

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАЛОРАЗМЕРНЫХ КЛАСТЕРНЫХ СИСТЕМ (ЦЕПОЧЕЧНЫЕ СТРУКТУРЫ)

© 2020 г. О. С. Ваулина^{a, b, *}

^a Объединенный институт высоких температур РАН, Москва, Россия

^b Московский физико-технический институт (государственный университет),
Долгопрудный, Московская обл., Россия

*e-mail: olga.vaulina@bk.ru

Поступила в редакцию 06.11.2019 г.

После доработки 19.11.2019 г.

Принята к публикации 21.11.2019 г.

Представлены результаты исследования спектральных характеристик стохастического движения заряженных частиц, взаимодействующих с произвольным попарным потенциалом, для малоразмерных цепочечных структур в анизотропном электрическом поле ловушки. Рассмотрены характерные частоты частиц и способ их аналитического вычисления. Приведены соотношения для спектральной плотности смещений в системах, состоящих из нескольких частиц.

Ключевые слова: пылевая плазма, заряженные частицы, цепочечные структуры, спектральные характеристики

DOI: 10.31857/S0367292120040150

1. ВВЕДЕНИЕ

Стохастическое (тепловое) движение в системах взаимодействующих частиц широко распространено в природе и наблюдается, например, в биологических и полимерных коллоидных растворах, в плазме продуктов сгорания, в атмосфере Земли и т.д. [1–6]. Исследование такого движения представляет интерес в различных областях науки и техники.

Комплексная (пылевая) плазма представляет собой ионизованный газ, содержащий заряженные частицы вещества микронных размеров (пыль). Экспериментальный, теоретический и численный анализ теплового движения взаимодействующих пылевых частиц в протяженных и ограниченных ансамблях, формирующихся в газоразрядной плазме, дан в работах [7–13]. Отметим, что в обычных тлеющих разрядах в центре газоразрядных камер наблюдается некоторое превышение концентрации ионов плазмы над концентрацией ее электронной компоненты [14]. Данное обстоятельство приводит к формированию эффективных ловушек для отрицательно заряженных частиц пыли [1, 2]. Лабораторные эксперименты с небольшим количеством пылевых частиц (от двух до ~10) позволяют определять характер межчастичного взаимодействия; проводить исследования спектров собственных и вынужденных колебаний частиц; изучать влияние

различных внешних воздействий; разрабатывать новые методы диагностики и т.д. [15–22].

Для анализа особенностей теплового движения взаимодействующих частиц можно воспользоваться спектральной плотностью их смещений. В общем случае спектральная плотность определяется как преобразование Фурье от корреляционной функции для некоторой физической характеристики анализируемого процесса, а для случайного процесса является косинус-преобразованием Фурье для соответствующей корреляционной функции [23–25]. В отличие от других характеристик системы (параметра неидеальности, коэффициентов тепло- и массопереноса и т.д.) информация о спектральной плотности тепловых смещений частиц позволяет анализировать спектр частот их собственных колебаний в исследуемых системах. Это, в свою очередь, дает возможность оценить реакцию системы на кратковременные или периодические внешние возмущения, а также позволяет определить характер и тип потенциала взаимодействия между частицами среды [7–9, 26, 27].

Несмотря на большое количество работ по изучению теплового движения заряженных частиц во внешнем электрическом поле, вопрос о спектральной плотности смещений для отдельных частиц до конца не выяснен, за исключением случаев одной и/или двух заряженных частиц [28]. В настоящей работе представлены результа-

ты исследования спектральных характеристик для частиц, взаимодействующих с произвольным попарным потенциалом, в малоразмерных цепочечных структурах, включающих до шести заряженных частиц.

2. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

2.1. Общий случай

Рассмотрим равновесную систему, состоящую из N частиц массой M и зарядами Q_i , взаимодействующих с произвольной формой потенциала в линейном электрическом поле $E(r, z)$ цилиндрической ловушки с радиальной составляющей $E_r = \beta^r r$ и вертикальной составляющей $E_z = E_z^0 + \beta^z z$. Здесь $r \equiv (x^2 + y^2)^{1/2}$ – радиальная координата, z – вертикальная координата по оси z в направлении силы тяжести, β^r и β^z – величины градиентов электрического поля, а значение E_z^0 определяется балансом сил, действующих в системе.

В предположении, что смещение ξ_i частиц (где $i = 1, 2, \dots, N$) от их положения равновесия под действием некоторой случайной силы F_{bi} ограничено малыми отклонениями, систему линеаризованных уравнений движения в выбранном направлении для каждой из степеней свободы можно записать в общем виде

$$\frac{dV_i}{dt} = -\nu V_i - Q_i \beta^{r(z)} \xi_i / M + \sum_{j=1, j \neq i}^N (b_{ji} \xi_i - b_{ij} \xi_j) + F_{bi} / M, \quad (1)$$

где ν – коэффициент трения заряженной частицы за счет ее столкновений с нейтралами окружающего газа, $V_i = d\xi_i/dt$ – скорость i -той частицы на одну степень свободы, F_{bi} – сила Ланжевена, являющаяся источником стохастической кинетической энергии частиц, а коэффициенты b_{ij} зависят от физики решаемой задачи (для попарного взаимодействия справедливо $b_{ij} \equiv b_{ji}$) и рассматриваемой степени свободы смещений частиц.

Основные гармоники для системы (1) (ее характерные частоты) можно найти путем решения характеристического уравнения $f(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$, где n определяется числом N взаимодействующих частиц; если корни этого уравнения имеют положительную действительную часть – решение системы (1) является неустойчивым. Корни характеристического уравнения (а, соответственно, значения характерных частот, ω_n) могут быть получены численно на основе существующих программных пакетов, которые используют различные методики для их вычисления, а также путем аналитического реше-

ния задачи способом, описанным в последующих разделах.

Задача об устойчивой конфигурации двух идентичных частиц, взаимодействующих с различными типами потенциалов, в линейном электрическом поле рассматривалась в работах [20, 21, 29–31], где было показано, что устойчивость вертикальной (цепочечной) конфигурации имеет место при $\beta^r > \beta^z$, в обратном случае ($\beta^r < \beta^z$) формируется горизонтальная конфигурация частиц. Критерии устойчивости малоразмерных кластерных систем, включающих до шести заряженных частиц, взаимодействующих с произвольным попарным потенциалом, подробно рассмотрены в работе [31].

2.2. Случай двух частиц

Рассмотрим систему линеаризованных уравнений движения, описывающих отклонения двух заряженных частиц равной массы и размера с зарядами $Q_{1(2)}$ от их положения равновесия, $\xi_{1(2)}$, для выбранной степени свободы в линейном электрическом поле ловушки под действием случайной силы $F_{b1(2)}$

$$\frac{d^2 \xi_1}{dt^2} = -\nu \frac{d \xi_1}{dt} - a_1 \xi_1 + b \xi_2 + F_{b1} / M, \quad (2a)$$

$$\frac{d^2 \xi_2}{dt^2} = -\nu \frac{d \xi_2}{dt} - a_2 \xi_2 + b \xi_1 + F_{b2} / M. \quad (2б)$$

Остановимся на случае вертикальной конфигурации частиц, рис. 1а, когда

$$\beta^r > 2\beta^z Q_{1(2)} / (Q_1 + Q_2),$$

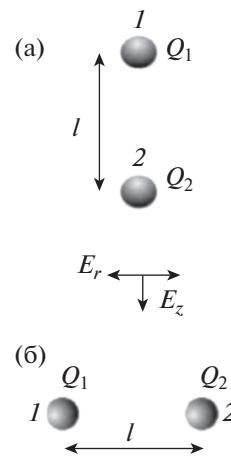


Рис. 1. Вертикальная (а) и горизонтальная (б) конфигурации двух взаимодействующих частиц в электрическом поле ловушки $E = E(z, r)$ с цилиндрической симметрией.

