# \_\_\_\_ ДИНАМИКА \_\_ ПЛАЗМЫ \_\_

УДК 533.9

# УСТОЙЧИВОСТЬ ИОННОГО ПОТОКА И РОЛЬ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ В МОДЕЛИ СТАЦИОНАРНОГО ПЛАЗМЕННОГО УСКОРИТЕЛЯ С ОДНОРОДНОЙ ПОДВИЖНОСТЬЮ ЭЛЕКТРОНОВ

© 2020 г. И. В. Ромаданов<sup>*a*, \*</sup>, А. И. Смоляков<sup>*a*, *b*</sup>, Е. А. Сорокина<sup>*b*, *c*</sup>, В. В. Андреев<sup>*b*</sup>, Н. А. Марусов<sup>*b*, *c*</sup>

<sup>a</sup> Department of Physics and Engineering Physics, University of Saskatchewan, Saskatoon SK S7N 5E2, Canada <sup>b</sup> Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

<sup>с</sup> НИЦ "Курчатовский институт", Москва, Россия

\*e-mail: ivr509@mail.usask.ca Поступила в редакцию 12.09.2019 г. После доработки 20.11.2019 г. Принята к публикации 21.11.2019 г.

Исследуются резистивные колебания плазмы с учетом эффектов ионизации в одномерной модельной конфигурации стационарного плазменного двигателя. Из анализа уравнений равновесия определены различные типы стационарных плазменных течений, которые использованы в дальнейшем в качестве начальных условий при численном решении задачи о временной эволюции системы. Определены области параметров, характеризующие устойчивое и неустойчивое состояния системы. Показано, что нелинейные колебания могут существовать в различных режимах: одномодовый когерентный режим, многомодовый режим с нелинейными гармониками и некогерентный (стохастический) режим. Исследована роль граничных условий на характеристики нелинейных колебаний.

*Ключевые слова:* плазма в скрещенных полях, осевые колебания, пульсирующая мода, нелинейное моделирование, стационарные течения плазмы

DOI: 10.31857/S0367292120040101

# 1. ВВЕДЕНИЕ

Течения плазмы характерны для широкого класса лабораторных плазменных установок, включая плазменные источники и ускорители, магнетроны и МГД-генераторы [1–7]. В частности, в основе технологии создания электрической ракетной тяги в космосе и магнетронных разрядов лежит ускорение частично замагниченной плазмы: замагниченные электроны удерживаются в относительно сильном магнитном поле, а незамагниченные ионы ускоряются поперечным электрическим полем. Такие системы подвержены развитию различных неустойчивостей, существенным образом влияющих на характеристики и КПД разрядов и потому являющихся предметом активных экспериментальных и теоретических исследований, см., например, работы по стационарным плазменным двигателям (СПД) [8-11]. Настоящая работа посвящена исследованию нелинейной динамики осевых (в направлении приложенного электрического поля) колебаний частично замагниченной плазмы в скрещенных полях. Их неустойчивость тесно связана с так называемой пульсирующей модой (breathing mode в англоязычной литературе), наблюдаемой в холловских ускорителях [8, 12]. Аналогичная неустойчивость присуща и магнетронным разрядам [4].

Несмотря на длительную историю исследований, повсеместно принятой модели неустойчивости осевых колебаний плазмы в холловских ускорителях, равно как и понимания условий ее возникновения, не существует. Практически общепризнанно, что ключевую роль в ней играют процессы ионизации. Базовая модель, учитывающая ионизацию плазмы, потоки ионов и нейтральных атомов, предложена в [13-15]. Скорости ионов и нейтралов в данной модели считаются постоянными, не производится и самосогласованный расчет электрического поля. Другие авторы утверждают, что для корректного описания пульсирующей моды обязателен учет динамики электронов [16-21] и флуктуаций температуры [22]. Обзор последних работ по данной тематики представлен в [23].

Известно, что ускорение квазинейтральной плазмы подразумевает наличие сингулярности в точке перехода скорости ионов через скорость

ионного звука (точка звукового резонанса). Устранение сингулярности имеет важное значение для построения гладких решений, что было подробно исследовано в [24-26]. Недавно было показано [27], что регуляризация точки звукового резонанса может быть проведена аналитически, что выявило наличие глобальных ограничений на существование стационарных решений и рабочие характеристики разряда. В [27] были найдены различные типы стационарных решений, соответствующие разной величине разрядного тока и скорости инжекции нейтрального газа. Было выдвинуто предположение о том, что различные типы решений обладают разной степенью устойчивости и отличаются характером нелинейных колебаний (в неустойчивых случаях).

Основной акцент в настоящей работе сделан на исследовании устойчивости и природы низкочастотных осевых мод в условиях, соответствующих разным типам стационарных решений. Мы используем стационарные профили плазмы, полученные из решения одномерных уравнений равновесия, в качестве начальных условий и исследуем их временную эволюцию в ходе нелинейного численного моделирования. При этом показано, что низкочастотные моды могут существовать в различных режимах: одномодовый режим, режим с высоко когерентными колебаниями и многомодовый режим, включающий несколько мод.

