ФИЗИКА ПЛАЗМЫ, 2020, том 46, № 7, с. 658–666

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

УДК 533.9

О ДРЕЙФОВОМ ДВИЖЕНИИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В НЕОДНОРОДНЫХ МАГНИТНОМ И СИЛЬНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЯХ

© 2020 г. Н. А. Марусов[a, b, c], Е. А. Сорокина[a, c, *], В. И. Ильгисонис[d]

[a] НИЦ "Курчатовский институт", Москва, Россия

[b] Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия

[c] Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

[d] Государственная корпорация по атомной энергии "Росатом", Москва, Россия

*e-mail: sorokina.ekaterina@gmail.com

Поступила в редакцию 19.12.2019 г.
После доработки 13.02.2020 г.
Принята к публикации 20.02.2020 г.

Исследованы особенности дрейфового движения нерелятивистской заряженной частицы в медленно меняющихся магнитном и сильном электрическом полях, для которых неприменимо предположение о малости скорости электрического дрейфа по отношению к полной скорости частицы. Вариационные принципы дрейфового движения распространены на случай сильного электрического поля. Получен обобщенный лагранжиан Литтлджона и с его помощью продемонстрирован переход к расширенной системе дрейфовых уравнений, содержащей дополнительные скорости дрейфов. Показана возможность ускорения частицы за счет дрейфового движения вдоль сильного электрического поля.

Ключевые слова: движение заряженных частиц, дрейфовая теория, электрический дрейф, скрещенные электрическое и магнитное поля

DOI: 10.31857/S0367292120070069

1. ВВЕДЕНИЕ

Дрейфовая теория – классический метод исследования движения заряженных частиц в адиабатических электрическом и магнитном полях. Как и любая другая модель, описывающая поведение консервативной механической системы, дрейфовая теория может быть математически формализована в рамках механики Лагранжа [1]. Впервые возможность использования уравнений Лагранжа для поиска интегралов движения дрейфовых уравнений, связанных с пространственной симметрией поля при постоянных во времени электрическом $\mathbf{E}$ и магнитном $\mathbf{B}$ полях, была показана Морозовым и Соловьевым в работе [2]. Полученная авторами функция Лагранжа L^* не имеет строгой физической интерпретации и формально вводится как лагранжиан частицы нулевой массы, движущейся в эффективном магнитном поле $\mathbf{B}^* = \nabla \times \mathbf{A}^*$:

$$L^* = \mathbf{A}^* \cdot \dot{\mathbf{R}}; \quad \mathbf{A}^* = \mathbf{A} + \frac{v_\parallel}{\Omega}\mathbf{B}. \tag{1}$$

Здесь $\dot{\mathbf{R}}$ – производная по времени от радиус-вектора ведущего центра; $\Omega = ZeB/mc$ – циклотронная частота, m и Ze – масса и заряд частицы, c – скорость света; $v_\parallel$ – компонента скорости частицы вдоль магнитного поля $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Отметим, что при выводе (1) априори используются условия сохранения энергии и магнитного момента, которые напрямую не следуют из самих уравнений Лагранжа. Позднее Литтлджоном [3] была построена гамильтонова теория движения ведущего центра (см. ссылки в обзоре [4]). Лагранжиан Литтлджона выводится путем усреднения функции Лагранжа заряженной частицы по циклотронному периоду, а следующие из вариационного принципа дрейфовые уравнения обладают точными законами сохранения фазового объема и энергии (для постоянных во времени полей), что обобщает и развивает полученные ранее результаты Морозова и Соловьева.

Движение заряженной частицы в медленно меняющихся электрическом и магнитном полях удобно представить в виде суперпозиции продольного и поперечного (по отношению к направлению магнитного поля) движений. Традиционный подход классической дрейфовой теории состоит в разделении движения заряженной частицы в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, на быстрое вращение по ларморовской окружности и медленное смещение ее ведущего центра, называемое *дрейфом*. Возникновение дрейфа связывается с действием на заряженную частицу какой-либо силы, отличной от силы Лоренца, а также с пространственно-временными неоднородностями электрического и магнитного полей. Вышеуказанное разделение на "быстрое" и "медленное" движения заведомо правомерно, когда изменения полей на ларморовской длине и циклотронном периоде относительно невелики. При этом понятие "дрейф" принято относить ко временным интервалам движения, превышающим период обращения частицы по ларморовской окружности.

Хорошо известно, что в вырожденном случае движения заряженной частицы в однородном магнитном поле под действием постоянной силы разделение движения на ларморовское вращение и смещение ведущего центра является *точным*. В силу этого существует принципиальная возможность расширения стандартной дрейфовой теории на случай сильных электрических полей, для которых скорость электрического дрейфа $\mathbf{V}_E = c[\mathbf{E}\times\mathbf{B}]/B^2$ сопоставима с полной скоростью частицы v. В то же время в случае нерелятивистского движения отношение электрического поля к магнитному полю считается малым, $E/B \sim v/c \ll 1$. Такая ситуация реализуется, например, в установках по ускорению плазмы в скрещенных полях, принцип работы которых основан на естественном разделении масштабов между ларморовскими радиусами заряженных компонент плазмы в относительно слабом магнитном поле: разряды Пеннинга, магнетронные разряды, стационарные плазменные двигатели А.И. Морозова (СПД), ионные источники с замкнутым дрейфом электронов и др. [5]. Расширение дрейфовой теории на случай сильного электрического поля приводит к появлению новых членов в дрейфовом уравнении движения [6, 7], представляющих собой комбинации электрического поля с неоднородностями электрического и магнитного полей [8].