что при $Q_1 = Q_2$ сводится к известному соотношению $\beta^r > \beta^z$ [29, 30]. (Все решения для горизонтальной конфигурации частиц, $\beta^r < 2\beta^z Q_{1(2)}/(Q_1 + Q_2)$, будут аналогичными, см. рис. 1б.) Тогда для вертикальных смещений частиц, $\xi_{1(2)} = z_{1(2)}$, коэффициент $a_{1(2)} = (Q_{1(2)}\beta^z - F)/M$ и $b = -F/M$, где F – производная силы F взаимодействия между двумя частицами в направлении оси z . Для радиальных смещений частиц, $\xi_{1(2)} = r_{1(2)}$, величина $a_{1(2)} = (Q_{1(2)}\beta^r - F/l)/M$, а $b = F/lM$, где l – расстояние между частицами. Уравнение баланса сил для двух частиц, движение которых описывается уравнениями (2а), (2б), дает $\beta^z l = F(Q_1 + Q_2)/Q_1 Q_2$. Для кулоновского взаимодействия $F = Q_1 Q_2 / l^2$; $F = -2Q_1 Q_2 / \beta$.

Добавим, что случай $a_1 \neq a_2$ может реализоваться для пылевых частиц в лабораторной плазме не только за счет разницы в зарядах частиц ($Q_1 \neq Q_2$), но и за счет отличия градиентов внешнего поля ($\beta_1 \neq \beta_2$) в точке равновесного положения частиц. Оба фактора могут быть связаны с возможным пространственным изменением параметров окружающей плазмы (концентраций и температур ионов/электронов).

Для поиска корреляторов скоростей и смещений частиц в системе, заданной уравнениями (2а), (2б), отметим, что корреляторы случайной силы $F_{b1(2)}$ подчиняются уравнениям $\langle F_{b1} \rangle = \langle F_{b2} \rangle \equiv 0$, $\langle F_{b1} F_{b2} \rangle = 0$, $\langle F_{b1} V_2 \rangle = \langle F_{b2} V_1 \rangle \equiv 0$, $\langle F_{b1} \xi_2 \rangle = \langle F_{b2} \xi_1 \rangle \equiv 0$, $\langle F_{b1} \xi_1 \rangle = \langle F_{b2} \xi_2 \rangle \equiv 0$, $\langle F_{b1} V_2 \rangle = \langle F_{b2} V_1 \rangle \equiv 0$. Здесь и далее угловые скобки $\langle \rangle$ обозначают усреднение по времени при $t \rightarrow \infty$.

При движении частиц по ограниченному траекториям величины $\langle \xi_1 V_1 \rangle = \langle \xi_2 V_2 \rangle \equiv 0$ и $\langle V_{1(2)} F_{b1(2)} \rangle = vT$, где $T \equiv T_{1(2)} = M(V_{1(2)}^2)$ – кинетическая температура частиц (удвоенная кинетическая энергия их стохастического движения). Тогда уравнения для корреляторов скоростей и смещений частиц можно представить в виде [32, 33]

$$-a_{1(2)} \langle (\xi_{1(2)})^2 \rangle + b \langle \xi_1 \xi_2 \rangle + T/M = 0, \quad (3а)$$

$$\begin{aligned} -v \langle V_{1(2)} \xi_{2(1)} \rangle - a_{1(2)} \langle \xi_1 \xi_2 \rangle + \\ + b \langle (\xi_{2(1)})^2 \rangle + \langle V_1 V_2 \rangle = 0, \end{aligned} \quad (3б)$$

$$-2v \langle V_1 V_2 \rangle - a_1 \langle \xi_1 V_2 \rangle - a_2 \langle \xi_2 V_1 \rangle = 0. \quad (3в)$$

Решение системы уравнений (3а), (3б) дает соотношения для корреляторов скоростей и смещений частиц: $\langle V_1 V_2 \rangle = 0$, $\langle \xi_2 V_1 \rangle = -\langle \xi_1 V_2 \rangle \equiv 0$ и

$$\langle \xi_{1(2)}^2 \rangle = \frac{a_{2(1)} T}{(a_1 a_2 - b^2) M}. \quad (4)$$

Перейдем к определению спектральных характеристик рассматриваемой системы. При вычислениях спектральной плотности обычно используют преобразование Фурье для среднеквадратичного отклонения частиц от их начального положения $\langle (\xi_{1(2)}(t) - \xi_{1(2)}(0))^2 \rangle_t$, где угловые скобки $\langle \dots \rangle_t$ описывают усреднение по всем отрезкам времени, равным t [23–25].

Корни характеристического уравнения для задачи (2а), (2б) можно записать в виде

$$\lambda_{1,2} = -v/2 \pm (v^2/4 - \omega_1^2)^{1/2}, \quad (5а)$$

$$\lambda_{3,4} = -v/2 \pm (v^2/4 - \omega_2^2)^{1/2}, \quad (5б)$$

где $\omega_1^2 = (a_1 + a_2)/2 - d$, $\omega_2^2 = (a_1 + a_2)/2 + d$, где $d = ((a_1 - a_2)^2/4 + b^2)^{1/2}$. (Отметим, что в случае $a_1 = a_2$ процедуру определения характерных частот $\omega_{1(2)}$ в реальных экспериментах можно упростить, принимая во внимание, что данные частоты определяют взаимные, $\eta_1 = (\xi_1 - \xi_2)$, и суммарные, $\eta_2 = (\xi_1 + \xi_2)$, смещения двух частиц [28].)

Тогда любое решение $F(t)$ для задачи (2а), (2б) можно представить в виде суперпозиции

$$F(t) = C_0 + \sum_{i=1}^4 C_i \exp(\lambda_i t), \quad (6)$$

где коэффициенты C_0 и C_i определяются граничными условиями (что включает начальные условия при $t = 0$ и условия при $t \rightarrow \infty$). Коэффициенты C_0 и C_i даны в Приложении. Фурье-преобразование для этого случая дает для спектральной плотности смещений частиц, $G_{1(2)} = G_{1(2)}(\omega)$, соотношение

$$G_{1(2)} = \frac{2vT/M\{(\omega^2 + a_{2(1)})^2 + v^2\omega^2 + b^2\}}{\{\omega^4 + (v^2 - 2\omega_1^2)\omega^2 + \omega_1^4\}\{\omega^4 + (v^2 - 2\omega_2^2)\omega^2 + \omega_2^4\}}. \quad (7)$$

Решение (7) может быть представлено в виде суперпозиции спектральных плотностей для двух классических осцилляторов $S_i = S_i(\omega, \omega_i, v)$

$$G_{1(2)} = A_{1(2)} \frac{2\nu T/M}{\{\omega^4 + (\nu^2 - 2\omega_1^2)\omega^2 + \omega_1^4\}} + A_{2(1)} \frac{2\nu T/M}{\{\omega^4 + (\nu^2 - 2\omega_2^2)\omega^2 + \omega_2^4\}} \equiv A_{1(2)}S_1 + A_{2(1)}S_2, \quad (8)$$

где $A_1 = 0.5 + (a_1 - a_2)/4d$, $A_2 = 0.5 - (a_1 - a_2)/4d$. Легко заметить, что $(G_1 + G_2) \equiv (S_1 + S_2)$. В случае двух идентичных частиц $G_1(\omega) \equiv G_2(\omega) = G(\omega)$ будет

$$G(\omega) = \sum_{i=1}^2 \frac{\nu T/M}{\{\omega^4 + (\nu^2 - 2\omega_i^2)\omega^2 + \omega_i^4\}} \equiv \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} S_i. \quad (9)$$

В случае одной частицы ($N = 1$) в ловушке получим формулу для простого классического осциллятора с

$$G_1(\omega) = \frac{2\nu T/M}{\{\omega^4 + (\nu^2 - 2\omega_1^2)\omega^2 + \omega_1^4\}}, \quad (10)$$

где $\omega_1^2 = (\omega_i^{z(r)})^2 \equiv Q\beta^{z(r)}/M$.