Из-за глобальных ограничений, накладываемых для регуляризации точки звукового резонанса, стационарные профили плазмы оказываются довольно жесткими. Поэтому можно ожидать, что большую роль в устойчивости и характере возмущений будут играть граничные условия. Мы исследуем влияние граничных условий, а именно, величины скорости ионов и плотности плазмы на аноде, на характеристики низкочастотных колебаний.

Существенным упрощением, используемым в настоящей работе, является предположение о постоянстве и однородности подвижности электронов. Подвижность электронов в плазменных ускорителях обычно сильно аномальна. Профили подвижности плохо известны [28], а уровень аномальности (отклонение от классических значений) обычно выше в прианодной области [28, 29]. Поэтому предположения о классической подвижности электронов и постоянстве частоты ионизации хотя и не вполне реалистичны для работающих холловских ускорителей, но позволяют упростить модель и могут быть пригодны для описания процессов с модифицированной прианодной областью двигателя. Краткое обсуждение влияния величины электронной подвижности на полученные результаты представлено в Заключении статьи.

ФИЗИКА ПЛАЗМЫ том 46 № 4 2020

Работа построена следующим образом. В разделе 2 представлено описание используемой модели и приведены параметры моделирования. В разделе 3 обсуждается структура стационарных решений и диаграммы рабочих режимов разряда. В разделе 4 представлены результаты анализа устойчивости полученных стационарных решений. Влияние граничных условий (ГУ) на устойчивость и режимы колебаний рассмотрены в разделе 5. Результаты работы суммированы в Заключении 6.

#### 2. МОДЕЛЬ УСКОРЕНИЯ ПЛАЗМЫ С УЧЕТОМ ИОНИЗАЦИИ И РЕЗИСТИВНОСТИ

Используемая модель включает уравнения непрерывности для плотности плазмы n(x,t) и нейтралов N(x,t), уравнение движения для скорости ионов  $v_i(x,t)$  и выражение для осевого электрического поля *E*, следующее из закона Ома,

$$\frac{\partial N}{\partial t} + v_a \frac{\partial N}{\partial x} = -\beta Nn, \qquad (1a)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (nv_i) = \beta Nn, \qquad (1b)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial x} = \frac{e}{m_i} E + \beta N \left( v_a - v_i \right), \quad (1c)$$

$$E = \frac{J_d}{n\mu_e} - \frac{V_i}{\mu_e} - \frac{1}{en} \frac{\partial(T_e n)}{\partial x}.$$
 (1d)

Здесь  $\beta$  — коэффициент ионизации плазмы,  $m_i$  — масса однозарядных ионов,  $v_a$  — скорость потока нейтралов,  $J_d = n(v_i - v_e)$  — полная плотность тока в разряде,  $v_e$  — скорость электронов,  $\mu_e$  — подвижность электронов поперек магнитного поля,  $T_e$  — температура электронов, e — элементарный заряд, x обозначает направление вдоль оси ускоряющего канала. Используемые уравнения предполагают квазинейтральность плазмы:  $n_i = n_e = n$ . Ионизация включена в уравнения (1a), (1b) в предположении постоянства скорости нейтральных атомов,  $v_a$  = const, инжектируемых со стороны анода, и постоянной температуры электронов [30, 31], так что  $\beta$  = const (в расчетах  $\beta$  = 1.29× × 10<sup>-13</sup>). Ионы считаются холодными.

Диффузионный член в законе Ома  $(en)^{-1}\partial(T_en)/\partial x$  приводит к обратному потоку плазмы на анод, а также к сингулярности в точке звукового резонанса,  $v_i = c_s$ , где  $c_s^2 = T_e/m_i -$ скорость ионного звука. Как отмечено во Введении, мы предполагаем, что подвижность электронов  $\mu_e$  постоянна и однородна. В расчетах используются параметры плазмы, типичные для цилиндриче-

ского плазменного ускорителя (cylindrical Hall thruster – CHT) [32–34], см. табл. 1.

# 3. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ

Решения стационарных уравнений рассматривались ранее в [24, 35]. Здесь мы изложим полуаналитический подход, использованный в [27]. Полагая в (1) все производные по времени равными нулю, имеем

$$v_a \frac{\partial N}{\partial x} = -\beta N n_i, \qquad (2a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(n_i v_i) = \beta N n_i, \qquad (2b)$$

$$v_i \frac{\partial v_i}{\partial x} = -\frac{e}{m_i} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \beta N(v_a - v_i), \qquad (2c)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{J_d}{n_i \mu_e} + \frac{v_i}{\mu_e} + \frac{1}{e n_i} \frac{\partial (T_e n_i)}{\partial x}, \qquad (2d)$$

