ФИЗИКА ПЛАЗМЫ, 2020, том 46, № 6, с. 546–550

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ

УДК 533.951

О ЗАТУХАНИИ ПОПЕРЕЧНОЙ ИОННОЙ БЕРНШТЕЙНОВСКОЙ ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

© 2020 г. А. Ю. Попов*

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербург, Россия

**e-mail: a.popov@mail.ioffe.ru*

Поступила в редакцию 28.12.2019 г.
После доработки 27.01.2020 г.
Принята к публикации 27.01.2020 г.

Получено новое приближенное дисперсионное уравнение ионной бернштейновской волны, распространяющейся строго поперечно к внешнему неоднородному магнитному полю, с учетом эффекта центробежного и градиентного дрейфа ионов. С использованием этого уравнения показано, что при учете дрейфа ионов в высокотемпературной плазме резонансы на гармониках ионно-циклотронной частоты могут сильно перекрываться. В этом случае ионные бернштейновские волны оказываются сильно затухающими, несмотря на отсутствие продольной компоненты волнового вектора.

Ключевые слова: ионные бернштейновские волны, ионная восприимчивость плазмы

DOI: 10.31857/S0367292120060062

1. ВВЕДЕНИЕ

Существование ионных бернштейновских (ИБ) волн в магнитоактивной высокотемпературной плазме было предсказано независимо И. Бернштейном [1] и К.Н. Степановым [2] в конце 50-х гг. прошлого века. Эти волны представляют собой электростатические колебания с частотами, близкими к ионной циклотронной частоте и ее гармоникам, которые распространяются квазипоперечно к внешнему магнитному полю. Они часто наблюдаются в космической, ионосферной и лабораторной плазме. Описание распространения и затухания ИБ-волн является одной из традиционных задач в физике плазмы. Интерес к ней связан с исключительно большим разнообразием линейных и нелинейных волновых процессов, в которых эти волны принимают участие, а также с их большим прикладным значением для управляемого термоядерного синтеза. В частности, ИБ-волны, как правило, являются низкочастотным участником первичных и вторичных процессов при развитии низкопороговых распадных параметрических неустойчивостей СВЧ-волн [3–5]. Их поведение определяет уровень насыщения этих нелинейных явлений, развитие которых сопровождается ускорением ионов, аномальным рассеянием волн накачки, значительным уширением области энерговыделения и излучением на полуцелых гармониках частоты СВЧ-волны, что было недавно обнаружено в экспериментах по дополнительному электронному циклотронному (ЭЦ) нагреву плазмы в различных тороидальных установках [6–19].

Точное дисперсионное уравнение ионных бернштейновских волн [20, 21] является очень громоздким и делает практически невозможным качественный анализ и аналитическое описание. В разные годы были предложены его различные приближенные интегральные формы [22–24]. Кроме того, предложены приближенные интегральные представления этого уравнения, которые позволили учесть уширение резонанса за счет эффектов неоднородности магнитного поля [25] и тороидального дрейфа [26].

В настоящей работе, следуя подходу, развитому в [27] и использованному в той же работе для описания электронных бернштейновских волн, получено новое приближенное дисперсионное уравнение ионных бернштейновских волн, распространяющихся поперек внешнего магнитного поля. В данной постановке задача интересна как при описании ИБ-волн, генерируемых при развитии параметрических распадных неустойчивостей (поскольку именно для таким образом распространяющихся ИБ-волн наименьшим является порог возбуждения и наибольшим инкремент), так и при анализе их распространения в ходе дополнительного нагрева плазмы. При выводе приближенного уравнения учтен эффект центробежного и градиентного дрейфа ионов (в тороидальных установках удержания плазмы – тороидального дрейфа) [28] в присутствии неоднородного магнитного поля, силовые линии которого

имеют кривизну. Пренебрегается эффектом шира магнитного поля, который приводит к появлению эффективной продольной компоненты волнового вектора волны; этот эффект является более слабым, чем рассмотренный в статье, если выполняется условие $\Delta x_d/(\rho_i q) < 1$, где q – запас устойчивости, ρ_i – ионный ларморовский радиус и Δx_d – пространственный размер области, где интересно поведение ИБ-волны (при параметрических распадах, приводящих к генерации ИБ-волн, – область нелинейного взаимодействия).