В общем случае процедуру вычисления спектральной плотности каждой из частиц в ограниченной цепочке $G_j(\omega)$ ($j = 1, 2, \dots, N$) можно свести к определению суперпозиции спектральных плотностей $S_k = S_k(\omega, \omega_i, \nu)$ для отдельных гармоник системы ω_k

$$G_j(\omega) = \sum_{k=1}^N A_k \frac{2\nu T/M}{\{\omega^4 + (\nu^2 - 2\omega_k^2)\omega^2 + \omega_k^4\}} \equiv \sum_{k=1}^N A_k S_k, \quad (11)$$

где A_k – некоторые коэффициенты, а N – число частиц.

Нормированные спектральные плотности $G^*(\omega) = G(\omega)/B$, $S_1^*(\omega) = S_1(\omega)/B$ и $S_2^*(\omega) = S_2(\omega)/B$ смещений в вертикальном и в радиальном направлениях для двух идентичных частиц с кулоновским взаимодействием показаны на рис. 2а, 2б при $\beta^r/\beta^z = 4$ и $\nu = 5 \text{ c}^{-1}$, когда $\omega_i^z/\nu = 2$, а $\omega_i^r/\nu = 4$. Здесь $B = 2T/(\omega_i^2\nu M)$, а $\omega_i = \omega_i^{z(r)} \equiv (Q\beta^{z(r)}/M)^{1/2}$ – частота ловушки. Следует отметить, что при $(\omega_i/\nu)^2 \gg 1$ максимум спектральных функций $G(\omega)$, $S_1(\omega)$, $S_2(\omega)$ хорошо соответствует аналитическим значениям ω_i/ν . С уменьшением отношения ω_i/ν (например, с ростом коэффициента трения ν) максимум упомянутых функций смещается в сторону более низких частот [23, 28], см. рис. 3а, 3б.

Далее мы рассмотрим спектральные характеристики для случая трех ($N = 3$), четырех ($N = 4$) и пяти ($N = 5$) идентичных частиц ($Q_i = Q$), взаимодействующих с произвольной силой $F_{ij} = F(l_{ij})$ в линейном электрическом поле $E(r, z)$ ловушки с цилиндрической симметрией (см. рис. 4); здесь $i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, N$ и $i \neq j$. В силу симметрии задачи относительно центра ловушки для систем идентичных частиц функции $G_j(\omega)$ и $G_i(\omega)$ для частиц j и i , находящихся на одинаковом расстоянии от центра структуры (рис. 4), равны.

Выбор параметров для иллюстрации расчетов опирается на демонстрацию зависимости результатов от коэффициента трения частиц и величины радиального градиента, ограничивающего их движение в цепочечной структуре.

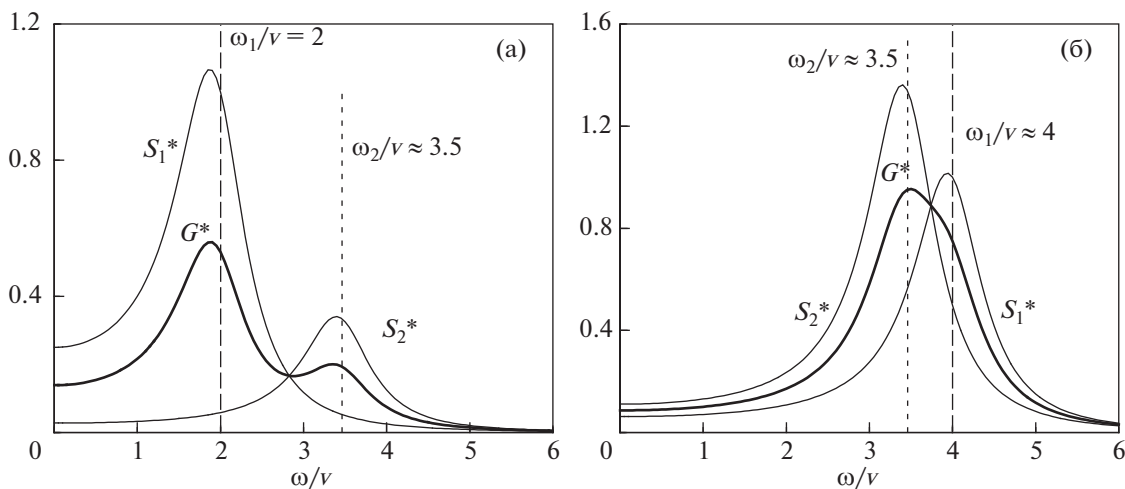


Рис. 2. Функции $G^*(\omega)$, $S_1^*(\omega)$ и $S_2^*(\omega)$ для вертикального (а) и радиального (б) направлений смещения частиц при $\beta^r/\beta^z = 4$, $\nu = 5 \text{ c}^{-1}$, $\omega_i^z/\nu = 2$ и $\omega_i^r/\nu = 4$.

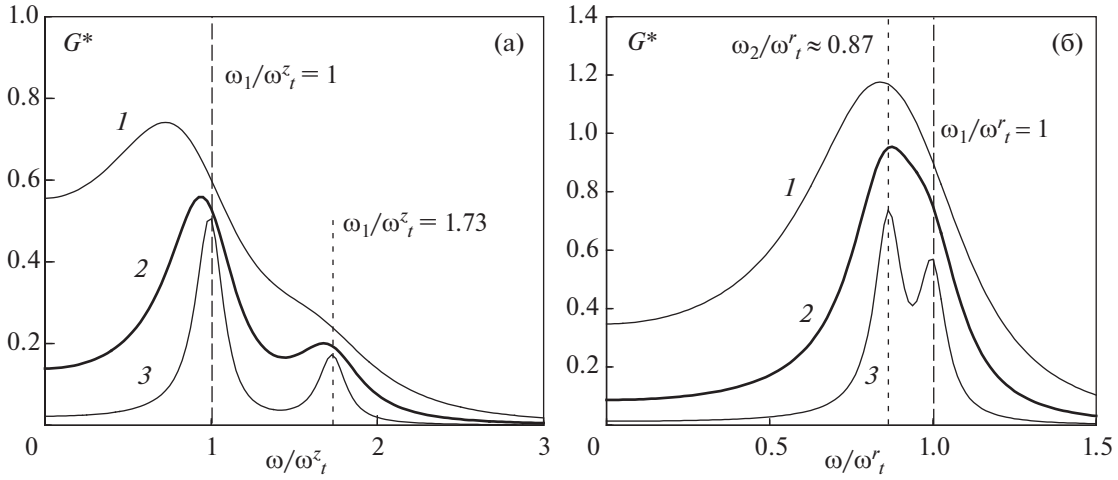


Рис. 3. Функции $G^*(\omega)$ для вертикального (а) и радиального (б) направлений смещения частиц при $\beta^r/\beta^z = 4$, $\omega_t^z = 10 \text{ c}^{-1}$ и $\omega_t^r = 20 \text{ c}^{-1}$ и коэффициентах трения ν : 1 – 10 c^{-1} ; 2 – 5 c^{-1} ; 3 – 2 c^{-1} .

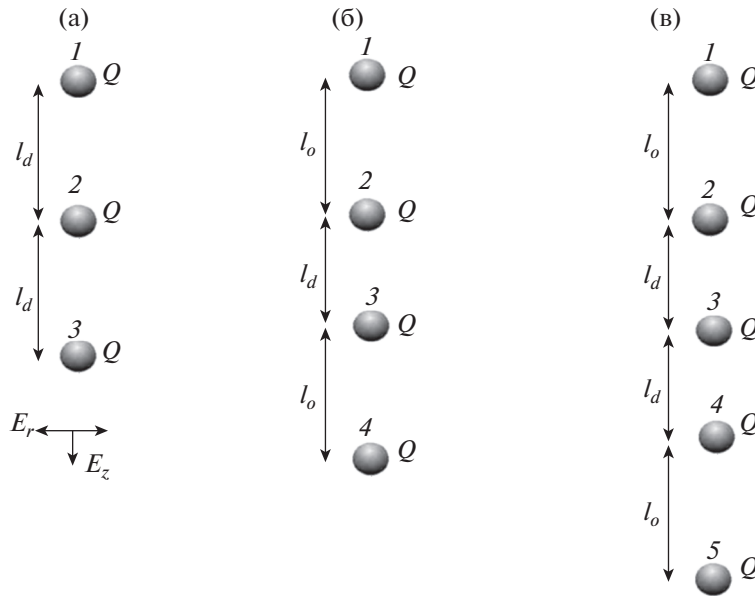


Рис. 4. Вертикальная конфигурация трех (а), четырех (б) и пяти (в) взаимодействующих частиц в электрическом поле ловушки $E = E(z, r)$ с цилиндрической симметрией.