где  $\phi$  — электростатический потенциал,  $E = -\partial \phi/\partial x$ . Поток нейтралов определяется выражением  $J_a = Nv_a$ , при этом сохраняется следующий интеграл  $J_a + n_i v_i$  = const. Плотность нейтралов на границе N может быть определена путем учета рециклинга ионов на аноде: ионы, текущие назад к аноду, нейтрализуются и вносят вклад в поток нейтралов,  $N = \dot{m}/(m_i v_a S) - n_i v_i / v_a$ , где S — площадь сечения канала. Далее система уравнений (1) может быть сведена к трем обыкновенным дифференциальным уравнениям на про-изводные  $v_i$ ,  $n_i$  и  $\phi$ :

$$v'_{i} = -\frac{1}{c_{s}^{2} - v_{i}^{2}} \left( v_{i} \frac{e}{m_{i}} \frac{J_{d} - n_{i} v_{i}}{\mu_{e} n_{i}} - \frac{J_{a} - n_{i} v_{i}}{\mu_{e} n_{i}} - \frac{J_{a} - n_{i} v_{i}}{\mu_{e} n_{i}} \right)$$
(3a)

$$n'_{a} = \frac{1}{c_{s}^{2} - v_{i}^{2}} \left( \frac{e}{m_{i}} \frac{J_{d} - n_{i}v_{i}}{\mu_{e}} + \frac{1}{c_{s}^{2} - v_{i}^{2}} \right)$$
(21)

$$+\frac{J_a - n_i v_i}{v_a} \beta n_i (v_a - 2v_i) = \frac{F_2(v_i, n_i)}{D},$$
(3b)

$$\phi' = \frac{1}{c_s^2 - v_i^2} \left( v_i^2 \frac{J_d - n_i v_i}{\mu_e n_i} + \frac{e}{m_i} \frac{J_a - n_i v_i}{v_a} \beta c_s^2 (v_a - 2v_i) \right) \equiv \frac{F_3(v_i, n_i)}{D}.$$
(3c)

Здесь  $\phi' = \partial \phi/\partial x$ ,  $v'_i = \partial v_i/\partial x$ ,  $n'_i = \partial n_i/\partial x$ ,  $D = c_s^2 - v_i^2$ . Правая часть полученной системы зависит от двух параметров  $J_d$  и  $J_a$ , а также от текущих величин  $n_i$  и  $v_i$ . В случае однородной температуры электронов величина  $v_i$  известна в особой точке  $v_i = c_s$  при  $x = x_s$ . Таким образом, уравнения

Таблица 1. Типичные параметры плазмы в СНТ

Параметр	Значение
Газ	Xe
Длина канала, <i>L</i>	3.0 см
Радиус канала, <i>R</i>	1.2 см
Площадь сечения канала, S	4.5 см <sup>2</sup>
Поток массы, <i>m</i>	0.34 мг/с
Температура электронов, <i>T<sub>e</sub></i>	20 эВ
Скорость ионного звука, $c_s$	3833 м/с
Скорость нейтралов, <i>v<sub>a</sub></i>	202  M/c (T = 650  K)
Подвижность электронов, $\mu_e$	$2.66 \text{ м}^2 \text{ B}^{-1} \text{ c}^{-1}$

(3а)—(3с) могут быть проинтегрированы в обоих направлениях от точки звукового резонанса,  $x_s$ , если плотность в этой точке известна,  $n_s = n_i (x_s)$ . Оказывается, что при однородной фиксированной температуре величина  $n_s$  может быть легко определена из условия регулярности решения в точке звукового резонанса  $x = x_s$ , которое записывается в виде  $F_1 = F_2 = F_3 = 0$ . Важно отметить, что уравнения для всех трех функций  $F_1 = 0$ ,  $F_2 = 0$  и  $F_3 = 0$  сводятся к одному уравнению

$$\beta \mu_e c_s (v_a - 2c_s) n_s^2 + + (c_s v_a + \beta \mu_e J_a (2c_s - v_a)) n_s - J_d v_a = 0.$$
(4)

При заданных значениях  $J_a$  и  $J_d$  это квадратное уравнение дает два корня для  $n_s$ : ветви низкой и высокой плотности, см. рис. 1. При заданной величине скорости инжекции рабочего вещества пересечение двух ветвей определяет критическую максимальную плотность  $n_s$ , при которой существует стационарное решение; при  $n_i > n_s$  существование стационарных решений невозможно. Такие же свойства напрямую наблюдались численно в [27].

После того, как значение плотности определено из (4), уравнение (3а) может быть использовано для определения величины  $v'_i$  путем разложения (3а) вблизи особой точки [27]. Когда величины  $v'_i$ ,  $n'_i$  и  $\phi'$  найдены, полные профили могут быть восстановлены интегрированием от точки звукового резонанса в обоих направлениях: к аноду (от  $x_s|_{x=0}$  до x = -L) и к выходному сечению канала (от  $x_s|_{x=0}$  до x = L).

Таким способом были восстановлены профили плазмы для различных комбинаций  $J_a$  и  $J_d$  и параметров из табл. 1. Интегрирование проводилось численно методом Рунге—Кутты 4-го поряд-



**Рис. 1.** Диаграммы (а)  $n_s$  и (б)  $v'_i$  как функции полного тока в разряде  $I_d$  при фиксированном значении  $J_a$ . Для иллюстрации различных решений выбраны три корня  $n_s$ : "A", "B" и "C".

ка. Интегрирование в отрицательном направлении останавливалось в точке, в которой скорость ионов достигала значения  $-c_s$ ; возможное решение, таким образом, определено на интервале большем чем длина двигателя *L*. Фиксируя размер системы равным длине двигателя *L* и выбирая левое граничное условие в виде  $v_i = -c_s$ , получаем значение разности потенциалов при заданных  $J_d$  и  $J_a$ . Если предположить, что на аноде  $|v_i| < c_s$ , возможны и другие типы решений.