В результате, впервые получено явное аналитическое выражение для мнимой части дисперсионного уравнения, которое описывает ионное циклотронное затухание ИБ-волн. Это позволило продемонстрировать, что в высокотемпературной плазме резонансы на гармониках ионно-циклотронной частоты могут сильно перекрываться даже при поперечном распространении ИБ-волн, которые в этом случае оказываются сильнозатухающими. Тем самым показано, что наряду с нелинейным (пороговым по амплитуде волны) стохастическим затуханием [29] имеется и линейный механизм, отвечающий за уширение области поглощения ИБ-волны.

2. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ИБ-ВОЛНЫ

Рассмотрим ИБ-волну, распространяющуюся строго поперек внешнего магнитного поля. Поскольку она является сильно замедленной, то для ее описания достаточно ограничиться потенциальным приближением и представить дисперсионное уравнение в виде

$$q_\perp^2 + \chi_e + \chi_i = 0, \tag{1}$$

где

$$\chi_e \simeq \frac{2\omega_{pe}^2}{\upsilon_{te}^2}\left(1 - \exp\left(-\frac{q_\perp^2\upsilon_{te}^2}{2\omega_{ce}^2}\right) I_0\left(\frac{q_\perp^2\upsilon_{te}^2}{2\omega_{ce}^2}\right)\right) \tag{2}$$

– электронная восприимчивость,

$$\chi_i = \frac{2\omega_{pi}^2}{\upsilon_{ti}^2}\left[1 - \int_0^\infty \upsilon_\perp d\upsilon_\perp \times \right.$$
$$\left. \times \int_{-\infty}^{\infty} d\upsilon_\parallel \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{\tilde{\omega} - n\omega_{ci}} J_n^2\left(\frac{q_\perp \upsilon_\perp}{\omega_{ci}}\right) f_0(\upsilon)\right] \tag{3}$$

– ионная восприимчивость [20, 21], J_n – функция Бесселя, I_0 – функция Бесселя мнимого аргумента [30, 31], $q_\perp = \sqrt{q_x^2 + q_y^2}$ – поперечная компонента волнового вектора, $\upsilon_\parallel$, $\upsilon_\perp$ – продольная и поперечная компоненты скорости, $\omega_{pi,e}^2 = 4\pi n_e e^2/m_{i,e}$, $\omega_{ci,e} = |e|H/(m_{i,e}c)$, $\upsilon_{ti,e}^2 = 2T_{i,e}/m_{i,e}$, $\tilde{\omega} = \omega - \omega_{di}$, $\omega_{di} = q_y\upsilon_{di}$ и $\upsilon_{di} = \left(\upsilon_\perp^2 + 2\upsilon_\parallel^2\right)/(2R\omega_{ci})$ – скорость ионов из-за градиентного (первый член) и центробежного (второй член) дрейфов, R – масштаб неоднородности и радиуса кривизны внешнего магнитного поля **H** (соответствует большому радиусу тороидальной установки). Равновесную функцию распределения $f_0(\upsilon)$ будем считать максвелловской. Используя безразмерные переменные $u = \upsilon_\perp/\upsilon_{ti}$, $w = \upsilon_\parallel/\upsilon_{ti}$, $\lambda = q_\perp\upsilon_\perp/\omega_{ci}$, $\tilde{p} = p - \omega_{di}/\omega_{ci}$, $p = \omega/\omega_{ci}$, перепишем выражение (3) в виде

$$\chi_i = \frac{2\omega_{pi}^2}{\upsilon_{ti}^2}\left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty u du \times \right.$$
$$\left. \times \int_{-\infty}^{\infty} dw G(\tilde{p}, u, w) \exp\left(-u^2 - w^2\right)\right], \tag{4}$$