2.3. Три частицы

Обратимся к случаю трех идентичных частиц ($N = 3$), рис. 4а. В состоянии равновесия средние расстояния между двумя ближайшими частицами равны $l_{12} = l_{23} \equiv l_d$, а уравнение баланса сил дает $Q\beta_z l_d = F_{12} + F_{13}$, где $F_{12} = F_{23} \equiv F$. Исследование динамики таких частиц в цепочечной структуре сводится к анализу системы уравнений движения (1) для $i = 1, 2, 3$.

Для поиска спектральных характеристик выполним замену переменных: $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$; $\eta_2 = \xi_1 - \xi_3$; $\eta_3 = 2\xi_2 - (\xi_1 + \xi_3)$. (Здесь для вертикальных смещений частиц в цепочке $-\xi_i = z_i$, а для их радиальных смещений $-\xi_i = r_i$.) С учетом указанной замены переменных преобразуем систему уравнений движения (1) к виду

$$d^2\eta_1/dt^2 = -\nu d\eta_1/dt - (Q\beta/M)\eta_1, \tag{12a}$$

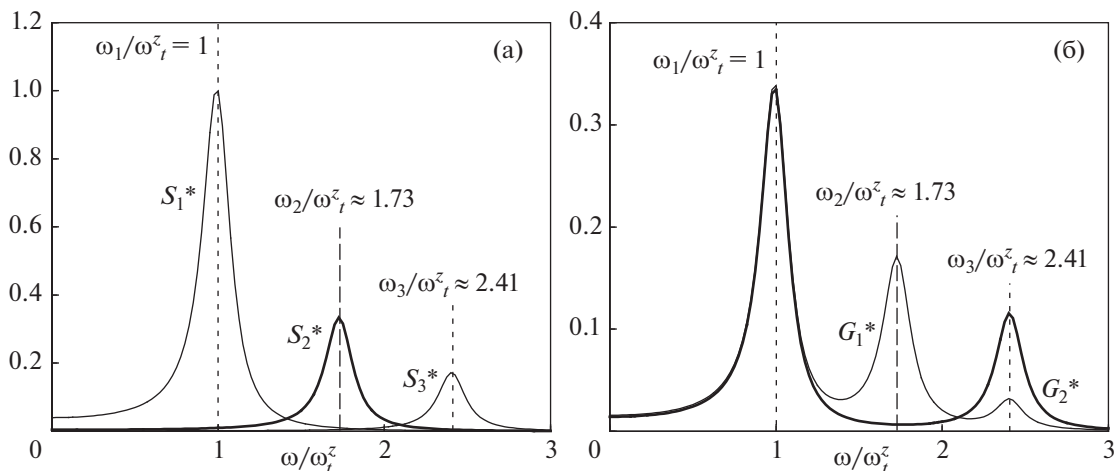


Рис. 5. Функции $S_i^*(\omega)$ (рисунок а) и $G_i^*(\omega)$ (б) для вертикальных смещений частиц при $\beta^r/\beta^z = 4$, $\omega_l^z = 10 \text{ c}^{-1}$ и $\nu = 2 \text{ c}^{-1}$.

$$d^2\eta_2/dt^2 = -\nu d\eta_2/dt - (Q\beta/M - b_{12} - 2b_{13})\eta_2, \quad (12б)$$

$$d^2\eta_3/dt^2 = -\nu d\eta_3/dt - (Q\beta/M - 3b_{12})\eta_3. \quad (12в)$$

Рассматриваемая система имеет по три характерных частоты движений в вертикальном и радиальном направлениях, соответственно: $\omega_1^2 = (Q\beta/M)$; $\omega_2^2 = (Q\beta/M - b_{12} - 2b_{13})$; $\omega_3^2 = (Q\beta/M - 3b_{12})$. При этом в случае вертикальных смещений частиц от их положения равновесия имеем $\beta = \beta^z$, $b_{12} = F'_{12} \equiv F'_{23} = F$, $b_{13} = F'_{13}$, где F – первая производная силы взаимодействия F в точке l_d и F'_{13} – первая производная силы взаимодействия F_{13} в точке $l_{13} \equiv 2l_d$. Для радиальных смещений частиц будет $\beta = \beta^r$, $b_{12} = F/l_d$, $b_{13} = F_{13}/2l_d$. (Для систем с кулоновским взаимодействием $F = Q^2/l_d^2$, $F_{13} = Q^2/4l_d^2$, $F'_{12} = -2Q^2/l_d^3$, $F'_{13} = -Q^2/4l_d^3$.)

Решение системы (12а)–(12в) для $\langle \eta_k^2 \rangle$ ($k = 1, 2, 3$) с учетом $\langle \xi_i \xi_j \rangle = 0$ при $i \neq j$ дает для спектральной плотности смещений частиц

$$G_2(\omega) = (S_1 + 2S_3)/3, \quad (13а)$$

$$G_1(\omega) \equiv G_3(\omega) = (2G_2(\omega) - S_3 + S_2)/2, \quad (13б)$$

где S_k – плотность классического осциллятора с частотой ω_k .

Отметим, что спектральная плотность для смещений η_k является фурье-преобразованием функций $\langle \eta_k^2 \rangle_t$ и соответствует $S_{\eta k} = D_k S_k$, здесь угловые скобки $\langle \dots \rangle_t$ описывают усреднение по всем отрезкам времени равным t , а коэффициент D_k определяется суммарной температурой частиц, входящих в данный коррелятор. Так, для η_1 величина $D_1 = 3$, для η_2 будет $D_2 = 2$, а для η_3 – $D_3 = 6$.

Для системы из трех идентичных частиц с кулоновским взаимодействием нормированные спектральные плотности $G_i^*(\omega) = G_i(\omega)/B$ и $S_i^*(\omega) = S_i(\omega)/B$ смещений в вертикальном и в радиальном направлениях представлены на рис. 5а, 5б и рис. 6а, 6б, соответственно, при $\nu = 2 \text{ c}^{-1}$ и $\beta^r/\beta^z = 4$. Здесь $B = 2T/(\omega_l^2 \nu M)$, а $\omega_l = \omega_l^{z(r)} \equiv (Q\beta^{z(r)}/M)^{1/2}$ – частота ловушки.

Отметим, что рассматриваемая вертикальная конфигурация из трех частиц может терять устойчивость только при их радиальных смещениях от положения равновесия, см. (12а)–(12в). Условия устойчивости для такой системы можно записать как [31]

$$Q\beta^r/3 > b_{12} \equiv F/l_d = Q\beta^z F_{12}/(F_{12} + F_{13}). \quad (14)$$

2.4. Четыре частицы

Уравнения баланса сил для вертикальной конфигурации четырех частиц ($N = 4$), рис. 4б, можно записать в виде системы двух уравнений

$$Q\beta^z(2l_o + l_d) = 2F_{s2}, \quad (15а)$$

$$Q\beta^z l_d = 2F_{s1}, \quad (15б)$$

где l_d – среднее расстояние между двумя центральными частицами, а l_o – среднее расстояние между двумя частицами на периферии. Здесь $F_{s1} \equiv F_{23} + F_{24} - F_{12} \equiv F_{23} + F_{13} - F_{34}$, $F_{s2} \equiv F_{13} + F_{14} + F_{12} \equiv F_{34} + F_{14} + F_{24}$, поскольку цепочка симметрична относительно центра системы. Совместное решение уравнений (15а), (15б) позволяет найти отношение l_o/l_d и величину равновесного градиента β^z электрического поля ловушки. Для систем с ку-

