

О ФОРМИРОВАНИИ НИТЕПОДОБНЫХ СТРУКТУР НА РАННЕЙ ФАЗЕ СОЛНЕЧНЫХ ВСПЫШЕК

© 2020 г. В. А. Ковалев^{а, *}, Е. Д. Куретова^б, Е. С. Куркина^б

^а Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова РАН, Москва, Россия

^б МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Москва, Россия

*e-mail: vic.kov@yandex.ru

Поступила в редакцию 13.06.2019 г.

После доработки 20.08.2019 г.

Принята к публикации 20.09.2019 г.

Предложена модель, описывающая начальную фазу вспышечного нагрева в короне Солнца. Уравнение энергии для вспышечной плазмы в магнитной трубке приведено к двумерному уравнению теплопроводности с нелинейным объемным источником, обеспечивающим нагрев плазмы в режиме с обострением, и нелинейным анизотропным коэффициентом теплопроводности. Показано, что взрывной нагрев плазмы может сопровождаться формированием высокотемпературных структур, вытянутых вдоль магнитной трубки.

DOI: 10.31857/S0367292120040071

1. ВВЕДЕНИЕ

Описание основных моделей солнечных вспышек можно найти в обзоре [1]. Согласно современным представлениям, наиболее вероятным источником энергии вспышек является магнитное пересоединение в нейтральном токовом слое. Во время вспышки первичная энергия поля превращается в тепловую энергию, происходит быстрый нагрев аркообразных магнитных трубок. Рассматривались и альтернативные подходы: концепция фракталов [2], “самоорганизованная критичность” [3].

Давно выделены вопросы, связанные с механизмом накопления энергии, ее высвобождением и вторичными эффектами [4]. Задача нестационарного нагрева магнитной трубки, основного элемента вспышки, в импульсной фазе неоднократно решалась путем численного расчета переходных процессов для стандартного гидродинамического отклика солнечной атмосферы [5–9]. Общая картина, в целом, хорошо описывает нагрев вспышечной области, однако имеются нерешенные вопросы, связанные, в частности, с наблюдениями локализованных высокотемпературных структур [10], уменьшением меры эмиссии [11].

В работе [11] по наблюдениям рентгеновского излучения было установлено, что на ранней стадии вспышки нагрев плазмы происходит в ускоренном режиме, возможно, в режиме с обострением. Это явилось основанием для разработки

нового подхода к моделированию процесса тепловыделения во время вспышки.

Для описания процесса нагрева магнитной трубки мы использовали модель тепловых структур [12, 13], построенную в 1970–1980-х гг. и описывающую процесс термоядерного горения плазмы. Она основана на квазилинейном уравнении теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda(T) \nabla T) + q(T), \quad (1)$$

где $q(T) \sim T^\beta$ – объемный источник нагрева, $\lambda(T) \sim T^\sigma$ – коэффициент теплопроводности. При определенных условиях уравнение (1) допускает решения в виде нестационарных диссипативных структур, локализованных в некоторой области пространства и существующих конечное время. Температура внутри области локализации растет в режиме с обострением. Типы получаемых структур зависят от соотношений между параметрами σ и β . Известно, что:

а) необходимым условием возникновения режима с обострением является степень нелинейности источника $\beta > 1$;

б) локализованные структуры возникают, когда источник “сильнее” теплопроводности, а именно, при $\beta \geq \sigma + 1$. При выполнении строгого неравенства полуширина структур сокращается с ростом температуры, что можно трактовать как явление “самофокусировки тепла” (LS-режим).

При $\beta = \sigma + 1$ возникает структура типа “остановившийся фронт” (*S*-режим);

е) при $1 < \beta < \sigma + 1$ процесс также развивается в режиме с обострением, однако локализация отсутствует. В этом случае область горения расширяется с ростом температуры (*HS*-режим).

Нагрев плазмы на ранней стадии вспышки может быть описан уравнением вида (1) [14–17] с анизотропным коэффициентом теплопроводности и обобщенным объемным источником тепла, к которому сводится уравнение энергии для неподвижной вспышечной плазмы в магнитной трубке [18].