где

$$G(\tilde{p}, \lambda) = p\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n^2(\lambda)}{\tilde{p} - n}. \tag{5}$$

Используя теорему сложения для цилиндрических функций (см. [31], стр. 158), выполним аналитически суммирование в выражении (5), что дает

$$G(\tilde{p}, \lambda) = -ip\int_0^\infty d\xi \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\lambda)\exp(i(\tilde{p} - n)\xi) =$$
$$= -ip\int_0^\infty d\xi \exp(i\tilde{p}\xi) J_0\left(\lambda\sqrt{2(1 - \cos(\xi))}\right). \tag{6}$$

Введем в (6) новую переменную интегрирования $x = (\xi - \pi)/2$, проинтегрируем и получим

$$G(\tilde{p}, \lambda) = \frac{p}{\sin(\pi\tilde{p})} J(\lambda, \tilde{p}), \tag{7}$$

где (см. [31], стр. 180)

$$J(\lambda, \tilde{p}) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{2i\tilde{p}x} J_0(2\lambda\cos x) dx = \pi J_{\tilde{p}}(\lambda) J_{-\tilde{p}}(\lambda). \tag{8}$$

Используя в выражении (8) соотношение $J_{-\tilde{p}}(\lambda) = \cos(\pi\tilde{p}) J_{\tilde{p}}(\lambda) - \sin(\pi\tilde{p}) N_{\tilde{p}}(\lambda)$ (см. [30], стр. 965), где $N_{\tilde{p}}(\lambda)$ – функция Неймана, перепишем (5) как

$$G(\tilde{p}, \lambda) = \pi p\left(\cot(\pi\tilde{p}) J_{\tilde{p}}^2(\lambda) - J_{\tilde{p}}(\lambda) N_{\tilde{p}}(\lambda)\right). \tag{9}$$

Воспользуемся асимптотическими выражениями функций J_p, N_p при большом аргументе $\lambda \gg 1$ и большом значении индекса, т.н. приближение тангенсами (см. [31], стр. 977),

$$J_{\tilde{p}}(\lambda) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos(\Phi(\lambda))}{(\lambda^2 - \tilde{p}^2)^{1/4}}, \quad N_{\tilde{p}}(\lambda) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\Phi(\lambda))}{(\lambda^2 - \tilde{p}^2)^{1/4}},$$

где

$$\Phi(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - \tilde{p}^2} - \frac{\tilde{p}}{\cos(\tilde{p}/\lambda)} - \frac{\pi}{4}.$$

Учтем, что $\cos\Phi$, $\sin\Phi$ – быстро осциллирующие функции переменной $\lambda = \lambda(\upsilon_\perp)$. Проводя в (4) интегрирование по аргументу $\lambda = \lambda(\upsilon_\perp)$, положим $\cos(\Phi(\lambda))^2 \approx 1/2$, $\sin(\Phi(\lambda))^2 \approx 1/2$, $\sin(\Phi(\lambda)) \times \times \cos(\Phi(\lambda)) \approx 0$ и сделаем подстановку $\tilde{p} \to p$ в медленно меняющейся амплитуде, что позволяет при $\lambda > p$ приближенно заменить произведения функций выражениями

$$J_{\tilde{p}}^2(\lambda) \approx \frac{1}{\pi\sqrt{\lambda^2 - p^2}}, \quad J_{\tilde{p}}(\lambda)N_{\tilde{p}}(\lambda) \approx 0. \tag{10}$$

Поскольку при $\lambda < p$ функция Бесселя J экспоненциально убывает с увеличением аргумента, а функция Наймана N экспоненциально растет, то в этой области параметров

$$J_{\tilde{p}}^2(\lambda) \approx 0, \quad J_{\tilde{p}}(\lambda)N_{\tilde{p}}(\lambda) \approx -\frac{1}{\pi\sqrt{p^2 - \lambda^2}}. \tag{11}$$

