}{m_e} B_i B_k z_0^1 d_k = -n_e B_i B_k \eta_{nd}^{(3)} d_k, \quad (137)$$

$$q_i^{D(1)} = -n_e \frac{k^2 T^2 n_e}{m_e} (d_0^1 - d_1^1) \delta_{ik} d_k = -n_e v_{nd}^{(1)} d_k, \quad (138)$$

$$\begin{aligned} q_i^{D(2)} &= n_e \frac{k^2 T^2 n_e}{m_e} \varepsilon_{ikn} B_n (e_0^1 - e_1^1) d_k = \\ &= n_e \varepsilon_{ikn} B_n v_{nd}^{(2)} d_k, \end{aligned} \quad (139)$$

$$\begin{aligned} q_i^{D(3)} &= -n_e \frac{k^2 T^2 n_e}{m_e} B_i B_k (z_0^1 - z_1^1) d_k = \\ &= -n_e B_i B_k v_{nd}^{(3)} d_k. \end{aligned} \quad (140)$$

Для двухполиномиального приближения получаем

$$\begin{aligned} \eta_{nd}^{(12)} &= \frac{kT}{m_e} d_0^1 = \frac{kT}{m_e} \frac{\tau_{nd}}{n_e} \times \\ &= \frac{-\frac{13}{4} - \frac{17\sqrt{2}}{4Z} - \frac{2}{Z^2} - \frac{25}{4} \omega^2 \tau_{nd}^2}{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{Z}\right)^2 + \left(\frac{449}{16} + \frac{13\sqrt{2}}{2Z} + \frac{2}{Z^2}\right) \omega^2 \tau_{nd}^2 + \frac{25}{4} \omega^4 \tau_{nd}^4}, \end{aligned} \quad (141)$$

$$\times \frac{-\frac{13}{4} - \frac{17\sqrt{2}}{4Z} - \frac{2}{Z^2} - \frac{25}{4} \omega^2 \tau_{nd}^2}{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{Z}\right)^2 + \left(\frac{449}{16} + \frac{13\sqrt{2}}{2Z} + \frac{2}{Z^2}\right) \omega^2 \tau_{nd}^2 + \frac{25}{4} \omega^4 \tau_{nd}^4},$$

$$\begin{aligned} \eta_{nd}^{(22)} &= -\frac{kT}{m_e} e_0^1 = -\frac{kT}{m_e} \frac{1}{n_e} \frac{\omega \tau_{nd}^2}{B} \times \\ &= \frac{-\frac{259}{16} - \frac{13\sqrt{2}}{2Z} - \frac{2}{Z^2} - \frac{25}{4} \omega^2 \tau_{nd}^2}{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{Z}\right)^2 + \left(\frac{449}{16} + \frac{13\sqrt{2}}{2Z} + \frac{2}{Z^2}\right) \omega^2 \tau_{nd}^2 + \frac{25}{4} \omega^4 \tau_{nd}^4}, \end{aligned} \quad (142)$$

$$\times \frac{-\frac{259}{16} - \frac{13\sqrt{2}}{2Z} - \frac{2}{Z^2} - \frac{25}{4} \omega^2 \tau_{nd}^2}{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{Z}\right)^2 + \left(\frac{449}{16} + \frac{13\sqrt{2}}{2Z} + \frac{2}{Z^2}\right) \omega^2 \tau_{nd}^2 + \frac{25}{4} \omega^4 \tau_{nd}^4},$$

$$B^2 \eta_{nd}^{(32)} = \eta_{nd}^{(12)} (B=0) - \eta_{nd}^{(12)}, \quad (143)$$

$$\begin{aligned} v_{nd}^{(12)} &= \frac{5k^2 T^2 n_e}{2 m_e} (d_0^1 - d_1^1) = \frac{5k^2 T^2 n_e}{2 m_e} \frac{\tau_{nd}}{n_e} \times \\ &= \frac{-\frac{19}{4} - \frac{23\sqrt{2}}{4Z} - \frac{2}{Z^2} - \frac{5}{2} \omega^2 \tau_{nd}^2}{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{Z}\right)^2 + \left(\frac{449}{16} + \frac{13\sqrt{2}}{2Z} + \frac{2}{Z^2}\right) \omega^2 \tau_{nd}^2 + \frac{25}{4} \omega^4 \tau_{nd}^4}, \end{aligned} \quad (144)$$

$$\times \frac{-\frac{19}{4} - \frac{23\sqrt{2}}{4Z} - \frac{2}{Z^2} - \frac{5}{2} \omega^2 \tau_{nd}^2}{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{Z}\right)^2 + \left(\frac{449}{16} + \frac{13\sqrt{2}}{2Z} + \frac{2}{Z^2}\right) \omega^2 \tau_{nd}^2 + \frac{25}{4} \omega^4 \tau_{nd}^4},$$

$$\begin{aligned} v_{nd}^{(22)} &= -\frac{5k^2 T^2 n_e}{2 m_e} (e_0^1 - e_1^1) = -\frac{5k^2 T^2 n_e}{2 m_e} \frac{1}{n_e} \frac{\omega \tau_{nd}^2}{B} \times \\ &= \frac{-\frac{397}{16} - \frac{8\sqrt{2}}{Z} - \frac{2}{Z^2} - \frac{25}{4} \omega^2 \tau_{nd}^2}{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{Z}\right)^2 + \left(\frac{449}{16} + \frac{13\sqrt{2}}{2Z} + \frac{2}{Z^2}\right) \omega^2 \tau_{nd}^2 + \frac{25}{4} \omega^4 \tau_{nd}^4}, \end{aligned} \quad (145)$$