Необходимый для реализации режима с обострением объемный источник с $\beta > 1$ возникает, в частности, при механизме ускорения заряженных частиц Ферми 1 рода [19] в коллапсирующей магнитной ловушке, образованной сходящимися перетяжками магнитной трубки ($\beta = 1.5$ [20, 21]). Обобщенный источник также учитывает радиационное охлаждение, которое описывается известной полуэмпирической кусочно-степенной функцией лучистых потерь $L(T)$ [22].

Классическая теплопроводность плазмы с магнитным полем имеет анизотропный характер [18]: высокая вдоль магнитного поля, обусловленная столкновениями тепловых электронов с ионами ($\sigma_{\parallel} = 2.5$) и низкая поперек магнитного поля, обусловленная ионами ($\sigma_{\perp} = -0.5$). Применение классического приближения обусловлено следующими факторами: длина свободного пробега электронов $l_{ei} = 1.8 \times 10^4 T^2/n$ при $T = 7$ МК, $n = 10^{10}$ см⁻³ составляет $\sim 10^3$ км, что меньше размера наблюдаемых структур ($\sim 2 \times 10^3$ км [10]) и допустимо считать плазму столкновительной. При $T > 20$ МК вспышечная плазма бесстолкновительная: длина свободного пробега электронов становится больше характерного размера структур. В этих условиях определяющую роль может играть плазменная турбулентность, столкновения электронов теперь определяются не частицами, а волнами, теплопроводность значительно снижается [23]. Однако для достаточного повышения частоты столкновений необходим слишком высокий уровень турбулентности (порядка тепловой энергии), вспышечная плазма бесстолкновительная.

Вопрос о структуризации магнитной трубки в поперечном сечении является новым для модели стандартного вспышечного отклика. Как следует из [24], установившиеся распределения температуры в поперечном сечении магнитной трубки могут иметь вид суперпозиции стоячих волн, масштаб которых (десятки метров) определяется коэффициентом поперечной теплопроводности. В работах [15, 16] численно показано, что при пониженной теплопроводности поперек магнитного

поля ($\sigma_{\perp} = -0.5$) происходит филаментация температурного поля в поперечном сечении трубки и формирование в режиме с обострением “горячих” микроструктур. Предполагается, что наблюдаемое на ранней стадии вспышки уменьшение интегральной меры эмиссии [11] может быть объяснено уменьшением фактора заполнения вспышечного объема горячей плазмой за счет сокращения поперечного размера структур, характерного для *LS*-режима с обострением.

В настоящей работе рассматривается полная двумерная модель, описывающая динамику нагрева плазмы в цилиндрической симметричной магнитной трубке (схематическое изображение типичной корональной петли приведено в [25]). В модели учитываются эмпирические степенные зависимости плотности плазмы и, соответственно, коэффициентов теплопроводности, источника нагрева и функции охлаждения от температуры. Параметры модели вычисляются в соответствии с реальными физическими данными.

2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Уравнение энергии для неподвижной вспышечной плазмы в магнитной трубке с объемным источником нагрева и лучистым охлаждением может быть приведено к виду [4, 18]

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \text{div}(\lambda_0 T^\sigma \text{grad} T) + Q_1(T) - n^2 L(T) + Q_0, \quad (2)$$

$$\varepsilon = 3nk_B T, \quad n = n(T), \quad \lambda_0, Q_0 > 0,$$

где ε – внутренняя энергия, k_B – постоянная Больцмана; n – концентрация заряженных частиц в плазме; Q_0 обеспечивает баланс довспышечного нагрева и охлаждения, $Q_1(T)$ – источник энергии вспышки. Считается, что плазма является квазинейтральной, $n_i = n_e = n$.