Далее подставим выражения (9)–(11) в выражение (7), которое затем подставим в (4). В первом члене сделаем замену переменных, а во втором члене после замены переменных проинтегрируем по перечной компоненте скорости ионов. Получим

$$\chi_i = \frac{2\omega_{pi}^2}{\upsilon_{ti}^2}\left[1 - X\left(\frac{\omega}{q_\perp\upsilon_{ti}}\right) - Y\left(\frac{\omega}{q_\perp\upsilon_{ti}}\right)\langle\cot\rangle\right], \tag{12}$$

где $X(t) = 2t\exp(-t^2)\int_0^t du\exp(u^2)$, $Y(t) = \sqrt{\pi}t \times \times \exp(-t^2)$,

$$\begin{aligned}\langle\cot\rangle &\equiv \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} du\int_{-\infty}^{\infty} dw\exp\left(-u^2 - w^2\right)\cot\left(\pi\hat{p}\right) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} du\int_{-\infty}^{\infty} dw\frac{\exp\left(-u^2 - w^2\right)}{\hat{p}(u,w) - n}\end{aligned} \tag{13}$$

и $\hat{p} = \tilde{p} - \dfrac{q_y\omega^2}{2q_\perp^2 R\omega_{ci}^2}$. Для того чтобы вычислить двукратный интеграл (13), воспользуемся заменой переменных $u, w \to \rho, \varphi$, где $u = r\cos\varphi$, $w = = r\sin\varphi/\sqrt{2}$. Во вновь введенной системе координат двойной интеграл (13) преобразуется как $\int_{-\infty}^{\infty} du\int_{-\infty}^{\infty} dw\ldots = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\infty} rdr\int_0^{2\pi} d\varphi\ldots$. Выполним интегрирование по углам φ и введем новую переменную интегрирования $\zeta = r^2$, что в итоге приводит к однократному интегралу

$$\langle\cot\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}n_{eff}}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\int_0^{\infty}\frac{\exp\left(-3\zeta/4\right)I_0\left(\zeta/4\right)}{\Delta^{(n)} - \zeta}d\zeta, \tag{14}$$

где $\Delta^{(n)} = \left(p - n\right)/n_{eff}$ и $n_{eff} = q_y\upsilon_{ti}^2/\left(R\omega_{ci}^2\right)$. Функция (14) – комплексная обобщенная дисперсионная функция. Ее можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\langle\cot\rangle &= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\tilde{X}\left(\Delta^{(n)}\right) - i\tilde{Y}\left(\Delta^{(n)}\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}n_{eff}}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\left(v.p.\int_0^{\infty}\frac{\exp\left(-3\zeta/4\right)I_0\left(\zeta/4\right)}{\Delta^{(n)} - \zeta}d\zeta - \right. \\ &\left. - i\pi\exp\left(-\frac{3\Delta^{(n)}}{4}\right)I_0\left(\frac{\Delta^{(n)}}{4}\right)\theta\left(\Delta^{(n)}\right)\right),\end{aligned} \tag{15}$$

где $\theta(\ldots)$ – функция Хевисайда, равная 0 при отрицательном аргументе и 1 при положительном; первый член $\tilde{X}(\Delta^{(n)})$ дает вклад в действительную часть ионной восприимчивости, а второй член $\tilde{Y}(\Delta^{(n)})$ представляет собой вклад от полюса в точке резонанса $\Delta^{(n)} = 0$ и описывает ионное циклотронное затухание ИБ-волны.