$$\times \frac{-\frac{397}{16} - \frac{8\sqrt{2}}{Z} - \frac{2}{Z^2} - \frac{25}{4} \omega^2 \tau_{nd}^2}{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{Z}\right)^2 + \left(\frac{449}{16} + \frac{13\sqrt{2}}{2Z} + \frac{2}{Z^2}\right) \omega^2 \tau_{nd}^2 + \frac{25}{4} \omega^4 \tau_{nd}^4},$$

$$B^2 v_{nd}^{(32)} = v_{nd}^{(12)} (B=0) - v_{nd}^{(12)}. \quad (146)$$

Выражения для коэффициентов диффузии в трехполиномиальном приближении могут быть записаны явно, с использованием (128)–(132):

$$\eta_{nd}^{(13)} = \frac{kT}{m_e} d_0^1 = \frac{kT}{m_e} \frac{\tau_{nd}}{n_e} \frac{\left(-\frac{217}{64} - \frac{151\sqrt{2}}{16Z} - \frac{9}{2Z^2} + \frac{175}{16} \omega^2 \tau_{nd}^2\right) \zeta_1 - \omega^2 \tau^2 \left(\frac{3985}{128} + \frac{365\sqrt{2}}{32Z}\right) \zeta_2}{\zeta_1^2 + \omega^2 \tau^2 \zeta_2^2}, \quad (147)$$

$$\eta_{nd}^{(23)} = -\frac{kT}{m_e} e_0^1 = -\frac{kT}{m_e} \frac{\omega \tau_{nd}^2}{B n_e} \frac{\left(\frac{3985}{128} + \frac{365\sqrt{2}}{32Z}\right) \zeta_1 - \left(\frac{217}{64} + \frac{151\sqrt{2}}{16Z} + \frac{9}{2Z^2} - \frac{175}{16} \omega^2 \tau_{nd}^2\right) \zeta_2}{\zeta_1^2 + \omega^2 \tau^2 \zeta_2^2}, \quad (148)$$

$$B^2 \eta_{nd}^{(33)} = \eta_{nd}^{(13)} (B=0) - \eta_{nd}^{(13)}. \quad (149)$$

Аналогично для диффузионного термоэффекта

$$v_{nd}^{(13)} = \frac{5k^2 T^2 n_e}{2 m_e} (d_0^1 - d_1^1) = \frac{5k^2 T^2 n_e}{2 m_e} \frac{\left(-\frac{349}{64} - \frac{49\sqrt{2}}{4Z} - \frac{9}{2Z^2} + \frac{175}{16} \omega^2 \tau_{nd}^2\right) \zeta_1 - \omega^2 \tau^2 \left(\frac{4825}{128} + \frac{365\sqrt{2}}{32Z}\right) \zeta_2}{\zeta_1^2 + \omega^2 \tau^2 \zeta_2^2}, \quad (150)$$

$$v_{nd}^{(23)} = -\frac{5k^2T^2n_e}{2m_e}(e_0^1 - e_1^1) = -\frac{5k^2T^2}{2m_e} \frac{\omega\tau_{nd}^2 \left(\frac{4825}{128} + \frac{365\sqrt{2}}{32Z} \right) \zeta_1 - \zeta_2 \left(\frac{349}{64} + \frac{196\sqrt{2}}{16Z} + \frac{9}{2Z^2} - \frac{175}{16} \omega^2\tau_{nd}^2 \right)}{\zeta_1^2 + \omega^2\tau_{nd}^2\zeta_2^2}, \quad (151)$$

$$B^2 v_{nd}^{(33)} = v_{nd}^{(13)}(B=0) - v_{nd}^{(13)}. \quad (152)$$

Получим другую форму записи компонентов тензоров диффузии и диффузионного термоэффекта в магнитном поле аналогично термодиффузии. Три компоненты теплового потока и диффузионной скорости: параллельные $\langle v_i^D \rangle_{\parallel}$, q_{\parallel}^D , перпендикулярные $\langle v_i^D \rangle_{\perp}$, q_{\perp}^D к магнитному полю \mathbf{B} , и компоненты Холла $\langle v_i^D \rangle_{\text{hall}}$, q_{hall}^D , перпендикулярные к обоим векторам ∇T и \mathbf{B} , определяются соотношениями

$$\langle v_i^D \rangle_{\parallel} = -n_e \eta_{\parallel} d_{i\parallel}, \quad q_{\parallel}^D = -n_e v_{\parallel} d_{i\parallel}, \quad (153)$$

$$\eta_{\parallel} = \frac{kT}{m_e} [d_0^1 + B^2(z_0^1)] = \eta_{nd}, \quad (154)$$

$$v_{\parallel} = \frac{5k^2T^2n_e}{2m_e} [(d_0^1 - d_1^1) + B^2(z_0^1 - z_1^1)] = v_{nd}, \quad (155)$$

$$\langle v_i^D \rangle_{\perp} = -n_e \eta_{\perp} d_{i\perp}, \quad \eta_{\perp} = \frac{kT}{m_e} (d_0^1), \quad (156)$$

$$q_{\perp}^D = -n_e v_{\perp} d_{i\perp}, \quad v_{\perp} = \frac{5k^2T^2n_e}{2m_e} (d_0^1 - d_1^1), \quad (157)$$

$$\langle v_i^D \rangle_{\text{hall}} = -n_e \eta_{\text{hall}} \frac{\mathbf{d} \times \mathbf{B}}{B}, \quad \eta_{\text{hall}} = \frac{kT}{m_e} B e_0^1. \quad (158)$$