Учитывая, что $n \sim \sqrt{EM}$, где мера эмиссии EM определяется интегрированием по объему вспышечной области: $EM = \int n^2 dV$, в случае однородного объема эмпирическая степенная связь концентрации и температуры в отдельных интервалах времени может быть взята из наблюдений в виде [11]

$$n \sim T^\chi. \quad (3)$$

В качестве модельной будем рассматривать вспышку 05.07.2009 г. [11]. Для рассматриваемых условий $\chi \approx -0.64$. В предельных случаях $\chi = 0$ (при постоянстве концентрации, $n = \text{const}$), и $\chi = -1$ (при постоянстве газового давления, $nT = \text{const}$).

Лучистое охлаждение $n^2 L(T)$ учитывается в приближении оптически прозрачной полностью ионизованной плазмы; $L(T)$ – известная немонотонно-

тонная функция с несколькими максимумами, обычно представляемая в кусочно-степенном виде [22]

$$L(T) \sim T^\alpha \quad (4)$$

Для фоновой (довспышечной) температуры плазмы вспышки 05.07.2009 г. [11] $T_0 \approx 7$ МК, $n_0 = 10^{10}$ см⁻³, $L(T_0) \approx 7 \times 10^{-23}$ эрг · см³ · с⁻¹, $n_0^2 L(T_0) \approx 7 \times 10^{-3}$ эрг · см⁻³ · с⁻¹, $\alpha \approx -0.5$.

Как было сказано выше, быстрый нагрев в режиме с обострением может быть обусловлен объемным источником тепла, главный член разложения которого имеет степенной вид $Q(T) \sim T^\beta$ с показателем степени $\beta > 1$. В нашем случае $\beta = 1.5$ [20]. Нами подобрана следующая знакопеременная функция источника:

$$Q(T) = q_0(T^{\beta_1} - T_1^{\beta_1})(T^{\beta_2} - T_2^{\beta_2}) - n^2 L(T),$$

где $\beta_1 + \beta_2 = 1.5$.

Такая функция хорошо аппроксимирует наблюдаемые данные. Она имеет необходимую для развития режима с обострением асимптотику $Q(T) \cong q_0 T^{1.5}$ и позволяет описать развитие вспышки на ненулевом температурном фоне при сверхкритических выделениях энергии. Возмущения фона ниже критического уровня затухают и релаксируют к фону. Значения параметров подобраны так, чтобы в отсутствие вспышки нагрев уравновешивал охлаждение, поддерживая температуру фона на уровне T_0 .

Коэффициент теплопроводности плазмы поперек магнитного поля, обусловленной ионами, имеет вид [18]

$$\lambda_i(T) = 3 \times 10^{-16} \frac{n^2}{B^2} T^{\sigma_1},$$

где B – напряженность магнитного поля. Мы использовали оценочное значение $B = 100$ Гс, которое следует, в частности, из анализа радиоданных. С учетом (3)

$$\lambda_i(T) = \lambda_i^0 T^{\sigma_1 + 2\chi}, \quad (5)$$

$$\lambda_i^0 = 3 \times 10^{-16} \frac{n_0^2}{T_0^{2\chi} B^2}, \quad \sigma_1 = -0.5.$$

Вдоль магнитного поля коэффициент теплопроводности плазмы обусловлен переносом тепла электронами [18]

$$\lambda_e(T) = \lambda_e^0 T^{\sigma_2}, \quad \lambda_e^0 = 1.84 \times 10^{-4} \Lambda^{-1}, \quad \sigma_2 = 2.5, \quad (6)$$

где Λ – кулоновский логарифм; для рассматриваемого диапазона температур $\Lambda \approx 15$.

Размерности величин: $[n] = \text{см}^{-3}$, $[T] = \text{К}$, $[B] = \text{Гс}$.

Задача Неймана для уравнения (2) рассматривается в цилиндрической трубке длиной L и радиусом R . Размер трубки выбирается достаточно большим (больше размера формирующихся структур), так чтобы граничные условия не оказывали влияния на решение.