В точке резонанса $\Delta^{(n)}$ функция $\tilde{X}$ имеет логарифмическую особенность $\tilde{X}\big|_{\Delta^{(n)}\to 0} \sim \ln(\Delta^{(n)})$, в то время как функция $\tilde{Y}$ имеет скачок конечной величины, который равен $\tilde{Y}\big|_{\Delta^{(n)}+0} - \tilde{Y}\big|_{\Delta^{(n)}-0} = \pi/(\sqrt{2}n_{eff})$. Отметим, что вдали от точки резонанса, т.е. при расстройке $\Delta^{(n)} \gg 1$, можно для (14) написать асимптотически

$$\begin{aligned}\langle\cot\rangle &\simeq \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(p - n)} - i\frac{\pi}{\sqrt{2}n_{eff}}\exp\left(-\frac{3\Delta^{(n)}}{4}\right)\times \\ &\times I_0\left(\frac{\Delta^{(n)}}{4}\right)\theta\left(\Delta^{(n)}\right) = \cot\left(\pi p\right) - i\frac{\pi}{\sqrt{2}n_{eff}}\times \\ &\times\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\exp\left(-\frac{3\Delta^{(n)}}{4}\right)I_0\left(\frac{\Delta^{(n)}}{4}\right)\theta\left(\Delta^{(n)}\right).\end{aligned} \tag{16}$$

3. ЗАТУХАНИЕ ИБ-ВОЛНЫ

Проанализируем дисперсионное уравнение (1) с выражениями для электронной (2) и ионной (12), (16) восприимчивостей в окрестности ионной циклотронной гармоники $n = n_0$, т.е. в диапазоне параметров $0 < \Delta^{(n_0)} < 1$. В резонансной области выполняется предельное соотношение $q_\perp \gg \omega/\upsilon_{ti}$. Кроме того, будем считать, что $q_\perp \simeq q_y$. Именно в этом случае будет максимальным эффект уширения резонанса, обсуждаемый в статье. Сделанные предположения позволяют

пренебречь двумя первыми членами в выражении (12) и использовать асимптотическое выражение для функции $Y(\omega/(q_\perp \upsilon_{ti})) \approx \sqrt{\pi}\omega/(q_\perp \upsilon_{ti})$. Выражение для электронной восприимчивости (2) может быть также упрощено: $\chi_e \approx q_\perp^2 \dfrac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2}$. В итоге, дисперсионное уравнение (1) сводится к

$$q_\perp^3\left(1+\frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2}\right) = 2\sqrt{\pi}\frac{\omega_{pi}^2\omega}{\upsilon_{ti}^3}\times$$
$$\times\left(\cot(\pi p) - i\frac{\pi}{\sqrt{2}n_{eff}}\exp\left(-\frac{3\Delta^{(n_0)}}{4}\right)\times\right. \tag{17}$$
$$\left.\times I_0\left(\frac{\Delta^{(n_0)}}{4}\right)\theta\left(\Delta^{(n_0)}\right)\right).$$

Будем считать затухание слабым, что позволяет искать решение (17), используя процедуру теории возмущений. На ее первом шаге пренебрежем затуханием, что позволит найти выражение для поперечной компоненты волнового вектора

$$q_x^{(0)} =$$
$$= \left(\frac{\omega_{pi}^2}{\upsilon_{ti}^2}\left(2\sqrt{\pi}\frac{\omega}{\omega_{pi}}\cot(\pi p)\left(1+\frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2}\right)\right)^{2/3} - q_y^2\right)^{1/2}. \tag{18}$$

На следующем шаге процедуры теории возмущений учтем затухание и получим поправку к волновому вектору

$$q_x'' \simeq \frac{\pi^{3/2}}{3\sqrt{2}}\frac{\omega_{ce}^2}{\omega_{pe}^2+\omega_{ce}^2}\frac{\omega_{pi}^2\omega}{q_\perp^{(0)2}\upsilon_{ti}^3}\frac{1}{n_{eff}}\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{3\Delta^{(n_0)}}{4}\right)I_0\left(\frac{\Delta^{(n_0)}}{4}\right)\theta\left(\Delta^{(n_0)}\right). \tag{19}$$