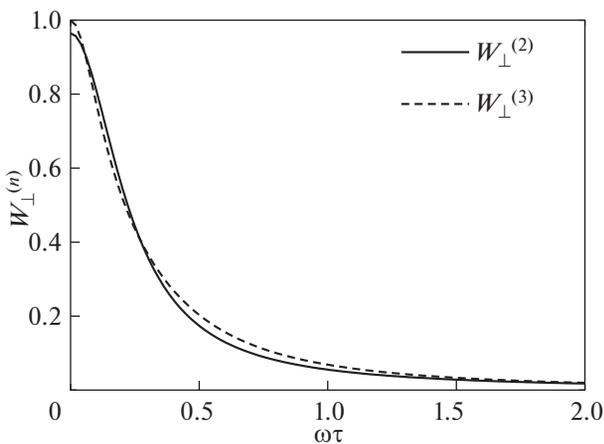


Рис. 3. Диффузионный термоэффект. Сравнение двух- и трехполиномиального приближения для невырожденной углеродной плазмы при $Z = 6$ для различных $\omega\tau$.

$$q_{\text{hall}}^D = -n_e v_{\text{hall}} \frac{\nabla T \times \mathbf{B}}{B}, \quad (159)$$

$$v_{\text{hall}} = \frac{5k^2T^2n_e}{2m_e} B(e_0^1 - e_0^1).$$

Результаты для двух полиномов совпадают с соответствующими результатами, полученными в [9, 10].

Различие между двух и трехполиномиальным приближением можно охарактеризовать сравнением величин $U_{\perp}^{(2)}$, $W_{\perp}^{(2)}$ и $U_{\perp}^{(3)}$, $W_{\perp}^{(3)}$:

$$U_{\perp}^{(2)} = \frac{\eta_{nd}^{(12)}}{\eta_{nd}^{(3)}}, \quad U_{\perp}^{(3)} = \frac{\eta_{nd}^{(13)}}{\eta_{nd}^{(3)}}, \quad (160)$$

$$W_{\perp}^{(2)} = \frac{v_{nd}^{(12)}}{v_{nd}^{(3)}}, \quad W_{\perp}^{(3)} = \frac{v_{nd}^{(13)}}{v_{nd}^{(3)}}$$

где $\eta_{nd}^{(12)}$, $v_{nd}^{(12)}$ определяются в (141), (144), $\eta_{nd}^{(3)}$, $v_{nd}^{(3)}$ определяются в (118), (117) и $\eta_{nd}^{(13)}$, $v_{nd}^{(13)}$ определяются в (147), (150). Функции $U_{\perp}^{(2)}(\omega\tau_{nd})$, $W_{\perp}^{(2)}(\omega\tau_{nd})$, $U_{\perp}^{(3)}(\omega\tau_{nd})$, $W_{\perp}^{(3)}(\omega\tau_{nd})$ представлены на рис. 3–5 для углерода, $Z = 6$.

Система уравнений (4)–(6) может быть дополнена уравнениями Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}.$$

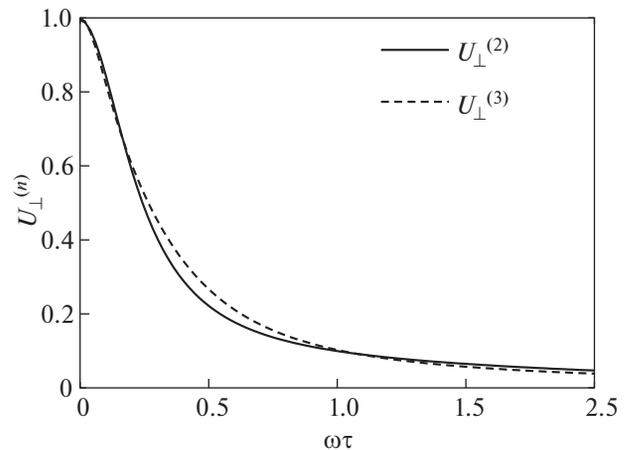


Рис. 4. Диффузия. Сравнение двух- и трехполиномиального приближения для невырожденной углеродной плазмы при $Z = 6$ для различных $\omega\tau$.

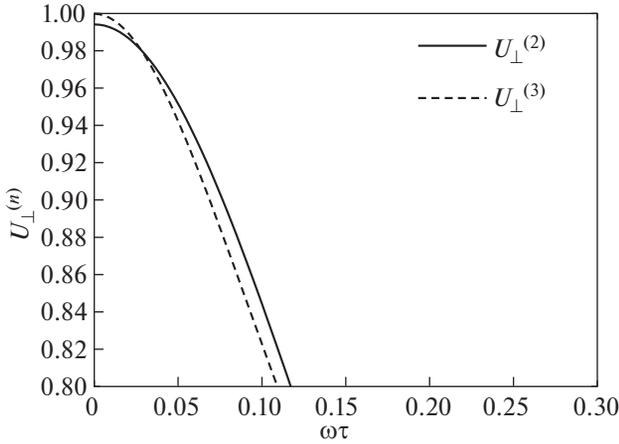


Рис. 5. Увеличенный сегмент графика сравнения двух- и трехполиномиального приближения для диффузии при $\omega\tau < 0.15$.