Не все решения, однако, оказываются возможны: для некоторых значений *n* соответствующие значения градиентов скорости, плотности и потенциала становятся комплексными. Решение уравнения (4) представлено на рис. 1а как функция  $I_d$  (здесь  $I_d = eJ_dS$ ) при фиксированном значении  $J_a$ . Для значений полного тока меньших некоторого максимального значения уравнение (4) имеет два корня, формирующих ветви низкой и высокой плотности. Действительные корни для  $n_s, v'_i, n'_i$  и ф' существуют только для определенного интервала  $J_a$  и  $J_d$ . Это можно видеть из рис. 16, на котором показан градиент скорости как функция I<sub>d</sub>. Действительные v<sub>i</sub> существуют только для ветви n<sub>s</sub>, соответствующей большой плотности (показана синим на рис. 1а), и малой части ветви низкой плотности.

Для иллюстрации возможных решений при разных значениях разрядного тока  $I_d$  было выбрано несколько точек на кривой  $n_s$ : "*A*", "*B*" и "*C*", см. рис. 1а. Соответствующие корни для градиентов скорости отмечены теми же буквами на рис. 1б. Каждой точке на кривой  $n_s$  соответствуют две точки на кривой для градиента скорости.

Корень "*C*" на кривой  $n_s$ , соответствующей ветви высокой плотности, дает два действительных корня – "*C*<sub>1</sub>" и "*C*<sub>2</sub>" – для  $v'_i$ ,  $n'_i$  и  $\phi'$ . Профили ионной скорости, плотности и потенциала для этих корней, полученные путем интегрирования, показаны на рис. 2. Видно, что корень "*C*<sub>2</sub>" приводит к решению с замедляющейся скоростью и поэтому непригоден для описания стационарного состояния в двигателе. Профиль  $v_i$  для корня "*C*<sub>1</sub>" имеет область сверхзвукового ускорения ионов с возможным значением –*c*<sub>s</sub> на границе, соответствующей аноду.

Ситуация с корнями "A" и "B" для значений разрядного тока близких к максимальному более сложная, что схематически показано на рис. 3. Часть диаграммы на рис. 1а, показанная сплошной тонкой линией, соответствует интервалу  $n_s$ , в котором существует четыре корня  $v'_i$ . Два корня " $B_{1,2}$ ", соответствующие точке "B", имеют немонотонные профили скорости с двумя точками  $c_s$ , что противоречит наличию пристеночного плазменного слоя (pre-sheath) вблизи анода с отрицательным потоком ионов. Для точки "A" существует два монотонных решения, но только корню " $A_2$ " соответствует профиль со сверхзвуковым ускорением, который удовлетворяет ГУ плазменного слоя (sheath) на аноде.

Из предыдущих результатов ясно, что при заданном расходе рабочего вещества  $J_a$  существует область значений разрядного тока  $I_d$ , в которой возможно построение решения с растущей скоростью. Однако существует область значений  $J_a$  и  $I_d$ , в которой стационарных решений не существует. Описанный метод позволяет получить стационарные профили для различных значений рабочих параметров двигателя. При этом, полагая



**Рис. 2.** Профили (а)  $v_i$  (штриховые линии  $-\pm c_s$ );  $n_i$  (б) и  $\phi$  (в) для корня "*C*".

другие граничные условия на аноде,  $v_i \neq -c_s$ , можно получить и другие типы решений (см. [27]).



**Рис. 3.** Профили скорости для корней "*A*" и "*B*"; масштаб увеличен.

# 4. УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ

Временная эволюции системы (1) исследовалась численно при помощи программного пакета BOUT++ [36]. В качестве начальных условий использовались найденные в предыдущем разделе стационарные решения (профили) с граничными условиями Бома на аноде ( $v_i = -c_s$ ). В такой постановке каждый профиль отвечает разным значениям разрядного тока  $I_d$  при фиксированной величине массовой скорости  $J_a$ . В ходе расчета была исследована эволюция разрядного тока и выявлены частотные характеристики возбуждаемых колебаний. Основные результаты моделирования приведены на рис. 4.

Установлено, что при низких значениях разрядного тока (область I, сплошная линия) стационарные профили являются устойчивыми и колебаний тока не возникает. Колебания тока появляются для профилей из области 2. С ростом значения  $I_d$  (от левой границы области 2 до ее правой границы) частота колебаний и их амплитуда начинают расти. Это проиллюстрировано на

ФИЗИКА ПЛАЗМЫ том 46 № 4 2020



Рис. 4. Диаграмма устойчивости в переменных  $n_s - I_d$ и  $v_i^* - I_d$  при фиксированном значении  $J_a$ . В области 1 стационарное состояние устойчиво, колебаний нет. В области 2 возникают сильно когерентные колебания. Область 3 характеризуется мультимодовым режимом колебаний. Части диаграммы, показанные пунктирной линией левее области 1, в области 1 и в области 2, соответствуют таким значениям  $n_s$ , при которых значения производных  $v_i^*$ ,  $n_i^*$ ,  $\phi_i^*$  являются мнимыми. Части диаграммы, показанные пунктирной линией в области 3, не имеют решений, представляющих физический интерес.