Уравнение (2) в цилиндрической системе координат для радиально-симметричного случая после преобразований приводится к виду (см. Приложение)

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \tilde{\lambda}_r \tilde{U}^{\tilde{\sigma}_1} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\tilde{\lambda}_z \tilde{U}^{\tilde{\sigma}_2} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial z} \right) + \tilde{q}(\tilde{U}), \quad (7)$$

где \tilde{U} – нормированная температура, безразмерная переменная. До начала вспышки, когда температура равна фоновой, $\tilde{U} = 1$. $\tilde{q}(\tilde{U})$ – степенное выражение со старшей степенью в разложении, равной $\tilde{U}^{\tilde{\beta}}$. Таким образом, уравнение (2) сводится к виду (1) с модифицированными показателями степеней

$$\tilde{\sigma}_1 = \frac{\sigma_1 + \chi}{1 + \chi} \approx -3.16, \quad \tilde{\sigma}_2 = \frac{\sigma_2 - \chi}{1 + \chi} \approx 8.72, \quad (8)$$

$$\tilde{\beta} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \chi} \approx 4.167.$$

Вспышка в модели инициируется путем задания начального возмущения фона в небольшой области в центре трубки. При полученных значениях параметров (8) численно находятся решения задачи в зависимости от размера и формы начального возмущения.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Для численного решения поставленной двумерной задачи для уравнения (7) в цилиндрической трубке применялась разностная схема переменных направлений. Использовалась равномерная сетка по радиусу и по оси z с шагами $h_r = 0.01$ и $h_z = 0.5$, соответственно, и переменный шаг по времени. Полученные значения функции \tilde{U} пересчитывались в значения исходной функции по формуле $T(t, r, z) = T_0 \tilde{U}(t, r, z)^{(1+\chi)^{-1}}$.

В рассматриваемом случае параметры связаны соотношениями

$$\tilde{\beta} > \tilde{\sigma}_1 + 1, \quad (9)$$

$$\tilde{\beta} < \tilde{\sigma}_2 + 1.$$

Выполнение условия $\tilde{\beta} > 1$ обеспечивает существование решений, развивающихся в режиме с обострением. При этом первое условие в (9) соответствует LS -режиму, при котором имеет место эффективная локализация области интенсивного горения и формирование нестационарных структур с сокращающейся полушириной. Это означа-