Для скалярной проводимости σ , когда

$$\mathbf{j} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right), \quad (161)$$

уравнение для магнитного поля имеет вид [28]

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \mathbf{B}. \quad (162)$$

При строгом учете кинетических коэффициентов выражение для вектора электрического тока j_i выглядит сложнее:

$$\begin{aligned} j_i &= -en_e \langle v_i \rangle = -en_e \left[\langle v_i^{(A)} \rangle + \langle v_i^{(D)} \rangle \right] = \\ &= -en_e \left[-\mu_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} - n_e \eta_{ij} d_j \right]. \end{aligned} \quad (163)$$

Записывая компоненты j_i относительно направления магнитного поля \vec{B} электрический ток электронов в плазме записывается в виде

$$\begin{aligned} j_{\parallel} &= en_e (n_e \eta_{\parallel} d_{\parallel} + \mu_{\parallel} \nabla T_{\parallel}), \\ j_{\perp} &= en_e (n_e \eta_{\perp} d_{\perp} + \mu_{\perp} \nabla T_{\perp}), \\ j_{\text{hall}} &= en_e \left(n_e \eta_{\text{hall}} \frac{\mathbf{d} \times \mathbf{B}}{B} + \mu_{\text{hall}} \frac{\nabla T \times \mathbf{B}}{B} \right). \end{aligned} \quad (164)$$

Для полноты можно выписать выражения для тензора теплопроводности, полученные для трехполиномиального приближения, в [20]:

$$\begin{aligned} \lambda_{nd}^{(13)} &= \frac{5k^2 T n_e}{2m_e} (a_0^1 - a_1^1) = \frac{2125k^2 T n_e}{64m_e} \tau_{nd} \times \\ &\times \frac{\left(1 + \frac{18\sqrt{2}}{17Z} - \frac{14}{17} \omega^2 \tau^2 \right) \zeta_1 + \left(\frac{1133}{340} + \frac{9\sqrt{2}}{17Z} \right) \omega^2 \tau_{nd}^2 \zeta_2}{\zeta_1^2 + \omega^2 \tau^2 \zeta_2^2}, \end{aligned} \quad (165)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{nd}^{(23)} &= -\frac{5k^2 T n_e}{2m_e} (b_0^1 - b_1^1) = -\frac{2125k^2 T n_e \omega \tau_{nd}^2}{64m_e B} \times \\ &\times \frac{\left(1 + \frac{18\sqrt{2}}{17Z} - \frac{14}{17} \omega^2 \tau^2 \right) \zeta_2 - \left(\frac{1133}{340} + \frac{9\sqrt{2}}{17Z} \right) \zeta_1}{\zeta_1^2 + \omega^2 \tau^2 \zeta_2^2}, \end{aligned} \quad (166)$$

$$B^2 \lambda_{nd}^{(33)} = \lambda_{nd}^{(3)} (B=0) - \lambda_{nd}^{(13)}. \quad (167)$$

6.1. Точное решение в приближении Лоренца для диффузии и диффузионного термоэффекта

Аналогично главе 5.2 получим точное решение для приближения Лоренца при $B=0$:

$$\langle v_i^D \rangle = -n_e \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}} \eta_{ij} d_j = \frac{32}{\Lambda} \frac{m_e (kT)^4}{n_e n_N Z^2 e^4 h^3} \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}} G_3 d_i, \quad (168)$$

$$q_i^D = -n_e \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}} v_{ij} d_j = \frac{128}{\Lambda} \frac{m_e (kT)^5}{n_N Z^2 e^4 h^3} \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}} G_4 \frac{\partial T}{\partial r_i}. \quad (169)$$

В предельных случаях коэффициенты в (168), (169) сводятся к

$$\eta_e' = -\frac{32}{3\pi n_e m_e \pi} \tau_{nd}, \quad (170)$$

$$v_e' = -\frac{128(kT)^2}{3\pi m_e} \tau_{nd}. \quad (171)$$

Вклад электрон-электронных столкновений в коэффициенты диффузии и диффузионного термоэффекта для различных Z можно оценить из графиков нормированных трехполиномиальных коэффициентов в направлении, перпендикулярном к магнитному полю, введя величины $U_{\perp}^{(3l)}$ и $W_{\perp}^{(3l)}$, определяемые как

$$U_{\perp}^{(3l)} = \frac{\eta_{nd}^{(13)}}{\eta_e'}, \quad W_{\perp}^{(3l)} = \frac{v_{nd}^{(13)}}{v_e'}. \quad (172)$$

Кривые для различных Z , включая $Z = \infty$, относящиеся к приближению Лоренца, изображены на рис. 6, 7. Пересечение графиков с осью u на рисунках происходит в точках, данных в табл. 2 и 3, умноженных на $\eta_{nd}^{(3)}/\eta_e' = 0.9985$, $v_{nd}^{(3)}/v_e' = 1.0038$. При $\omega\tau = 1$ имеем $U_{\perp}^{(3l)} = 0.0079, 0.081, 0.0086, 0.095$ для $Z = \infty, 26, 6, 2$ соответственно и $W_{\perp}^{(3l)} = 0.0443, 0.0455, 0.0488, 0.0563$ для $Z = \infty, 26, 6, 2$.