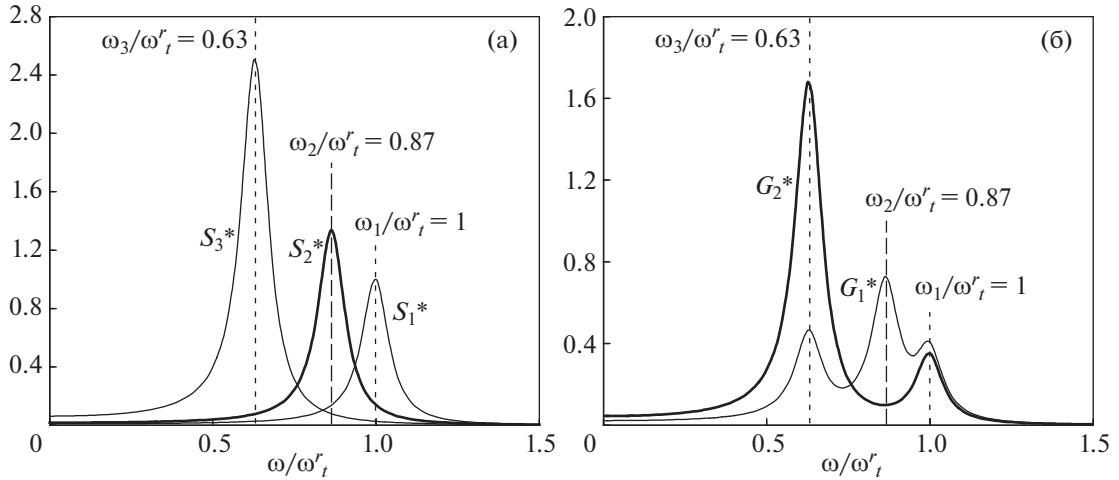


Рис. 6. Функции $S_i^*(\omega)$ (а) и $G_i^*(\omega)$ (б) для радиальных смещений частиц при $\beta^r/\beta^z = 4$, $\omega_t^r = 20 \text{ с}^{-1}$ и $\nu = 2 \text{ с}^{-1}$.

лоновским взаимодействием: $F_{14} = \frac{Q^2}{(l_d + 2l_o)^2}$; $F_{23} = \frac{Q^2}{l_d^2}$; $F_{24} = F_{13} = \frac{Q^2}{(l_d + l_o)^2}$; $F_{12} = F_{34} = \frac{Q^2}{l_o^2}$. Критерий устойчивости такой системы приведен в работе [31].

Исследование динамики четырех частиц в цепочечной структуре сводится к анализу системы уравнений (1) для $i = 1, 2, 3, 4$. Для отыскания спектральных характеристик выполним замену переменных: $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4$; $\eta_2 = (\xi_1 + \xi_4) - (\xi_2 + \xi_3)$; $\eta_3 = \xi_1 - \xi_4$; $\eta_4 = \xi_2 - \xi_3$. (Для вертикальных смещений частиц в цепочке — $\xi_i = z_i$, а для их радиальных смещений — $\xi_i = r_i$.) С учетом указанной замены преобразуем систему уравнений движения (1) к виду

$$d^2\eta_1/dt^2 = -\nu d\eta_1/dt - Q\beta/M\eta_1, \quad (16a)$$

$$d^2\eta_2/dt^2 = -\nu d\eta_2/dt - (Q\beta/M - 2(b_{12} + b_{13}))\eta_2. \quad (16б)$$

$$d^2\eta_3/dt^2 = -\nu d\eta_3/dt - (Q\beta/M - 2b_{14} - b_{12} - b_{13})\eta_3 + (b_{13} - b_{12})\eta_4, \quad (16в)$$

$$d^2\eta_4/dt^2 = -\nu d\eta_4/dt - (Q\beta/M - 2b_{23} - b_{12} - b_{13})\eta_4 + (b_{13} - b_{12})\eta_3. \quad (16г)$$

Рассматриваемая система имеет по четыре характерных частоты смещений в вертикальном и радиальном направлениях, соответственно: $\omega_1^2 = (Q\beta/M)$; $\omega_2^2 = (Q\beta/M - 2(b_{12} + b_{13}))$; $\omega_3^2 = (Q\beta/M - b_{14} - b_{23} - b_{12} - b_{13}) - d$; $\omega_4^2 = (Q\beta/M - b_{14} - b_{23} - b_{12} - b_{13}) + d$, где $d = \{(b_{14} - b_{23})^2 + (b_{13} -$

$b_{12})^2\}^{1/2}$. При этом в случае вертикальных смещений частиц от их положения равновесия: $\beta = \beta^z$, $b_{12} = F'_{12}$, $b_{13} = F'_{13}$, $b_{14} = F'_{14}$, $b_{23} = F'_{23}$, где F' — первая производная соответствующей силы взаимодействия; а в случае радиальных смещений частиц: $\beta = \beta^r$, $b_{12} = F_{12}/l_o$, $b_{13} = F_{13}/(l_d + l_o)$, $b_{14} = F_{14}/(l_d + 2l_o)$, $b_{23} = F_{23}/l_d$.

Решение системы (16а)–(16г) дает для спектральной плотности смещений частиц выражения

$$G_1(\omega) \equiv G_4(\omega) = ((S_1 + S_2)/2 + A_1S_3 + A_2S_4)/2, \quad (17a)$$

$$G_2(\omega) \equiv G_3(\omega) = ((S_1 + S_2)/2 + A_2S_3 + A_1S_4)/2, \quad (17б)$$

где S_k — плотность классического осциллятора с частотой ω_k , а $A_1 = 0.5 + (b_{23} - b_{14})/4d$, $A_2 = 0.5 - (b_{23} - b_{14})/4d$. (Для решения уравнений (16в), (16г) см. соотношение (8).)

Для системы из четырех идентичных частиц с кулоновским взаимодействием нормированные спектральные плотности $G_i^*(\omega) = G_i(\omega)/B$ и $S_i^*(\omega) = S_i(\omega)/B$ смещений в вертикальном и в радиальном направлениях представлены на рис. 7а, 7б и рис. 8а, 8б, соответственно, при $\nu = 5 \text{ с}^{-1}$ и $\beta^r/\beta^z = 9$. Здесь $B = 2T/(\omega_t^2 \nu M)$, а $\omega_t = \omega_t^{z(r)} \equiv (Q\beta^{z(r)}/M)^{1/2}$ — частота ловушки.

Отметим, что с ростом коэффициента трения, ν , или радиальной частоты ловушки, ω_t^r , экспериментальный анализ спектра частот для отдельных частиц с целью определения основных характеристик системы (ω_k, ν) становится затруднительным, см. рис. 3, 7б, 8б. Тем не менее, измерение характерных смещений η_k в системе частиц позволяет без особого труда определить и коэффициент трения частиц ν , и основные гармоники си-

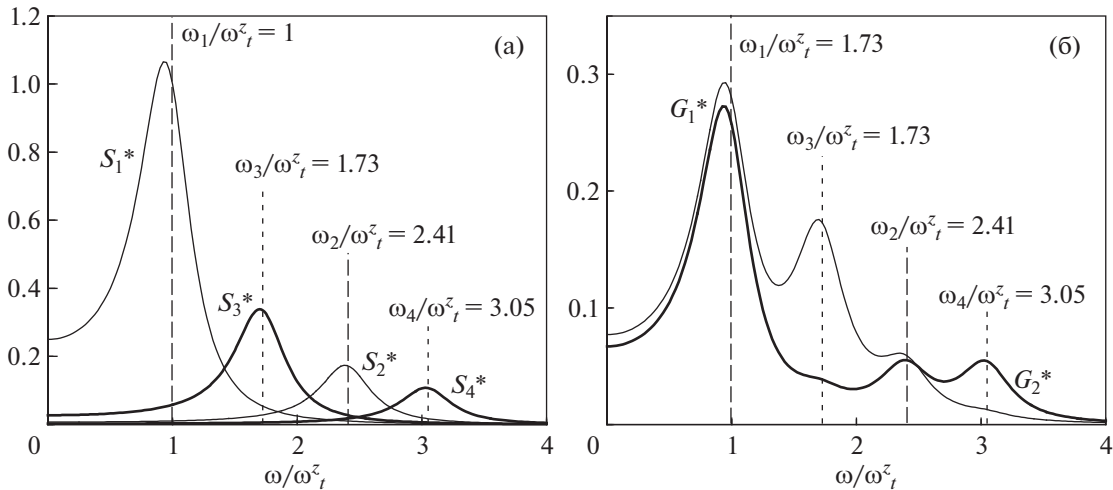


Рис. 7. Функции $S_i^*(\omega)$ (а) и $G_i^*(\omega)$ (б) для вертикальных смещений частиц при $\beta^r/\beta^z = 9$, $\omega_t^z = 10 \text{ c}^{-1}$ и $\nu = 5 \text{ c}^{-1}$.