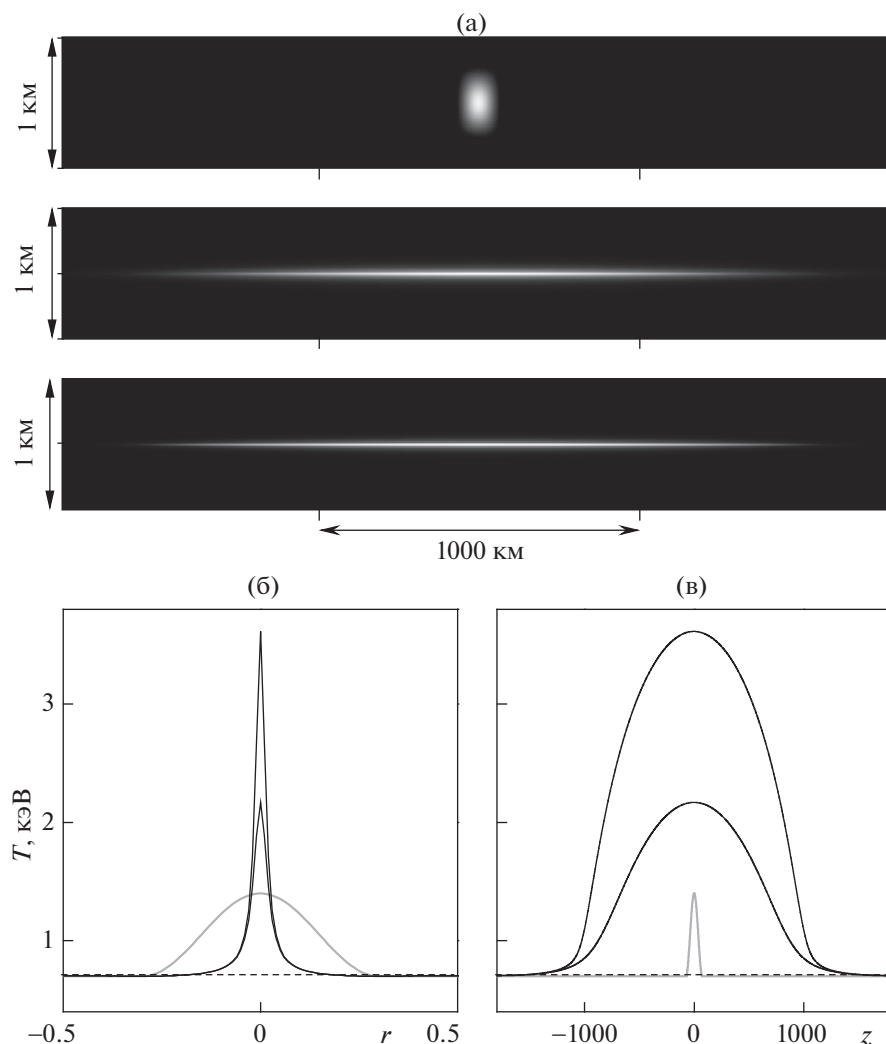


Рис. 1. Эволюция температурного возмущения в радиальном (r) и продольном направлении (z) цилиндрической магнитной трубки: температурное поле в сечении трубки $r = 0$ (а), профиль температуры по радиальному направлению (б), профиль температуры по оси z (в).

ет, что по радиальному направлению формирующаяся тепловая структура будет сжиматься с ростом температуры. Второе условие в (9), в свою очередь, соответствует *HS*-режиму, при котором процесс горения не локализован в пространстве, а эффективная полуширина структур растет. Это означает, что с ростом температуры вдоль оси цилиндра происходит расширение тепловой структуры.

Из наблюдений [10] следует, что при толщине магнитной трубки $\sim 10^3$ км линейный размер горячих (>10 МК) вспышечных ядер составляет $\sim 2 \times 10^3$ км. В расчетах рассматривалась область протяженности $L = 4 \times 10^3$ км в вершине трубки. Это характерный “масштаб теплопроводности” вдоль магнитного поля. В поперечном сечении рассматривался цилиндр радиуса $R = 1$ км при

характерном “масштабе” теплопроводности ~ 100 м.

На рисунке приведены результаты расчетов, выполненных для значений параметров $\beta_1 = \beta_2 = 0.75$, $\tilde{T}_1^{\beta_1} = 1.0006$, $\tilde{T}_2^{\beta_2} = 1.001$. На рис. 1а изображено температурное поле $T(t, 0, z)$ в сечении трубки при $r = 0$ вдоль оси z . Горение среды было инициировано заданием сверхкритического начального возмущения вида (П7), где $\Delta r = 0.3$ км, $\Delta z = 75$ км, $\Delta \tilde{T} = 1$. Минимальное значение температуры (фон) отображается черным цветом, максимальное – белым, промежуточные значения – градацией серого цвета. Результаты приведены для трех последовательных моментов времени: $t_1 = 0$, $t_2 = 7.975 \times 10^{-2}$ с, $t_3 = 8.08 \times 10^{-2}$ с. На рис. 1б, в показаны профили температуры по ра-

диальному направлению и вдоль оси цилиндра соответственно для тех же моментов времени.

Таким образом, выполнение соотношений (9) приводит к реализации в данной задаче так называемого *LS–HS*-режима. В пространстве формируется область интенсивного горения, внутри которой происходит взрывной рост температуры. При этом область сжимается с течением времени по радиальному направлению и расширяется вдоль оси цилиндра. Тепловая структура представляет собой нить, вытянутую вдоль магнитного поля, температура которой быстро растет по сравнению с окружающим фоном. С течением времени нить “схлопывается” по толщине и вытягивается вдоль магнитной трубки. Непосредственно наблюдать отдельные “самофокусирующиеся” по толщине нити не представляется возможным из-за их чрезвычайно малых размеров ($r < 100$ м), однако наличие множества подобных нитей с сокращающейся толщиной в магнитной трубке приводит к упомянутому уменьшению фактора заполнения вспышечного объема горячей плазмы и может проявиться, как предполагается, в наблюдаемом на ранней фазе вспышки уменьшении интегральной меры эмиссии [11].