Выражения, к которым мы пришли, свидетельствуют о важной роли дрейфа частиц и о его влиянии на поглощение ИБ-волны. Напомним, что без учета этого эффекта поглощение локально, а область поглощения совпадает с положением “холодного” ИЦ-резонанса. При учете центробежного и градиентного дрейфа ионов поглощение И-волны перестает быть локальным. Это является следствием уширения области ионного циклотронного резонанса согласно условию $\Delta\omega = \omega - n_0\omega_{ci} - \omega_{di}(\upsilon_\perp, \upsilon_\parallel)$. Профиль энерговыделения имеет конечную ширину и расположен со стороны слабого по отношению к ИЦ-резонансу магнитного поля, т.е. в той области, где частота ИБ-волны больше частоты гармоники n_0 ионной циклотронной частоты. Следует отметить, эффект релятивистского затухания электронной бернштейновской волны, который описывается похожими с математической точки зрения (но более простыми и компактными) выражениями и учитывает зависимость электронной циклотронной частоты от энергии частицы, приводит к профилю энерговыделения, локализованному со стороны сильного магнитного поля [27]. Последнее обстоятельство вызвано другим, в сравнении со случаем, описанным в настоящей статье, знаком поправки к резонансному условию $\Delta\omega = \omega - \omega_{ce} + \beta\omega_{ce}/2$, где $\beta = \upsilon^2/c^2$ – релятивистский фактор. Заметим также, что для высокочастотных ИБ-волн, соответствующих высокой гармонике ИЦ-частоты $n_0 \gg 1$, может происходить “перекрытие” резонансов, т.е. выполняется условие $\left|\Delta^{(n_0)} - \Delta^{(n_0-1)}\right| \propto 1/(n_{eff}n_0) = R\omega_{ci}^2/(q_y\upsilon_{ti}^2 n_0) \le 1$. В этом случае ИБ-волны существуют в качестве сильнозатухающих квазимод, для которых действительная часть показателя преломления порядка ее мнимой части. Этот эффект имеет ту же природу, что и рассмотренный в монографии [32] эффект связи черенковского резонансного взаимодействия с циклотронным в слабом магнитном поле в присутствии какого-либо механизма уширения линии циклотронного резонанса.

Учет эффекта сильного поглощения ИБ-волн влияет на оценку уровня насыщения низкопороговых неустойчивостей СВЧ-волн. Поскольку генерируемые в ходе параметрического распада ИБ-волны являются сильно затухающими, то можно ожидать более высокий уровень аномального поглощения СВЧ-мощности при дополнительном ЭЦ-нагреве в тороидальных установках, чем считалось ранее [4, 5]. Для иллюстрации будем полагать, что направление неоднородности – вдоль координаты x. Разумно допущение, что в пределах ионного циклотронного слоя все параметры плазмы, за исключением магнитного поля, являются постоянными величинами. Аргумент $\Delta^{(n_0)}$ в выражении (19) может быть представлен в виде $\Delta^{(n_0)} = (p - n_0)/n_{eff} \simeq n_0 x/(Rn_{eff})$, где R – масштаб неоднородности магнитного поля (например, большой радиус тороидальной установки). Подставим это выражение в (19) и найдем величину поглощения ИБ-волны в области ее нелинейной генерации в окрестности точки x_0 и в слое толщиной δ

$$\Gamma = 2\int_{x_0-\delta/2}^{x_0-\delta/2} q_x''(x)\,dx \approx \frac{2\pi^{3/2}}{3}\frac{\delta}{q_y^2 r_{di}^3}\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{3}{4}\frac{n_0 x_0}{q_y r_{di}^2}\frac{\omega_{ci}^2}{\omega_{pi}^2}\right)I_0\left(\frac{1}{4}\frac{n_0 x_0}{q_y r_{di}^2}\frac{\omega_{ci}^2}{\omega_{pi}^2}\right). \tag{20}$$

В зависимости от положения области распада x_0 по отношению к ИЦ-резонансу аргумент функций в выражении (20) может быть меньше едини-

цы $\frac{n_0 x_0}{q_y r_{di}^2}\frac{\omega_{ci}^2}{\omega_{pi}^2} < 1$. В таком случае для типичных параметров разрядов в тороидальных установках удержания плазмы величина $\Gamma > 1$, что означает сильное затухание ИБ-волны (случай нелинейной генерации квазимоды).