рис. 5а, б. При этом природа колебаний остается неизменной: это чисто синусоидальные колебания с одной доминирующей частотой, см. рис. 6а, 6г. В начале области 3 частота и амплитуда продолжают расти, см. рис. 5а, 5б; при этом, однако, происходит переход к многомодовым колебаниям, см. рис. 6б, 6д. В конце области 3 амплитуда колебаний достигает максимума, но частота резко падает — колебания становятся сильно нелинейными, что показано на рис. 6в, 6е.

На рис. 5а показаны ток в разряде (квадраты) и амплитуда его флуктуаций (треугольники) как функции напряжения в разряде,  $U_{D}$ , полученные в ходе временного моделирования. Частоты колебаний показаны на рис. 5б. Значения напряжения в разряде получены из стационарных решений. Легко видеть, что колебания тока растут при сближении корней к максимально возможному значению U<sub>D</sub>. Однако, существует область, в которой колебаний нет совсем. Она соответствует области 1 на диаграмме на рис. 4. Полученная вольт-амперная характеристика имеет схожие свойства с экспериментально полученной диаграммой, см. рис. 4 в [37]. Сравнение тока в разряде и ионного тока *I*, показано на рис. 5в. Интересно, что рост тока в разряде не приводит к соответствующему росту ионного тока. который практически не меняется. Это означает, что эффективность двигателя падает.

Переход колебаний из одномодового режима к многомодовым колебаниям и далее в несинусоидальный режим колебаний показан на рис. 6. При низких значениях разрядного тока колебания обладают одной доминирующей гармоникой и строго синусоидальны, см. рис. 6а, 6г. С ростом тока, соответствующему корням из области 3, колебания переходят в многомодовый режим, см. рис. 6б, 6д. При максимально возможном значении тока колебания становятся несинусоидальными, см. рис. 6в, бе.



**Рис. 5.** Амплитуда флуктуаций тока в разряде (треугольники) и значение разрядного тока (квадраты) как функции напряжения в разряде (а). Осциллограммы тока для точек, отмеченных крестиками, показаны на рис. 6. Частота колебаний как функция напряжения в разряде (б). Ток разряда (квадраты) и ионный ток (кружки) как функции напряжения (в). Здесь и ниже черта сверху обозначает усредненные по времени значения тока.

ФИЗИКА ПЛАЗМЫ том 46 № 4 2020



**Рис. 6.** Осциллограммы тока (a-B) и соответствующие спектры (r-e) при различных значениях  $U_D$ , отмеченных на рис. 5 крестиками.

#### 5. ВЛИЯНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ И ХАРАКТЕРИСТИКИ КОЛЕБАНИЙ

Исследуем влияние граничных условий (ГУ) на полученные результаты. В предыдущем разделе для плотности плазмы и скорости ионов были использованы те же краевые условия Дирихле, что и полученные из стационарных профилей. Можно предположить, что "неправильные" ГУ, т. е. отличные от условий, полученных из стационарных решений, могут значительно повлиять на колебания. Чтобы проверить эту гипотезу, рассмотрим два типа стационарных решений: устойчивое (из области 1) и неустойчивое (из области 2). При этом будем менять ГУ для одной величины (скорости ионов или плотности плазмы), сохраняя ГУ для второй величины (оно будет соответствовать стационарному решению).

#### 5.1. Влияние граничных условий на неустойчивые профили

Вначале исследуем неустойчивые профили, меняя ГУ для плотности плазмы, при фиксированном ГУ для скорости ионов  $v_i = -c_s$ . Результа-

ты динамического моделирования показаны на рис. 7: ток в разряде и ионный ток – рис. 7а; колебания разрядного тока – рис. 76; частота колебаний – рис. 7в, – как функции плотности плазмы на аноде. Плотность плазмы представлена в виде отношения варьируемой величины N<sub>i</sub> к значению, найденному из стационарного решения  $N_{i0}$ . Увеличение плотности плазмы приводит к росту разрядного тока, при этом ионный ток меняется незначительно, см. рис. 7а. Амплитуда колебаний и их частота весьма чувствительны к изменению плотности плазмы на границе. Увеличение плотности плазмы на аноде приводит к уменьшению амплитуды колебаний и росту частоты. Существует пороговое значение, при превышении которого колебания пропадают, см. рис. 76, 7в.

Роль ГУ для ионной скорости показана на рис. 8. Результаты представлены в виде зависимостей от отношения варьируемого значения скорости ионов к скорости ионного звука  $c_s$ . Изменение ГУ на аноде главным образом приводит к изменению амплитуды колебаний, см. рис. 8б. Изменения в токе разряда и ионном токе видны, однако, они малы по сравнению с изменениями, полученными при вариации плотности плазмы.



**Рис.** 7. Влияние граничного значения плотности плазмы на аноде  $N_i$  на неустойчивый профиль: ток в разряде и ионный ток (а); амплитуда флуктуаций тока в разряде (треугольники) и его среднее значение (квадраты) (б); частота колебаний (в). Здесь  $N_{i0}$  – значение плотности плазмы, полученное из стационарного решения.