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведены исследования начальной стадии вспышечного нагрева в коллапсирующей магнитной ловушке, образованной сходящимися перегородками трубки. Возникающий объемный источник обеспечивает рост температуры плазмы в режиме с обострением.

Проблема формирования тепловых структур в магнитной трубке во время вспышечного нагрева решается в рамках уравнения энергии для анизотропной плазмы с объемным источником нагрева, классической теплопроводностью и лучистым охлаждением. Показано, что оно может быть сведено к нелинейному уравнению теплопроводности со степенными зависимостями источника и коэффициентов диффузии от температуры. На основе этого уравнения построена математическая модель, которая описывает нагрев плазмы как процесс формирования на ненулевом температурном фоне вспышечных структур, развивающихся в режиме с обострением.

Построено двумерное решение, описывающее формирование вспышечной структуры в виде “схлопывающейся” тонкой горячей нити, погруженной в более холодную фоновую плазму. Решение такого вида позволяет объяснить наблюдаемый на ранней стадии вспышки эффект уменьшения меры эмиссии как результат уменьшения общего вспышечного объема за счет сжатия тепловых структур в поперечном направлении.

Полученные результаты представляют интерес для изучения режимов вспышечного нагрева, классификация которых позволяет по наблюдениям оценить относительную роль нелинейного источника и теплопроводности. Модель нагрева в диффузионном приближении является основой для построения полной модели вспышечного гидродинамического отклика солнечной атмосферы.

Дальнейшее обобщение может быть связано с расчетом нагрева, сопровождаемого формированием не только отдельного элемента – “горячей нити”, но и микроструктуры всего поперечного сечения магнитной трубки, состоящей из множества нитей.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 18-01-00436; 17-02-00308.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В области пространства, представляющей собой цилиндрическую трубку длиной L и радиусом R , требуется найти радиально-симметричные решения уравнения (2), записанного в цилиндрической системе координат

$$C(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_r(T) r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q(T), \quad (\text{П1})$$

где $T = T(r, z, t)$ – температура, $0 < r < R$ – радиальная составляющая полярных координат в поперечном сечении трубки, $-L/2 < z < L/2$ – координата вдоль оси цилиндра.

Объемный обобщенный источник, включающий нагрев и охлаждение плазмы (см. (2)), описывается функцией

$$Q(T) = q_0(T^{\beta_1} - T_1^{\beta_1})(T^{\beta_2} - T_2^{\beta_2}) - n^2 L(T), \quad (\text{П2})$$

$$\beta_1 + \beta_2 = 1.5.$$

Коэффициенты уравнения (П1) степенным образом зависят от температуры и имеют вид

$$C(T) = 3k_B n(T) = 3k_B n_0 (T/T_0)^\chi, \\ \lambda_r(T) = \lambda_r^0 T^{\sigma_1 + 2\chi}, \quad \lambda_z(T) = \lambda_z^0 T^{\sigma_2}, \quad (\text{П3}) \\ n = n_0 T^\chi, \quad L(T) = L_0 T^\alpha.$$

Уравнение с источником вида (П2) имеет три пространственно-однородных ненулевых стационарных решения, соответствующих нулям функции $Q(T)$ – одно устойчивое и два неустойчивых. Константы q_0 , T_1 и T_2 выбраны так, что устойчивым стационаром является заданное фоновое значение температуры T_0 . Один из неустойчивых стационаров находится вне рассматриваемого диапазона температур и не влияет на дина-

мику системы. Другой неустойчивый стационар определяет критический уровень возмущений фона, превышение которого приводит к формированию на нем высокотемпературных структур, развивающихся в режиме с обострением. Более слабые возмущения с течением времени релаксируют к фону.