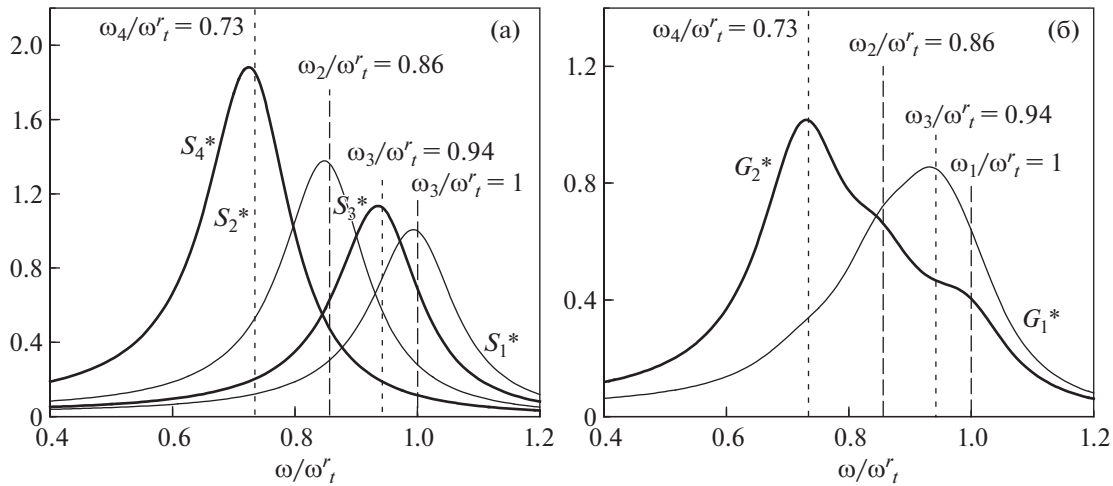


Рис. 8. Функции $S_i^*(\omega)$ (а) и $G_i^*(\omega)$ (б) для радиальных смещений частиц при $\beta^r/\beta^z = 9$, $\omega_t^r = 30 \text{ c}^{-1}$ и $\nu = 5 \text{ c}^{-1}$.

стемы ω_k , величина которых непосредственно связана с потенциалом взаимодействия частиц. Спектральные плотности $S_{\eta k}(\omega)$ для рассматриваемых смещений η_k ($k = 1-4$) связаны с функцией $S_k(\omega)$ соотношениями $S_{\eta k} = 4S_k$ для $k = 1, 2$; а сумма спектральных плотностей $S_{\eta 3} + S_{\eta 4} \equiv S_3 + S_4$, см. рис. 9.

2.5. Пять частиц

Уравнения баланса сил для вертикальной конфигурации пяти частиц ($N = 5$), рис. 4в, можно записать как систему двух уравнений

$$Q\beta^z(l_o + l_d) = F_{s2}, \tag{18a}$$

$$Q\beta^z l_d = F_{s1}, \tag{18б}$$

где $l_d = l_{23} \equiv l_{34}$ – среднее расстояние между центральными частицами системы, а $l_o = l_{12} \equiv l_{45}$ – среднее расстояние между двумя частицами на периферии. Здесь $F_{s1} \equiv F_{23} + F_{24} + F_{25} - F_{12}$, $F_{s2} \equiv F_{12} + F_{13} + F_{14} + F_{15}$. Совместное решение уравнений (18а), (18б) позволяет найти и отношение l_o/l_d , и величину равновесного градиента β^z электрического поля ловушки. Для систем с кулоновским взаимодействием между частицами величина $F_{12} = \frac{Q^2}{l_o^2}$; $F_{13} = \frac{Q^2}{(l_d + l_o)^2}$; $F_{14} \equiv F_{25} = \frac{Q^2}{(2l_d + l_o)^2}$; $F_{15} = \frac{Q^2}{(2l_d + 2l_o)^2}$; $F_{23} = \frac{Q^2}{l_d^2}$; $F_{24} = \frac{Q^2}{4l_d^2}$. (Критерий устойчивости такой системы см. в работе [31].)

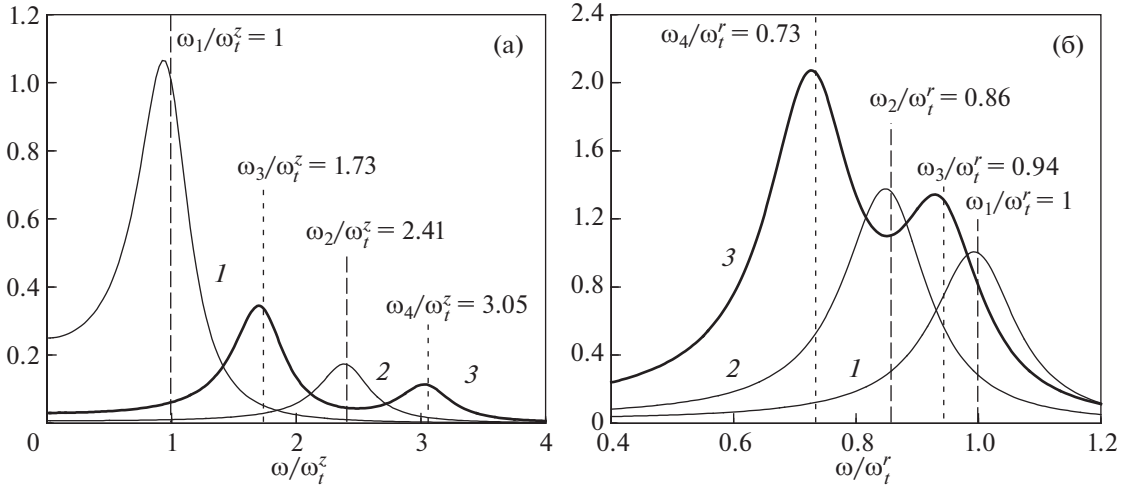


Рис. 9. Нормированные функции $S_{\eta_k}^*(\omega) = S_{\eta_k}(\omega)/B$ для вертикальных (а) и радиальных (б) смещений частиц: 1 – $S_{\eta_1}^*/4 = S_1^*$; 2 – $S_{\eta_2}^*/4 = S_2^*$; 3 – $S_{\eta_3}^* + S_{\eta_4}^* \equiv S_3^* + S_4^*$. Здесь $B = 2T/(\omega_t^2 \nu M)$, где $\omega_t = \omega_t^{z(r)} \equiv (Q\beta^{z(r)}/M)^{1/2}$.