**Рис. 8.** Влияние граничного значения скорости ионов на аноде  $v_i$  на неустойчивый профиль: ток в разряде и ионный ток (а); амплитуда флуктуаций тока в разряде (треугольники) и его среднее значение (квадраты) (б); частота колебаний (в).

Частота колебаний слабо зависит от ГУ для ионной скорости, см. рис. 8в. Интересно, что изменение ГУ для скорости ионов не приводит к стабилизации колебаний. Таким образом, рассматриваемые колебания слабее реагируют на изменение ГУ для ионной скорости по сравнению с влиянием ГУ для плотности плазмы.

## 5.2. Влияние граничных условий на устойчивые профили

Аналогичные расчеты были проведены для первоначально устойчивых профилей. Этим профилям не свойственна самопроизвольная раскачка колебаний и поэтому они могут быть использованы для исследования возможности дестабилизации системы различными граничными условиями. Влияние ГУ для плотности плазмы показано на рис. 9. Как и в случае неустойчивых профилей увеличение плотности плазмы приводит к росту тока в разряде и тока ионов; рост почти линеен. При этом ионный ток растет пропорционально полному току. В рассматриваемом случае, однако, увеличение граничного значения плотности плазмы не приводит к дестабилизации системы: см. рис. 9б, на котором видно, что колебания отсутствуют во всем диапазоне изменения граничных значений плотности.

Изменение скорости ионов на аноде приводит к изменению разрядного тока и тока ионов. Как и для неустойчивых профилей это изменение мало по сравнению с влиянием ГУ для плотности плазмы. Однако, важное отличие заключается в том, что вариация ионной скорости может приводить к дестабилизации первоначально устойчивого

ФИЗИКА ПЛАЗМЫ том 46 № 4 2020



**Рис. 9.** Влияние граничного значения плотности плазмы на аноде  $N_i$  на устойчивый профиль: ток в разряде и ионный ток (а); амплитуда флуктуаций тока в разряде (треугольники) и его среднее значение (квадраты) (б). Здесь  $N_{i0}$  – значение плотности плазмы, полученное из стационарного решения.

профиля. Это происходит в узком диапазоне скоростей, слегка превышающих скорость ионного звука. В этом случае в системе возникают одномодовые колебания с частотой  $f \sim 64.8$  кГц, как показано на рис. 9в.

#### 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследована устойчивость осевой ионизационной моды в модельной конфигурации холловского ускорителя. В качестве начальных условий для временной задачи использовались решения стационарных уравнений равновесия. Динамическое моделирование системы нелинейных уравнений в частных производных требует задания граничных условий на аноде. Физические процессы и точная форма ГУ для квазинейтральной области на аноде не совсем ясны. В предположении существования плазменного слоя вблизи анода ГУ на границе квазинейтральной области соответсвуют критерию Бома:  $v_i = -c_s$ . Для исследования стационарных решений также используется нулевое граничное условие для скорости ионов,  $v_i = 0$ , [38]. В работах [30, 39-42] было отмечено, что в холловских двигателях возможны режимы с измененным прианодным плазменным слоем или без плазменного слоя, что указывает на возможность существования различных форм ГУ. Это явилось мотивацией для исследования влияния анодных ГУ на устойчивость рассматриваемых колебаний.

В основной части исследования граничные условия для плотности плазмы были получены самосогласованно из стационарных решений, полагая  $v_i = -c_s$  на аноде. В этом случае показано, что диаграмма рабочих параметров разряда разделяется на три характерные области. Профили

плазмы, соответствующие значениям разрядного тока из области *1*, устойчивы. Профили из области *2* неустойчивы и для них характерны синусоидальные одномодовые колебания. Профили из области *3* также неустойчивы и демонстрируют сильно нелинейный многомодовый режим колебаний. Этот результат может интерпретировать переход между модами колебаний, наблюдаемый экспериментально в работах Секерака и др. [43, 44].

Для более обшего исследования роли граничных условий, была рассмотрена устойчивость стационарных профилей с ГУ отличными от условий, самосогласованно следующих из стационарных решений. Рассматривались профили из области 1 (устойчивая область) и области 2 (неустойчивая область). Показано, что изменение ГУ для плотности не оказывает существенного влияния на динамику устойчивых профилей. Несмотря на линейный рост стационарных значений разрядного тока и тока ионов, система остается устойчивой. Изменение ГУ для скорости ионов способно приводить к дестабилизации системы, но лишь в весьма узком диапазоне параметров плазмы. Возникающие при этом колебания являются одномодовыми и обладают малой (по сравнением с уровнем постоянного тока) амплитудой, что говорит о том, что колебания находятся в линейном режиме [45].

Для неустойчивых профилей наибольшее влияние на устойчивость системы оказывает граничное значение плотности плазмы. Показано существование порогового уровня плотности, при котором колебания пропадают. Последующее увеличение плотности на границе сопровождается ростом частоты колебаний. Изменения граничных значений скорости ионов слабо влияют



**Рис. 10.** Влияние граничного значения скорости ионов на аноде  $v_i$  на устойчивый профиль: ток в разряде и ионный ток (а); амплитуда флуктуаций тока в разряде (треугольники) и его среднее значение (квадраты) (б); осциллограмма тока в неустойчивом случае (в).