Делая замену переменных $T = T_0 \tilde{T}$ и подставляя зависимости коэффициентов от температуры (П3), сведем уравнение (П1) к уравнению для безразмерной температуры \tilde{T}

$$\tilde{T}^\chi \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\gamma_r \tilde{T}^{\sigma_1 + 2\chi} r \frac{\partial \tilde{T}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\gamma_z \tilde{T}^{\sigma_2} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} \right) + q_1 (\tilde{T}^{\beta_1} - \tilde{T}_1^{\beta_1}) (\tilde{T}^{\beta_2} - \tilde{T}_2^{\beta_2}) - q_2 \tilde{T}^{\alpha + 2\chi}, \quad (\text{П4})$$

где $\gamma_r = \frac{\lambda_i^0}{3k_B n_0} T_0^{\sigma_1 + 2\chi}$, $\gamma_z = \frac{\lambda_e^0}{3k_B n_0} T_0^{\sigma_2}$, $\tilde{T}_1 = \frac{T_1}{T_0}$, $\tilde{T}_2 = \frac{T_2}{T_0}$, $q_1 = \frac{n_0 L_0}{3k_B T_0 (1 - \tilde{T}_1^{\beta_1})(1 - \tilde{T}_2^{\beta_2})}$, $q_2 = \frac{n_0 L_0}{3k_B T_0}$.

Уравнение (П4) рассматривается в цилиндрической области пространства $0 < r < R$, $-L/2 < z < L/2$. На границе области ставятся условия Неймана

$$-\tilde{T}^{\sigma_1 + 2\chi} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial r} (R, z, t) = 0, \quad \tilde{T}^{\sigma_2} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} (r, -L/2, t) = 0, \quad (\text{П5})$$

$$-\tilde{T}^{\sigma_2} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} (r, L/2, t) = 0.$$

Кроме того, на оси симметрии при $r = 0$ задача дополняется условием

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial r} = 0. \quad (\text{П6})$$

Вспышка инициируется заданием начального финитного возмущения фона в небольшой области в центре трубки

$$\tilde{T}(r, z, 0) = \begin{cases} \tilde{T}_{st_2} + \Delta \tilde{T} \cos^2 \frac{\pi r}{2\Delta r} \cos^2 \frac{\pi z}{2\Delta z}, & r \in [0, \Delta r], \quad z \in [-\Delta z, \Delta z], \\ \tilde{T}_{st_2}, & r \in (\Delta r, R], \\ z \in [-L/2, -\Delta z] \times (\Delta z, L/2]. \end{cases} \quad (\text{П7})$$

Для решения поставленной двумерной задачи (П4)–(П7) с помощью стандартных численных методов вначале была проведена специальная замена переменных $U = T^{1+\chi}$. Затем, аналогично безразмерной температуре, была введена безразмерная переменная \tilde{U} , такая что $U = U_0 \tilde{U}$, где $U_0 = T_0^{1+\chi}$, $\tilde{U} = \tilde{T}^{1+\chi}$. Это позволило записать уравнение (П4) в классическом виде, когда коэффициент при производной по времени не зависит от переменной

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\gamma_r T_0^{\sigma_1} \tilde{U}^{\frac{\sigma_1 + \chi}{1 + \chi}} r \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\gamma_z T_0^{\sigma_2} \tilde{U}^{\frac{\sigma_2 - \chi}{1 + \chi}} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial z} \right) + \tilde{q}(\tilde{U}). \quad (\text{П8})$$

Уравнение (П8) для переменной \tilde{U} было дополнено краевыми и начальными условиями, соответствующими условиям (П5)–(П7).

Введем обозначения

$$\tilde{\sigma}_1 = \frac{\sigma_1 + \chi}{1 + \chi}, \quad \tilde{\sigma}_2 = \frac{\sigma_2 - \chi}{1 + \chi}, \quad \tilde{\beta} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \chi},$$

$$\tilde{\lambda}_r = \gamma_r T_0^{\sigma_1}, \quad \tilde{\lambda}_z = \gamma_z T_0^{\sigma_2},$$

$$\tilde{q}(\tilde{U}) = q_1 (1 + \chi) \left(\tilde{U}^{1+\chi} - \tilde{T}_1^{\beta_1} \right) \left(\tilde{U}^{1+\chi} - \tilde{T}_2^{\beta_2} \right).$$