Исследование динамики пяти частиц в цепочечной структуре сводится к анализу системы уравнений (1) с $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Для нахождения спектральных характеристик выполним замену переменных: $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \xi_5$; $\eta_2 = \xi_1 - \xi_5$; $\eta_3 = \xi_2 - \xi_4$; $\eta_4 = 2\xi_3 - (\xi_1 + \xi_5)$; $\eta_5 = 2\xi_3 - (\xi_2 + \xi_4)$. (Для вертикальных смещений частиц в цепочке – $\xi_i = z_i$, а для радиальных смещений – $\xi_i = r_i$.) С учетом указанной замены преобразуем систему уравнений движения (1) к

$$d^2\eta_1/dt^2 = -\nu d\eta_1/dt - Q\beta/M\eta_1, \quad (19a)$$

$$d^2\eta_2/dt^2 = -\nu d\eta_2/dt - (Q\beta/M - 2b_{15} - b_{12} - b_{13} - b_{14})\eta_2 + (b_{14} - b_{12})\eta_3, \quad (19б)$$

$$d^2\eta_3/dt^2 = -\nu d\eta_3/dt - (Q\beta/M - 2b_{24} - b_{12} - b_{13} - b_{14})\eta_3 + (b_{14} - b_{12})\eta_2. \quad (19в)$$

$$d^2\eta_4/dt^2 = -\nu d\eta_4/dt - (Q\beta/M - 3b_{13} - b_{12} - b_{14})\eta_4 + (2b_{23} - b_{12} - b_{14})\eta_5, \quad (19г)$$

$$d^2\eta_5/dt^2 = -\nu d\eta_5/dt - (Q\beta/M - 3b_{23} - b_{12} - b_{14})\eta_5 + (2b_{13} - b_{12} - b_{14})\eta_4. \quad (19д)$$

Рассматриваемая система имеет по пять характерных частот движений в вертикальном и радиальном направлениях, соответственно: $\omega_1^2 = (Q\beta/M)$; $\omega_2^2 = c_1 + d_1$; $\omega_3^2 = c_1 - d_1$; $\omega_4^2 = c_2 - d_2$;

$\omega_5^2 = c_2 + d_2$. Здесь $c_1 = Q\beta/M - b_{14} - b_{15} - b_{24} - b_{12} - (b_{13} + b_{23})/2$, $c_2 = Q\beta/M - b_{12} - b_{14} - 3(b_{13} + b_{23})/2$, $d_1 = \{(b_{13} + 2b_{13} - b_{23} - 2b_{24})^2/4 + (b_{14} - b_{12})^2\}^{1/2}$, $d_2 = \{9(b_{13} - b_{23})^2/4 + (2b_{23} - b_{12} - b_{14})(2b_{13} - b_{12} - b_{14})\}^{1/2}$. В случае вертикальных смещений частиц от их положения равновесия: $\beta = \beta^z$, $b_{12} = F'_{12}$, $b_{13} = F'_{13}$, $b_{14} = F'_{14}$, $b_{15} = F'_{15}$, $b_{23} = F'_{23}$, $b_{24} = F'_{24}$, где F' – первая производная соответствующей силы взаимодействия. А для радиальных смещений частиц: $\beta = \beta^r$, $b_{12} = F_{12}/l_o$, $b_{13} = F_{13}/(l_d + l_o)$, $b_{14} = F_{14}/(2l_d + l_o)$, $b_{15} = F_{15}/(2l_d + 2l_o)$, $b_{23} = F_{23}/l_d$, $b_{24} = F_{24}/4l_d$.

Нормированные спектральные плотности $S_i^*(\omega) = S_i(\omega)/B$ для системы из пяти идентичных частиц с кулоновским взаимодействием в вертикальном и в радиальном направлениях показаны на рис. 10а и рис. 10б, соответственно, при $\nu = 2\text{ с}^{-1}$ и $\beta^r/\beta^z = 16$. Здесь $B = 2T/(\omega_t^2 \nu M)$, а $\omega_t = \omega_t^{z(r)} \equiv (Q\beta^{z(r)}/M)^{1/2}$ – частота ловушки. Еще раз подчеркнем, что измерение смещений η_k в ходе реальных экспериментов с последующим вычислением их спектральных плотностей, $S_{\eta_k}(\omega)$, позволяет определить и коэффициент трения частиц, ν , и основные гармоники системы, ω_k .

Для систем идентичных частиц с кулоновским взаимодействием в цепочечных структурах, состоящих из $N \leq 5$ частиц, квадрат характерных частот частиц, ω_k^2 , для их вертикальных смещений при $\omega_t^z = 10\text{ с}^{-1}$ представлен в табл. 1, а для радиальных смещений частиц при $\omega_t^r = 30\text{ с}^{-1}$ – в табл. 2. Легко увидеть, что значения характерных

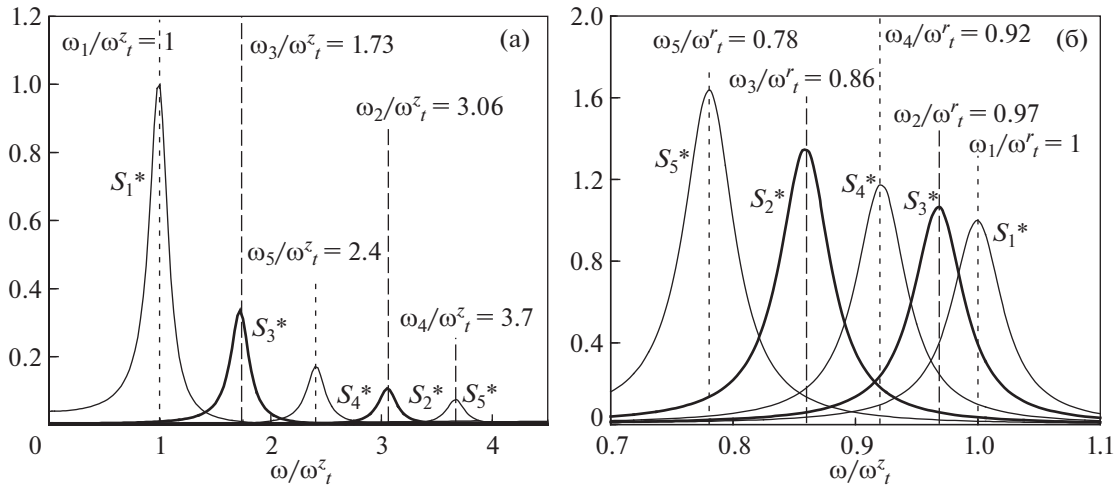


Рис. 10. Функции $S_i^*(\omega)$ для вертикальных (а) и радиальных (б) смещений частиц при $\beta^r/\beta^z = 16$, $\omega_t^z = 10 \text{ c}^{-1}$, $\omega_t^r = 40 \text{ c}^{-1}$ и $\nu = 2 \text{ c}^{-1}$.

частот, ω_k , наблюдаемых в рассматриваемых системах, близки по величине. (Данные о характерных частотах для заряженных частиц в бесконечной цепочке и для случая бесконечного пылевого кристалла приведены в [20, 34].)

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлены результаты исследования спектральных характеристик стохастического движения для малоразмерных цепочечных структур (состоящих из нескольких частиц, взаимодействующих с произвольным попарным потенциалом) в анизотропном электрическом поле ловушки. Приведены соотношения для спектральной плотности смещений частиц в таких системах. Рассмотрены характерные частоты частиц и способ их аналитического вычисления.

Отметим, что значение характерных частот, ω_k , в системе из любого количества N взаимодей-

ствующих частиц равной массы и размеров можно получить численно путем определения корней характеристического уравнения для системы линейных дифференциальных уравнений (1). При этом как коэффициент трения частиц, ν , так и частоту ловушки $\omega_t = \omega_t^{z(r)} \equiv (Q\beta^{z(r)}/M)^{1/2}$ (а, соответственно, и величину градиентов внешнего поля, β^z и β^r) в реальном эксперименте легко определить из измерений спектральной плотности для суммарных смещений частиц, $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N$, которые пропорциональны смещению центра масс анализируемой системы. Для определения других гармоник системы, $\omega_k \neq \omega_t$, можно использовать как измерения спектральных плотностей для отдельных частиц $G_i(\omega)$, так и измерения спектральных плотностей для их взаимных смещений $(\xi_i - \xi_j)$; здесь $i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, N$ и $i \neq j$. Последняя процедура является предпочтительней, поскольку с ростом коэффициента трения частиц, ν , или радиальной частоты ловушки, ω_t^r , экспериментальный анализ спектра частот для отдельных частиц, $G_i(\omega)$, становится затруднительным. Добавим также, что измерение вертикальных и радиальных смещений в цепочке заряженных частиц дает информацию о силах межчастичного взаимодействия $F_{ij} = F(l_{ij})$ и их производных F'_{ij} , что, в свою очередь, позволяет определить характер и тип потенциала взаимодействия между частицами системы.