6.2. Вычисления полиномов

без учета столкновений между электронами

Чтобы проверить точность полиномиального приближения для коэффициентов диффузии и диффузионного термоэффекта, мы сравниваем их с коэффициентами, полученными как точное решение в приближении Лоренца. В отсутствии

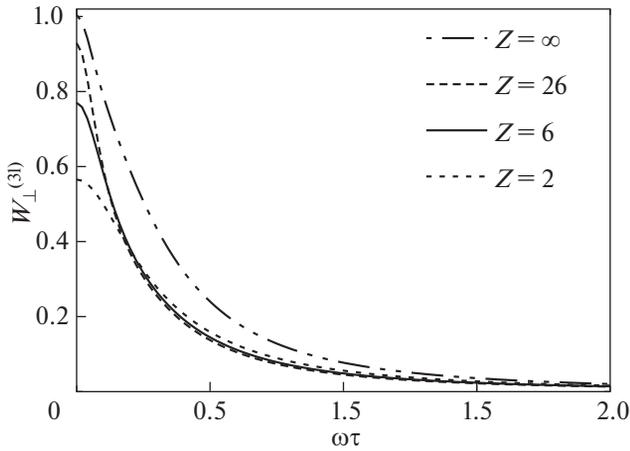


Рис. 6. Графики значений диффузионного термоэфекта $W_{\perp}^{(3l)}$ как функции $\omega\tau$ в трехполиномиальном приближении для не вырожденной плазмы гелия ($Z = 2$), углерода ($Z = 6$), железа ($Z = 26$) в сравнении с лоренцевской плазмой, формально отвечающей $Z = \infty$. Пересечение лоренцевской трехполиномиальной кривой ($Z = \infty$) с осью Y при 1.0038 связано с отклонением от точного решения в приближении Лоренца.

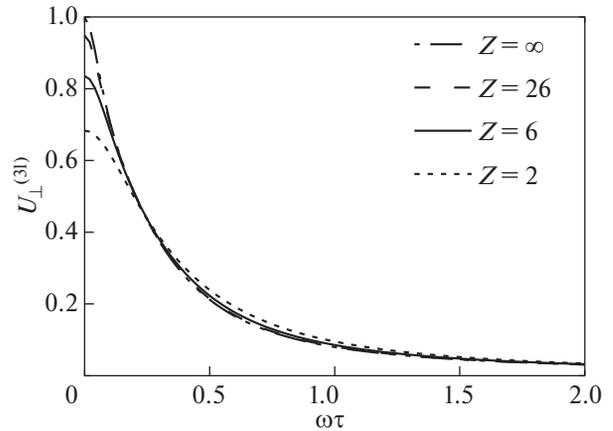


Рис. 7. Графики значений диффузии $U_{\perp}^{(3l)}$ как функции $\omega\tau$ в трехполиномиальном приближении для не вырожденной плазмы гелия ($Z = 2$), углерода ($Z = 6$), железа ($Z = 26$) в сравнении с лоренцевской плазмой, формально отвечающей $Z = \infty$. Пересечение лоренцевской трехполиномиальной кривой ($Z = \infty$) с осью Y при 0.9985 связано с отклонением от точного решения в приближении Лоренца.

магнитного поля, с $a_{jk} = 0$, система (112) сводится к

$$\begin{cases} -\frac{3}{2} = d_0 b_{00} + d_1 b_{01} + d_2 b_{02}, \\ 0 = d_0 b_{10} + d_1 b_{11} + d_2 b_{12}, \\ 0 = d_0 b_{20} + d_1 b_{21} + d_2 b_{22}. \end{cases} \quad (173)$$

С учетом (49)–(54) запишем данную систему как

$$\begin{cases} -\frac{3}{2} \frac{\tau_{nd}}{n_e} = \frac{3}{2} d_0 + \frac{9}{4} d_1 + \frac{45}{16} d_2, \\ 0 = \frac{9}{4} d_0 + \frac{39}{8} d_1 + \frac{207}{32} d_2, \\ 0 = \frac{45}{16} d_0 + \frac{207}{32} d_1 + \frac{1299}{128} d_2. \end{cases} \quad (174)$$

Эта система записывается для трехполиномиального приближения. Два первых уравнения при $d_2 = 0$ задают двухполиномиальное приближение, давая следующие результаты:

$$\begin{aligned} d_0 &= \frac{-13}{4} \frac{\tau_{nd}}{n_e} & d_1 &= \frac{3}{2} \frac{\tau_{nd}}{n_e}, \\ \eta_{ndl}^{(2)} &= -\frac{13}{4} \frac{kT}{m_e n_e} \frac{\tau_{nd}}{n_e} = -3.25 \frac{kT}{m_e n_e} \frac{\tau_{nd}}{n_e}, \\ v_{ndl}^{(2)} &= -\frac{5}{2} \frac{k^2 T^2 n_e}{m_e n_e} \frac{\tau_{nd}}{4} = -11.875 \frac{k^2 T^2}{m_e} \tau_{nd}. \end{aligned} \quad (175)$$