на динамику системы. Происходят малые изменения амплитуды и частоты колебаний, тем не менее система остается неустойчивой.

Неустойчивости ускоренного потока плазмы. рассматриваемые в настоящей работе, обусловлены взаимодействием между подвижностью электронов, диффузией и ионизацией. Эти же явления ответственны за временную и пространственную ЭВОЛЮЦИЮ параметров плазмы. связанную с пульсирующей модой в холловских двигателях. Многопараметричность залачи сушественно усложняет анализ данного типа колебаний. Кроме того, точные значения и профиль аномальной частоты столкновений в холловских ускорителях плохо определены [28]. Поэтому рассмотрение эффектов, связанных с наличием аномальной подвижности и ее изменениями вдоль оси канала, было вынесено за рамки данной работы. Это позволило проанализировать эффекты ГУ с помощью самосогласованной модели. При этом в нашей модели частота колебаний увеличена по сравнению с тем, что можно ожидать для больших (аномальных) значений подвижности электронов. Тем не менее, мы полагаем, что общие результаты представленного анализа могут быть полезны для исследования пульсирующей моды в экспериментах по управлению разрядом [46-49] и для диагностических целей [45, 50], а также в экспериментах с модифицированным анодным слоем или без пристеночного слоя [30, 39].

Стоит отметить, что осевые колебания параметров плазмы могут влиять на азимутальные моды, связанные с градиентами плотности плазмы [51, 52]; отклик азимутальной моды зависит от типа возбуждаемых осевых мод [53]. В работе [54] была предложена идея о том, что ключевую роль в формировании пульсирующей моды может иг-

ФИЗИКА ПЛАЗМЫ том 46 № 4 2020

рать резистивная неустойчивость плазмы [55]. Резистивные неустойчивости, возбуждаемые осевым током электронов и пучками ускоренных ионов [56, 57], также могут присутствовать и в других лабораторных системах [1–7].

Работа частично поддержана грантом № 17-12-01470 Российского научного фонда. Авторы благодарны Е. Райцесу за многочисленные полезные обсуждения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Andreev V.V., Chuprov D.V., Ilgisonis V.I., Novitskii A.A., Umnov A.M. // Phys. Plasmas. 2017. V. 24. P. 093518.
- 2. Балмашнов А.А., Калашников А.В., Калашников В.В., Степина С.П., Умнов А.М. // Прикладная физика. 2017. № 3. С. 37.
- Kahnfeld D., Heidemann R., Duras J., Matthias P., Bandelow G., Luskow K., Kemnitz S., Matyash K., Schneider R. // Plasma Sources Sci. Technol. 2018. V. 27. P. 124002.
- Yang Y., Zhou X., Liu J.X., Anders A. // Appl. Phys. Lett. 2016. V. 108. P. 034101.
- Young C.V., Fabris A.L., Cappelli M.A. // Appl. Phys. Lett. 2015. V. 106. P. 044102.
- 6. Брушлинский К.В., Жданова Н.С. // Изв. РАН. МЖГ. 2004. № 3. С. 135.
- 7. *Брушлинский К.В., Жданова Н.С. //* Физика плазмы. 2008. Т. 34. С. 1120.
- 8. *Морозов А.И.* // Плазменные ускорители. М.: Машиностроение, 1973. С. 5.
- 9. Морозов А.И. // Физика плазмы. 2003. Т. 29. С. 261.
- Morozov A.I., Savel'ev V.V. // Reviews of Plasma Physics. V. 21 / Eds. B. B. Kadomtsev and V. D. Shafranov. N.Y.: Kluwer, 2000. P. 203.
- 11. Ким В.П. // ЖТФ. 2015. Т. 60. С. 45.
- 12. Janes G.S., Dotson J., Wilson T. Electrostatic acceleration of neutral plasmas-momentum transfer through

magnetic fields. Research Report 150. United States, 1962. 27 p.