Результаты настоящей работы применимы для систем при любом типе попарных взаимодействий, а также могут быть адаптированы к случаю непопарных (невзаимных) потенциалов. Полученные результаты могут быть полезны для разра-

Таблица 1. Квадрат характерных частот, ω_k^2 , по мере их возрастания, в цепочечных структурах, состоящих из N частиц, для вертикальных смещений частиц при $\omega_t^z = 10 \text{ c}^{-1}$

Число частиц, N	Квадрат характерных частот частиц, ω_k^2 (c^{-2}), по мере их возрастания				
	1	100			
2	100	300			
3	100	300	580		
4	100	301.24	580.99	930.96	
5	100	298.5	581.77	934.71	1347.48

Таблица 2. Квадрат характерных частот, ω_k^2 , по мере их убывания, в цепочечных структурах, состоящих из N частиц, для радиальных смещений частиц при $\omega_l^r = = 30 \text{ с}^{-1}$

Число частиц, N	Квадрат характерных частот частиц, ω_k^2 (с^{-2}), по мере их убывания				
	1	900			
2	900	800			
3	900	800	660		
4	900	799.38	659.5	484.52	
5	900	800.75	659.12	482.64	276.26

ботки новых методов диагностики физических свойств пылевой плазмы.

Работа была частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 18-38-20175), а также Программой президиума РАН.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В разложении (6) величина $C_0 \equiv A_1 = 2\langle \xi_{i(2)}^2 \rangle$, см. формулу (4) и [6, 23]. Для поиска коэффициентов C_i ($i = 1, 2, 3, 4$) используются начальные условия задачи: $F(0) = 0$, $dF(0)/dt = 0$, $d^2F(0)/dt^2 \equiv A_2 = = 2T/M$, $d^3F(0)/dt^3 \equiv A_3 = 2\nu T/M$ [6, 23]. Тогда для коэффициентов C_i имеем систему уравнений

$$\sum_{i=1}^4 C_i = -A_1, \quad (\text{П1})$$

$$\sum_{i=1}^4 \lambda_i C_i = 0, \quad (\text{П2})$$

$$\sum_{i=1}^4 \lambda_i^2 C_i = A_2, \quad (\text{П3})$$

$$\sum_{i=1}^4 \lambda_i^3 C_i = -A_3. \quad (\text{П4})$$

Откуда

$$C_1 = -\frac{A_3 + A_2(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) - A_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)}, \quad (\text{П5})$$

$$C_2 = \frac{A_3 + A_2(\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4) - A_1\lambda_1\lambda_3\lambda_4}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)}, \quad (\text{П6})$$

$$C_3 = -\frac{A_3 + A_2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4) - A_1\lambda_1\lambda_2\lambda_4}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_4)}, \quad (\text{П7})$$

$$C_4 = \frac{A_3 + A_2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - A_1\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_4)}. \quad (\text{П8})$$

С учетом корней характеристического уравнения (5а), (5б) систему (П5) – (П8) можно записать как

$$C_1 = -\frac{\lambda_2(A_2 - A_1\omega_2^2)}{2(\lambda_1 - \lambda_2)d}, \quad (\text{П9})$$

$$C_2 = \frac{\lambda_1(A_2 - A_1\omega_2^2)}{2(\lambda_1 - \lambda_2)d}, \quad (\text{П10})$$

$$C_3 = \frac{\lambda_4(A_2 - A_1\omega_1^2)}{2(\lambda_3 - \lambda_4)d}, \quad (\text{П11})$$

$$C_4 = -\frac{\lambda_3(A_2 - A_1\omega_1^2)}{2(\lambda_3 - \lambda_4)d}. \quad (\text{П12})$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ваулина О.С., Петров О.Ф., Фортвов В.Е., Храпак А.Г., Храпак С.А. Пылевая плазма (эксперимент и теория). М.: Физматлит, 2009.
2. Complex and Dusty Plasmas / Ed. by V.E. Fortov and G.E. Morfill. CRC Press, 2010.
3. Ivlev A., Morfill G., Lowen H., Royall C.P. Complex Plasmas and Colloidal Dispersions: Particle-Resolved Studies of Classical Liquids and Solids. Singapore: World Scientific, 2012.
4. Photon Correlation and Light Beating Spectroscopy / Ed. by H.Z. Cummins and E.R. Pike. New York: Plenum, 1974.
5. Pullman B. Intermolecular Interactions: From Diatomics to Biopolymers. Chichester: Wiley Interscience, 1978.
6. Овчинников А.А., Тимашев С.Ф., Белый А.А. Кинетика диффузионно-контролируемых химических процессов. М.: Химия, 1986.
7. Ваулина О.С., Адамович К.Г. // ЖЭТФ. 2008. Т. 133. С. 1091.
8. Ваулина О.С., Адамович К.Г., Петров О.Ф., Фортвов В.Е. // ЖЭТФ. 2008. Т. 134. С. 367.
9. Lysin E.A., Timirkhanov R.A., Vaulina O.S., Petrov O.F., Fortov V.E. // New J. Physics. 2013. V. 15. 053004.
10. Vaulina O.S., Lysin E.A. // Phys. Plasmas. 2009. V. 16. 113702.
11. Фортвов В.Е., Петров О.Ф., Ваулина О.С., Косс К.Г. // Письма в ЖЭТФ. 2013. Т. 97. С. 366.
12. Hebner G.A., Riley M.E., Greenberg K.E. // Phys. Rev. E. 2002. V. 66. 046407.
13. Vaulina O.S., Drangevski I.E. // Phys. Scripta. 2006. V. 73. P. 577.
14. Райзер Ю.П. Физика газового разряда. М.: Наука, 1987.
15. Juan W.-T., Huang Z.-H., Hsu J.-W., Lai Y.-J., I L. // Phys. Rev. E. 1998. V. 58. P. 6947.
16. Ishihara O., Kamimura T., Hirose K.I., Sato N. // Phys. Rev. E. 2002. V. 66. 046406.
17. Klindworth M., Melzer A., Piel A., Schweigert V.A. // Phys. Rev. B. 2000. V. 61. P. 8404.
18. Melzer A., Klindworth M., Piel A. // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 87. 115002.

19. *Ivlev A.V., Bartnick J., Heinen M., Du C.R., Nosenko V., Löwen H.* // Phys. Rev. X. 2015. V. 5. 011035.
20. *Ваулина О.С., Лисина И.И., Косс К.Г.* // Физика плазмы. 2013. Т. 39. С. 455.
21. *Lisina I.I., Vaulina O.S.* // EPL. 2003. V. 103. 55002.
22. *Mukhopadhyay A.K., Goree J.* // Phys. Rev. E. 2014. V. 90. 013102.
23. *Ваулина О.С., Саметов Э. А.* // ЖЭТФ. 2018. Т. 154. С. 407.
24. *Климонтович Ю.Л.* Статистическая физика. М.: Наука, 1982.
25. *Воронов А.А.* Теория автоматического управления. Часть 2. М.: Высшая школа, 1986.
26. *Лисин Е.А., Ваулина О.С.* // ЖЭТФ. 2012. Т. 142. С. 1077.
27. *Лисин Е.А., Ваулина О.С., Петров О.Ф.* // ЖЭТФ. 2017. Т. 151. С. 791.
28. *Саметов Э.А., Лисин Е.А., Ваулина О.С.* // ЖЭТФ. 2020.
29. *Ваулина О.С., Адамович К.Г., Дранжевский И.Е.* // Физика плазмы. 2005. Т. 31. С. 562.
30. *Vaulina O.S., Adamovich X.G., Vladimirov S.V.* // Phys. Scripta. 2009. V. 79. 035501.
31. *Ваулина О.С., Лисина И.И., Лисин Е.А.* // Физика плазмы. 2018. Т. 44. С. 229.
32. *Vaulina O.S.* // Phys. Plasmas. 2017. V. 24. 023705.
33. *Ваулина О.С.* // ЖЭТФ. 2017. Т. 151. С. 982.
34. *Игнатов А.М.* // Физика плазмы. 2017. Т. 43. С. 560.