Тогда уравнение (П8) запишется в виде

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \tilde{\lambda}_r \tilde{U}^{\tilde{\sigma}_1} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\tilde{\lambda}_z \tilde{U}^{\tilde{\sigma}_2} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial z} \right) + \tilde{q}(\tilde{U}), \quad (\text{П9})$$

где $\tilde{q}(\tilde{U})$ – степенное выражение со старшей степенью в разложении, равной $\tilde{U}^{\tilde{\beta}}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Степанов А.В. Плазменная гелиогеофизика. Т. I / Под ред. Л.М. Зеленого, И.С. Веселовского. М.: Физматлит, 2008. С. 232.
2. Могилевский Э.И. Фракталы на Солнце. М.: Физматлит, 2001.
3. Aschwanden M.J. Self-Organized Criticality Systems. Berlin Warsaw: Open Academic Press, 2013.
4. Сомов Б.В., Сыроватский С.И. // УФН. 1976. Т. 120. С. 217.
5. Костюк Н.Д., Пикельнер С.Б. // Астрон. Ж. 1974. Т. 51. С. 1002.
6. Livshits M.A., Badalyan O.G., Kosovichev A.G., Katsova M.M. // Solar Phys. 1981. V. 73. P. 269.
7. Somov B.V., Sermulina B.J., Spector A.R. // Solar Phys. 1982. V. 81. P. 281.
8. Fisher G.H. Radiation Hydrodynamics in Stars and Compact Objects. Lect. Not. in Physics. V. 255 / Eds D. Mihalas, K.-H. Winkler. Berlin: Springer-Verlag, 1986. P. 53.
9. Лившиц М.А. Плазменная гелиогеофизика. Т. I / Под ред. Л.М. Зеленого, И.С. Веселовского. М.: Физматлит, 2008. P. 60.
10. Ковалев В.А., Чернов Г.П., Ханаока Й. // Письма АЖ. 2001. Т. 27. С. 310.
11. Ковалев В.А., Костюченко И.Г., Савченко М.И., Чариков Ю.Е. Динамика сложных систем. Т. 3. М.: XXI век, 2015. С. 78.

12. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
13. Режимы с обострением: эволюция идеи / Под ред. Г.Г. Малинецкого. М.: Физматлит. 2006. С. 312.
14. Kurkina E.S., Kuretova E.D., Kovalev V.A. // Computational Mathematics and Modeling. 2015. V. 26. P. 144.
15. Kurkina E.S., Troshiev Yu.V., Kovalev V.A., Kuretova E.D. // Computational Mathematics and Modeling. 2016. V. 27. P. 395.
16. Ковалев В.А., Куркина Е.С., Куретова Е.Д. // Физика плазмы. 2017. Т. 43. С. 485.
17. Kurkina E.S., Kuretova E.D., Kovalev V.A. // Computational Mathematics and Modeling. 2019. V. 30. P. 91.
18. Брагинский С.И. Вопросы теории плазмы. Вып. 1 / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Госатомиздат. 1963. С. 183.
19. Fermi E. // Astrophys. J. 1954. V. 119. P. 1.
20. Ковалев В.А., Сомов Б.В. // Письма АЖ. 2003. Т. 29. С. 465.
21. Ковалев В.А. // Нелинейный мир. 2010. Т. 8. С. 717.
22. Parenti S., Buchlin E., Cargill P.J. // Astrophys. J. 2006. V. 651. P. 1219.
23. Галеев А.Б., Сагдеев Р.З. / Вопросы теории плазмы. Т. 7 / Под ред. Леонтовича М.А. М.: Атомиздат. 1973. С. 205.
24. Ковалев В.А., Лантухов А.И. Физика плазмы. 2009. Т. 35. С. 361.
25. Садовский А.М. // Плазменная гелиогеофизика. Т. 1 / Под ред. Л.М. Зеленого, И.С. Веселовского. М.: Физматлит, 2008. С. 163.
26. Kuretova E.D., Kurkina E.S. // Computational Mathematics and Modeling. 2018. V. 29. P. 422.