- Fife J., Martinez-Sanchez M., Szabo J. // 33rd Joint Propulsion Conference and Exhibit. 1997. P. 3052.
- 14. *Fife J.M.* Hybrid-PIC Modeling and Electrostatic Probe Survey of Hall Thrusters. Thesis, MIT, 1998.
- Barral S., Ahedo E. // Plasma 2007. V. 993. Aip Confer. Proceed. / Eds. H.J. Hartfuss, M. Dudeck, J. Musielok, and M.J. Sadowski. 2008. P. 439.
- Morozov A.I. // Proc. 24th Int. Electric Propulsion Conf. Moscow, 1995 P. IEPC-95-161.
- 17. *Морозов А.И., Савельев В.В. //* Физика плазмы. 2000. Т. 26. С. 934.
- Barral S., Peradzynski Z., Makowski K., Dudeck M. // High Temperature Material Processes: An International Quarterly of High-Technology Plasma Processes. 2001. V. 5 (1).
- Boeuf J.P., Garrigues L. // J. Appl. Phys. 1998. V. 84. P. 3541.
- 20. Barral S., Ahedo E. // Phys. Rev. E. 2009. V. 79. P. 046401.
- Yamamoto N., Nakagawa T., Komurasaki K., Arakawa Y. // Vacuum. 2002. V. 65. P. 375.
- Hara K., Sekerak M.J., Boyd I.D., Gallimore A.D. // Phys. Plasmas. 2014. V. 21. P. 122103.
- Wei L.Q., Han L., Yu D.R., Guo N. // Chinese Phys. B. 2015. V. 24. P. 055201.
- Fisch N.J., Fruchtman A. // Modeling the Hall thruster. PPPL reports. 1998. V. 8.
- Fruchtman A., Fisch N.J., Raitses Y. // Phys. Plasmas. 2001. V. 8. P. 1048.
- Ahedo E., Gallardo J.M., Martinez-Sanchez M. // Phys. Plasmas. 2002. V. 9. P. 4061.
- Smolyakov A., Chapurin O., Romadanov I., Raitses Y., Kaganovich I. // AIAA Propulsion and Energy 2019 Forum, 2019.
- Mikellides I.G., Ortega A.L. // Plasma Sources Sci. Technol. 2019. V. 28. P. 014003.
- 29. Boeuf J.P. // Phys. Plasmas. 2019. V. 26. P. 072113.
- Dorf L., Semenov V., Raitses Y. // Appl. Phys. Lett. 2003. V. 83. P. 2551.
- Fruchtman A., Fisch N.J., Raitses Y. // Phys. Plasmas. 2001. V. 8. P. 1048.
- Smirnov A., Raitses Y., Fisch N.J. // IEEE Transactions on Plasma Science. 2008. V. 36. P. 1998.
- Smirnov A., Raitses Y., Fisch N.J. // Phys. Plasmas. 2007. V. 14. P. 057106.
- Smirnov A., Raitses Y., Fisch N.J. // J. Appl. Phys. 2002. V. 92. P. 5673.
- Fruchtman A., Fisch N.J. // 34th AIAA/ASME/SAE/ ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit. 1998. P. 3500.

- Dudson B.D., Allen A., Breyiannis G., Brugger E., Buchanan J., Easy L., Farley S., Joseph I., Kim M., Mc-Gann A.D. et al. // J. Plasma Phys. 2015. V. 81. P. 365810104.
- Gascon N., Dudeck M., Barral S. // Phys. Plasmas. 2003. V. 10. P. 4123.
- Cohen-Zur A., Fruchtman A., Ashkenazy J., Gany A. // Phys. Plasmas. 2002. V. 9. P. 4363.
- 39. *Ahedo E., Rus J.* // J. Appl. Phys. 2005. V. 98. P. 043306.
- Dorf L., Raitses Y., Fisch N.J. // Phys. Plasmas. 2006.
   V. 13. P. 057104.
- Dorf L., Raitses Y., Fisch N.J. // J. Appl. Phys. 2005. V. 97. P. 103309.
- 42. Keidar M. // J. Appl. Phys. 2008. V. 103. P. 053309.
- 43. Sekerak M.J., Hofer R., Polk J., Longmier B., Gallimore A., Brown D. // 49th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Confer. 2013.
- 44. *Hara K., Sekerak M.J., Boyd I.D., Gallimore A.D. //* J. Appl. Phys. 2014. V. 115. P. 203304.
- 45. *Romadanov I., Raitses Y., Smolyakov A. //* Plasma Sources Sci. Technol. 2018. V. 27. P. 094006.
- 46. *Furukawa T., Miyasaka T., Fujiwara T. //* Transac. Japan Society for Aeronautical and Space Sciences. 2001. V. 44. P. 164.
- 47. Yu D.R., Wang C.S., Wei L.Q., Gao C., Yu G. // Phys. Plasmas. 2008. V. 15. P. 113503.
- 48. Wang C., Wei L., Yu D. // Contributions to Plasma Phys. 2011. V. 51. P. 981.
- 49. Wei L.Q., Han K., Wang C.S., Li H., Zhang C.H., Yu D.R. // J. Vacuum Science & Tech. A. 2012. V. 30. P. 061304.
- Romadanov I., Raitses Y., Diallo A., Hara K., Kaganovich I.D., Smolyakov A. I. // Phys. Plasmas. 2018. V. 25. P. 033501.
- Romadanov I., Smolyakov A., Raitses Y., Kaganovich I., Tian T., Ryzhkov S. // Phys. Plasmas. 2016. V. 23. P. 122111.
- Smolyakov A.I., Chapurin O., Frias W., Koshkarov O., Romadanov I., Tang T., Umansky M., Raitses Y., Kaganovich I.D., Lakhin V.P. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2017. V. 29. P. 014041.
- 53. Ромаданов И., Райцес Е., Смоляков А. // Физика плазмы. 2019. Т. 45. С. 146.
- 54. Chable S., Rogier F. // Phys. Plasmas. 2005. V. 12. P. 033504.
- Koshkarov O., Smolyakov A.I., Kapulkin A., Raitses Y., Kaganovich I. // Phys. Plasmas. 2018. V. 25. P. 061209.
- Koshkarov O., Smolyakov A.I., Romadanov I.V., Chapurin O., Umansky M.V., Raitses Y., Kaganovich I.D. // Phys. Plasmas. 2018. V. 25. P. 011604.
- Koshkarov O., Smolyakov A.I., Kaganovich I.D., Ilgisonis V.I. // Phys. Plasmas. 2015. V. 22. P. 052113.