В целом, полученный результат развивает представления линейной теории распространения волн в сильно диспергирующей замагниченной плазме и является актуальным, как составная часть, для развития нелинейной теории плазмы (теории распадных параметрических неустойчивостей неоднородной среды). Он может быть востребован для объяснения и детального описания аномальных явлений, которые наблюдаются при ЭЦР-нагреве [6–19].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bernstein I.B.* // Phys. Rev. 1958. V. 109. P. 10.
2. *Степанов К.Н.* // ЖЭТФ. 1959. Т. 35. С. 1155. [K.N. Stepanov // Sov. Phys. JETP. 1959. V. 8. P. 808]
3. *Gusakov E., Popov A.* // Europhys. Lett. 2012. V. 99. 15001.
4. *Gusakov E.Z., Popov A.Yu.* // Phys. Plasmas. 2016. V. 23. 082503.
5. *Gusakov E.Z., Popov A.Yu.* // Nucl. Fusion. 2019. V. 59. 104003.
6. *Westerhof E., Nielsen S.K., Oosterbeek J.W., Salewski M., de Baar M.R., Bongers W.A., Bürger A., Hennen B.A., Korsholm S.B., Leipold F., Moseev D., Stejner M., Thoen D.J.* // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 103. 125001.
7. *Nielsen S.K., Salewski M., Westerhof E., Bongers W., Korsholm S.B., Leipold F., Oosterbeek J.W., Moseev D., Stejner M.* // Plasma Phys. Control. Fusion. 2013. V. 55. 115003.
8. *Kubo S., Nishiura M., Tanaka K., Shimozuma T., Yoshimura Y., Igami H., Takahash H., Mutoh T., Tamura N., Tatematsu Y., Saito T., Notake T., Korsholm S.B., Meo F., Nielsen S.K., Salewski M., Stejner M.* // Rev. Sci. Instrum. 2010. V. 81. P. 10D535.
9. *Bruschi A., Alessi E., Bin W., D'Arcangelo O., Baiocchi B., Belli F., Calabrò G., Casiraghi I., Cocilovo V., Figini L., Galperti C., Garavaglia S., Granucci G., Grosso G., Korsholm S.B., Lontano M., Lubyako L., Mazzotta C., Mellera V., Moro A., Nielsen S.K., Orsitto F., Ramogida G., Rasmussen J., Ricci D., Stejner M., Tartari U. and FTU Team* // Nucl. Fusion. 2017. V. 57. 076004.
10. *Bin W., Bruschi A., D'Arcangelo O., Grosso G., Lubiako L., Alessi E., Castaldo C., Centioli C., Angeli M. De, Figini L., Galperti C., Garavaglia S., Granucci G., Lontano M., Magagnino S., Mellera V., Minelli D., Moro A., Muraro A., Nardone A., Orsitto F., Simonetto A., Tartari U. and FTU Team* // Rev. Sci. Instrum. 2016. V. 87. P. 11E507.
11. *Батанов Г.М., Борзосеков В.Д., Коврижных Л.М., Колик Л.В., Кончеков Е.М., Малахов Д.В., Петров А.Е., Саркисян К.А., Скворцова Н.Н., Степахин В.Д., Харчев Н.К.* // Физика плазмы. 2013. Т. 39. С. 511 [G.M. Batanov, V.D. Borzosekov, L.M. Kovrizhnykh, L.V. Kolik, E.M. Konchekov, D.V. Malakhov, A.E. Petrov, K.A. Sarksyan, N.N. Skvortsova, V.D. Stepakhin, N.K. Kharchev // Plasma Phys. Rep., **39**, 444 (2013)]