В трехполиномиальном приближении мы получаем решение (174) для d_0, d_1 и коэффициенты в виде

$$\begin{aligned} d_0 &= -\frac{217}{64} \frac{\tau_{nd}}{n_e}, & d_1 &= \frac{33}{16} \frac{\tau_{nd}}{n_e}, \\ \eta_{ndl}^{(3)} &= -\frac{217}{64} \frac{kT}{m_e n_e} \frac{\tau_{nd}}{n_e} = -3.3906 \frac{kT}{m_e n_e} \frac{\tau_{nd}}{n_e}, \\ v_{ndl}^{(3)} &= -\frac{5349}{2 \cdot 64} \frac{k^2 T^2 n_e}{m_e n_e} \frac{\tau_{nd}}{n_e} = \\ &= -\frac{1745}{128} \frac{k^2 T^2}{m_e} \tau_{nd} = -13.6328 \frac{k^2 T^2}{m_e} \tau_{nd}. \end{aligned} \quad (176)$$

Абсолютные значения диффузии и диффузионного термоэфекта, полученные методом последовательных приближений полиномов, следует сравнить с точным решением v_{ndl}^l, η_{ndl}^l полученным методом Лоренца (168), (169) для не вырожденных электронов

$$\eta_{ndl}^{(l)} = -\frac{32}{3\pi} \frac{kT}{m_e n_e} \tau_{nd} = -3.3954 \frac{kT}{m_e n_e} \tau_{nd}, \quad (177)$$

$$v_{ndl}^{(l)} = -\frac{128}{3\pi} \frac{k^2 T^2}{m_e} \tau_{nd} = -13.5816 \frac{k^2 T^2}{m_e} \tau_{nd}. \quad (178)$$

Ясно, что двухполиномиальное решение недооценивает значение коэффициента диффузии на 4.28%, диффузионного термоэфекта на 12.53%, а трехполиномиальное решение отличается от точного приблизительно на 0.14% для диффузии

и на 0.38% для диффузионного термоэффекта. Уравнения в случае трехполиномиального приближения в присутствии магнитного поля получены из (112) с учетом (49)–(54), (174) в виде

$$\begin{cases} -\frac{3}{2} \frac{\tau_{nd}}{n_e} = -\frac{3}{2} i\omega \tau_{nd} d_0 + \frac{3}{2} d_0 + \frac{9}{4} d_1 + \frac{45}{16} d_2, \\ 0 = -\frac{15}{4} i\omega \tau_{nd} d_1 + \frac{9}{4} d_0 + \frac{39}{8} d_1 + \frac{207}{32} d_2, \\ 0 = -\frac{105}{16} i\omega \tau_{nd} d_2 + \frac{45}{16} d_0 + \frac{207}{32} d_1 + \frac{1299}{128} d_2. \end{cases} \quad (179)$$

Явное решение уравнений (179) для двух и трехполиномиальных приближений определяется формулами (122)–(132) при формально бесконечном значении Z .

6.3. Частично вырожденные электроны

Для плазмы с произвольно вырожденными электронами в магнитном поле система (173) будет выглядеть, по аналогии с [20], следующим образом:

$$\begin{cases} -\frac{3}{2} = -\frac{3}{2} i\omega n_e d_0 + d_0 b_{00} + d_1 b_{01} + d_2 b_{02}, \\ 0 = -\frac{15}{4} \left(\frac{7G_{7/2}}{2G_{3/2}} - \frac{5G_{5/2}^2}{2G_{3/2}^2} \right) i\omega n_e d_1 + \\ + d_0 b_{10} + d_1 b_{11} + d_2 b_{12}, \\ 0 = -\frac{105}{16} \left(-\frac{35G_{7/2}^2}{8G_{3/2}^2} + \frac{49G_{7/2}^2 G_{7/2}}{2G_{5/2}^2 G_{3/2}} - \right. \\ \left. - \frac{63G_{9/2} G_{7/2}}{2G_{5/2} G_{3/2}} + \frac{99G_{11/2}}{8G_{3/2}} \right) i\omega n_e d_2 + d_0 b_{20} \\ + d_1 b_{21} + d_2 b_{22}. \end{cases} \quad (180)$$

Для частично вырожденных электронов с уровнем вырождения $DL = \epsilon_{fe}/kT = 1.011$ и при отсутствии магнитного поля, система (180) записывается в виде

$$\begin{cases} -1.5 = d_0 b_{00} + d_1 b_{01} + d_2 b_{02}, \\ 0 = d_0 b_{10} + d_1 b_{11} + d_2 b_{12}, \\ 0 = d_0 b_{20} + d_1 b_{21} + d_2 b_{22}. \end{cases} \quad (181)$$

С учетом значений коэффициентов b_{jk} , полученных в [20], эту систему можно переписать в виде:

$$\begin{cases} -1.5 \frac{\tau_{d0}}{n_e} = 1.5d_0 + 2.16d_1 + 2.588d_2, \\ 0 = 2.16d_0 + 5.162d_1 + 6.671d_2, \\ 0 = 2.588d_0 + 6.671d_1 + 11.038d_2. \end{cases} \quad (182)$$

Первые два уравнения при $d_2 = 0$ определяют двухполиномиальное приближение, которое с учетом (64) и (62), дает следующий результат:

$$\begin{aligned} d_0 &= -2.5161 \frac{\tau_{d0}}{n_e}, & d_1 &= 1.0528 \frac{\tau_{d0}}{n_e}, \\ \eta_{d0l}^{(2)} &= -2.516 \frac{kT}{m_e n_e} \tau_{d0}, & v_{d0l}^{(2)} &= -9.853 \frac{k^2 T^2}{m_e} \tau_{d0}. \end{aligned} \quad (183)$$

В трехполиномиальном приближении, мы получаем решение (182) для d_0 , d_1 , а также коэффициенты диффузии и диффузионного термоэффекта в виде

$$\begin{aligned} d_0 &= -2.591 \tau_{d0}, & d_1 &= 1.3658 \tau_{d0}, \\ \eta_{d0l}^{(3)} &= -2.591 \frac{kT}{m_e n_e} \tau_{d0}, & v_{d0l}^{(3)} &= -10.873 \frac{k^2 T^2}{m_e} \tau_{d0}. \end{aligned} \quad (184)$$

Коэффициенты, полученные методом последовательных приближений полиномами, следует сравнить с точным решением η_{nd}' , v_{nd}' , полученным методом Лоренца (170), (171) для невырожденных электронов

$$\eta_{d0}^{(l)} = -0.744 \frac{32}{3\pi} \frac{kT}{m_e n_e} \tau_{d0} = -2.526 \frac{kT}{m_e n_e} \tau_{d0}, \quad (185)$$

$$v_{d0}^{(l)} = -0.744 \frac{128}{3\pi} \frac{k^2 T^2}{m_e} \tau_{d0} = -10.105 \frac{k^2 T^2}{m_e} \tau_{d0}. \quad (186)$$

Видно, что двухполиномиальное решение для диффузии отличается от точного на 0.4%, а трехполиномиальное решение – на 2.6%. Для диффузионного термоэффекта: двухполиномиальное на 2.5%, а трехполиномиальное приблизительно на 8% отличаются от точного.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе найдены тензоры кинетических коэффициентов диффузии, термодиффузии и диффузионного термоэффекта для невырожденных электронов в неквадующем магнитном поле. Тензоры получены из решения кинетического уравнения Больцмана классическим методом Чепмена–Энскога с использованием разложения на полиномы Сонина и учетом двух и трех членов разложения. Учитываются электрон-ионные и электрон-электронные столкновения. Тензоры записаны для произвольного локального направления магнитного поля и градиента температуры в декартовой системе координат согласно [11]. Наши результаты в двухполиномиальном случае точно согласуются с результатами предыдущих работ [8–10, 12, 13]. Аналитическое решение в трехполиномиальном приближении прежде не было получено.

Значения коэффициентов теплопроводности, полученные в статьях Брагинского [12, 13] в двух-

полиномиальном приближении, в два раза меньше, чем соответствующие значения для теплопроводности, полученной в статье [20]. Это связано с подходом, используемом в работе [12], который отличается от классического метода Чепмена—Энскога [1]. В [12] считалось, что половина теплового потока скрыта в так называемой “тепловой силе” таким образом, что результирующий тепловой поток в сопутствующей системе отсчета одинаков в обоих рассмотренных. Далее представлены значения коэффициентов теплопроводности и электропроводности вдоль линий магнитного поля ($B = 0$), при $Z = 1$:

$$\begin{aligned} \lambda_{\parallel}^{\text{Braginski}} &= 3.1616 \frac{n_e k^2 T \tau_{nd}}{m_e}, \\ \lambda_{\parallel}^{2\text{-pol}} &= 6.45 \frac{n_e k^2 T \tau_{nd}}{m_e}, \\ \lambda_{\parallel}^{3\text{-pol}} &= 7.6133 \frac{n_e k^2 T \tau_{nd}}{m_e}. \end{aligned} \quad (187)$$

В [15] коэффициенты, полученные численно, сравнивались с работой Брагинского:

$$\lambda_{\parallel}^{\text{E-H}} = 3.203 \frac{n_e T k^2 \tau_{nd}}{m_e}. \quad (188)$$

Если учесть, что половина теплового потока скрыта в “тепловой силе”, то $\lambda_{\parallel}^{2\text{-pol}}$ и $\lambda_{\parallel}^{3\text{-pol}}$ из (187) получим:

$$\begin{aligned} \lambda_{\parallel}^{2\text{-pol}} &= 3.225 \frac{n_e k^2 T \tau_{nd}}{m_e}, \\ \lambda_{\parallel}^{3\text{-pol}} &= 3.8066 \frac{n_e k^2 T \tau_{nd}}{m_e}. \end{aligned} \quad (189)$$

Значения коэффициентов электропроводности из работы [15] и из данной статьи, полученные в двух- и трехполиномиальном приближении, совпадают до десятых:

$$\begin{aligned} \sigma_{\parallel}^{\text{E-H}} &= 1.9763 \frac{n_e^2 \tau_{nd}}{m_e}, \quad \sigma_{\parallel}^{2\text{-pol}} = 1.9319 \frac{n_e^2 \tau_{nd}}{m_e}, \\ \sigma_{\parallel}^{3\text{-pol}} &= 1.9497 \frac{n_e^2 \tau_{nd}}{m_e}. \end{aligned} \quad (190)$$

На примере приближения Лоренца было показано, что точность приближения рядом ортогональных функций, аналогичных полиномам Сонина, уменьшается с увеличением степени вырождения. Для невырожденных электронов, без учета электрон-электронных столкновений, значение коэффициента термодиффузии в двухполиномиальном приближении недооценивает точное решение, полученное в приближении Лоренца при $B = 0$, на 26%, а в трехполиномиальном приближении переоценивает приблизительно

на 1%. Для частично вырожденных электронов, при $x_0 = 0$, двухполиномиальное решение недооценивает точное на 28%, а трехполиномиальное недооценивает точное на 7%. Следует отметить, что электрон-электронные столкновения еще больше уменьшают значения коэффициента.