12. *Zurro B., Baciero A., Tribaldos V., Liniers M., Cappa A., Lopez-Fraguas A., Jimenez-Rey D., Fontdecaba J.M., Nekhaieva O.* // Nucl. Fusion. 2013. 2016. V. 53. 083017.
13. *Martínez M., Zurro B., Baciero A., Jiménez-Rey D., Tribaldos V.* // Plasma Phys. Control. Fusion. 2018. V. 60. 025024.
14. *Vasilkov D.G., Batanov G.M., Berezhetskii M.S., Borzosekov V.D., Grebenshchikov S.E., Kharchev N.K., Khol'nov Yu.V., Kolik L.V., Konchekov E.M., Letunov A.A., Logvinenko V.P., Malakhov D.V., Meshcheryakov A.I., Petrov A.E., Sarksyan K.A., Skvortsova N.N., Stepakhin V.D., Vafin I.Yu.* // Proc. 41st EPS Conf. on Plasma Phys., Berlin, Germany, 2014. ECA. V. 38F. P4.053.
15. *Kubo S., Takahash H., Shimozuma T., Yoshimura Y., Nishiura M., Igami H., Ogasawara S., Makino R.* // EPJ Web of Conferences. 2012. V. 32. 02007.
16. *Eguilior S., Castejron F., de la Luna E., Cappa A., Likin K., Fernández A. and TJ-II Tea*m // Plasma Phys. Control. Fusion. 2003. V. 45. P. 105.
17. *Castejon F., Barrera L., Cappa A., Eguilior S., Herranz J., López-Bruna D., de la Luna E., Medina F., Ochando M.A., Eliseev L., Melnikov A., Chmyga O., Eliseev L.G., Krupnik L., Zhezhera O.* // Proc. 36th EPS Conf. on Plasma Phys., Sofia, Bulgaria, 2009. ECA. V. 33E. P-4.178.
18. *van Milligen B.Ph., Carreras B.A., Hidalgo C., Cappa A. and TJ-II Team* // Phys. Plasmas. 2018. V. 25. 062503.
19. *Hansen S.K., Nielsen S.K., Stober J., Rasmussen J., Salewski M., Stejner M., Hoelzl M. and the ASDEX Upgrade Team* // Proc. 46th EPS Conf. on Plasma Phys., Milan, Italy, 2019. ECA. V. 43C. P- 1.1075.
20. *Stix T.H.* Waves in Plasmas. New York: AIP, 1992.
21. *Swanson D.G.* Plasma Waves. 2nd ed. Bristol: Institute of Physics, 2003.
22. *Brambilla M.* // Plasma Phys. 1976. V. 18. P. 669.
23. *Cho S., Swanson D.G.* // Phys. Fluids. 1988. V. 31. P. 1123.
24. *Cardinali A., Romanelli F.* // Phys. Fluids B. 1988. V. 41. P. 504.
25. *Lashmore-Davies C.N., Dendy R.O.* // Phys. Rev. Lett. 1989. V. 62. P. 1982.
26. *Piliya A.D., Saveliev A.N.* // Plasma Phys. Control. Fusion. 1994. V. 36. P. 2059.
27. *Piliya A.D., Popov A.Yu., Tregubova E.N.* // Plasma Phys. Control. Fusion. 2003. V. 45. P. 1309.
28. *Чен Ф.* Введение в физику плазмы. М.: Мир, 1987. [F.F. Chen. Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion. 2nd ed. New York and London: Plenum Press, 1983]
29. *Karney C.F.F., Bers A.* // Phys. Rev. Lett. 1977. V. 39. P. 550.
30. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблица интегралов, сумм, рядов и произведений. 2-е изд., испр. и доп. М.: Физматлит, 2009.
31. *Лебедев Н.Н.* Специальные функции и их приложения. 2-е изд., перераб. М., Л.: Физматлит, 1963.
32. *Тимофеев А.В.* Резонансные явления в колебаниях плазмы. 2-е изд., испр. и доп. М.: Физматлит, 2009.