Значение коэффициента диффузии, полученное из двухполиномиального приближения недооценивают точное решение приблизительно на 4%, а трехполиномиальное решение недооценивает точное на 0.14% для невырожденных электронов. В случае частичного вырождения диффузия, полученная из двухполиномиального решения, на 0.4% недооценивает точное, а полученная из трехполиномиального — на 3% переоценивает точное.

Коэффициент диффузионного термоэффекта для невырожденных электронов в двухполиномиальном приближении на 12% недооценивает, а в трехполиномиальном на 0.4% переоценивает точное решение. При частичном вырождении электронов, двухполиномиальное решение на 2.5% недооценивает, а трехполиномиальное на 8% переоценивает точное решение.

Метод Чепмена—Энскога можно использовать для достаточно плотного газа (плазмы), где время между столкновениями частиц есть наименьшая величина среди других характерных времен. В присутствии магнитного поля в дополнение ко времени жизни системы и характерному времени изменений параметров в плазме добавляется время вращения по ларморовскому кругу $\tau_L = 2\pi/\omega$. Это время должно быть намного меньше, чем τ , порядка τ_{nd} или τ_d , что приводит к условию, при котором можно пользоваться методом Чепмена—Энскога, в виде

$$\omega\tau \ll 2\pi. \quad (191)$$

Поэтому данную работу можно успешно применять при $\omega\tau \lesssim 1$, а для больших $\omega\tau$ могут быть получены только качественные оценки.

Автор искренне благодарна Г.С. Бисноватому-Когану за обсуждения и помощь.

Работа была поддержана грантом Российского научного фонда № 18-12-00378.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М.: Иностран. лит., 1960.
2. Uehling E., Uhlenbeck G. // Phys. Rev. 1933. V. 43. P. 552.
3. Uehling E. // Phys. Rev. 1934. V. 46. P. 917.
4. Tomonaga S.Z. // Z. Phys. 1938. V. 110. P. 573.
5. Бисноватый-Коган Г.С., Романова М.М. // ЖЭТФ. 1982. Т. 83. С. 449.
6. Имшенник В.С. // Астрономич. ж. 1961. Т. 38. С. 652.

7. *Ландау Л.Д.* // ЖЭТФ. 1937. Т. 7. С. 203.
8. *Landshoff R.* // Phys. Rev. 1951. V. 82. P. 442.
9. *Marshall W.* // At. Energy Res Estable. 1960. № T/R. P. 2419.
10. *Бисноватый-Коган Г.С.* Транспортные свойства частично ионизированной двухтемпературной плазмы и изотропные поправки к максвелловской функции распределения. Тезисы диплома, Московский физико-технический институт, 1964.
11. *Бисноватый-Коган Г.С.* // Прикладная механика и техническая физика. 1964. № 3. С. 43.
12. *Брагинский С.И.* // ЖЭТФ. 1958. Т. 33. С. 459.
13. *Брагинский С.И.* // Вопросы теории плазмы. Вып. 1 / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963.
14. *Боброва Н.А., Сасоров П.В.* // Физика плазмы. 1993. Т. 19. С. 789.
15. *Epperlein E.M., Haines M.G.* // Phys. Fluids. 1986. V. 29. P. 1029.
16. *Wyller A.A.* // Astrophisica Norvegica. 1964. V. 9. P. 79.
17. *Wyller A.A.* // Astrophys. J. 1973. V. 184. P. 517.
18. *Lampe M.* // Phys. Rev. 1968. V. 170. P. 306.
19. *Бисноватый-Коган Г.С., Глушихина М.В.* // Физика Плазмы. 2018. Т. 44. С. 971.
20. *Бисноватый-Коган Г.С., Глушихина М.В.* // Физика Плазмы. 2018. Т. 44. С. 355.
21. *Tamm I.E.* // Basics of the theory of electricity, 9th ed. Nauka, 1976.
22. *Burnett D.* // Proc. London Mathemat. Soc. 1936. V. 40. P. 382.
23. *Балеску Р.* Равновесная и неравновесная статистическая механика. М.: Мир, 1978.
24. *Bisnovatyi-Kogan G.S.* Stellar Physics I: Fundamental Concepts and Stellar Equilibrium. Springer, 2001.
25. *Гинзбург В.Л., Рухадзе А.А.* Волны в магнитоактивной плазме. М.: Наука, 2013.
26. *Калихман Л.Е.* Элементы магнитной газодинамики. М.: Атомиздат, 1964.
27. *Schatzman E.* White dwarfs. Amsterdam: North Holland, 1958.
28. *Landau L.D., Lifshitz E.M.* Electrodynamics of Continuous Media. V. 8. Pergamon Press, Oxford, 1984.