Настоящая работа имеет методический характер и призвана привлечь внимание читателей к особенностям дрейфового движения заряженных частиц в скрещенных полях с сильной электрической компонентой, что необходимо, в частности, для корректной интерпретации результатов кинетического моделирования холловских разрядов — направления, активно развиваемого в настоящее время — см., например, [9, 10]. Система дрейфовых уравнений в сильном электрическом поле, полученная в [6], выведена в терминах механики Лагранжа. На примере модельных конфигураций электрического и магнитного полей продемонстрирован ряд ключевых эффектов, описание которых выходит за рамки классической дрейфовой теории.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 в рамках подхода, развитого в [3], представлен вывод функции Лагранжа для ведущего центра частицы, движущейся в сильном электрическом поле. При помощи уравнений Эйлера—Лагранжа продемонстрирован переход к известной системе дрейфовых уравнений, учитывающей поправки к движению ведущего центра частицы в сильном электрическом поле. В разделе 3 представлены результаты численного расчета траекторий движения заряженной частицы в некоторых модельных конфигурациях скрещенных полей, демонстрирующих эффекты, связанные с дрейфом частиц в сильном электрическом поле. Основные результаты работы суммированы в Заключении.

2. ДРЕЙФОВАЯ ТЕОРИЯ В СЛУЧАЕ СИЛЬНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ТЕРМИНАХ МЕХАНИКИ ЛАГРАНЖА

Выведем уравнения дрейфовой теории, расширенной на случай сильного электрического поля, используя лагранжев формализм. Зададим функцию Лагранжа заряженной частицы в виде функции независимых переменных координат $\mathbf{q}$, скоростей $\dot{\mathbf{q}}$ и времени t:

$$L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) = \mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{q}} - H(\mathbf{q},\mathbf{p},t). \tag{2}$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по времени; функция $H(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$ — гамильтониан заряженной частицы в электрическом и магнитном полях, заданный выражением

$$H(\mathbf{q},\mathbf{p},t) = \frac{1}{2m}\left[\mathbf{p} - \frac{Ze}{c}\mathbf{A}(\mathbf{q},t)\right]^2 + Ze\Phi(\mathbf{q},t), \tag{3}$$

где $\mathbf{A}$ — векторный потенциал магнитного поля: $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$; Φ — электростатический потенциал, определяющий напряженность электрического поля в соответствии с выражением $\mathbf{E} = -\nabla\Phi - (1/c)\partial\mathbf{A}/\partial t$.

Полагая $\mathbf{r} = \mathbf{q}$ и $\mathbf{v} = (1/m)(\mathbf{p} - (Ze/c)\mathbf{A})$, запишем лагранжиан в переменных $(\mathbf{r},\mathbf{v})$:

$$L = \left[\frac{Ze}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) + m\mathbf{v}\right]\cdot\dot{\mathbf{r}} - \left[Ze\Phi(\mathbf{r},t) + \frac{m}{2}|\mathbf{v}|^2\right]. \tag{4}$$

Далее переменные $\mathbf{v}$ и $\dot{\mathbf{r}}$ будут рассматриваться как независимые.

Для перехода к описанию дрейфового движения представим радиус-вектор частицы $\mathbf{r}$ в виде суперпозиции радиус-вектора ведущего центра $\mathbf{R}$ и ларморовского радиуса $\boldsymbol{\rho}_L$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}_L, \quad (5)$$

где

$$\boldsymbol{\rho}_L = \frac{[\mathbf{u}\times\boldsymbol{\Omega}]}{\Omega^2}. \quad (6)$$

Здесь введена $\mathbf{u} = \mathbf{v}_\perp - \mathbf{V}_E$ — скорость циклотронного вращения частицы в системе отчета, движущейся со скоростью электрического дрейфа; $\mathbf{v}_\perp$ — компонента скорости частицы поперек магнитного поля $\Omega = -Ze\mathbf{B}/mc$.

Введем тройку единичных ортогональных векторов

$$\mathbf{b} = [\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2], \quad \mathbf{e}_1 = [\mathbf{e}_2\times\mathbf{b}], \quad \mathbf{e}_2 = [\mathbf{b}\times\mathbf{e}_1], \quad (7)$$

где $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$ — единичный вектор, направленный вдоль магнитного поля. Векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ легко определить, задав один из них в виде $\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}/u$; тогда второй вектор, в силу соотношения (6), будет равен $\mathbf{e}_2 = (\Omega/u)\boldsymbol{\rho}_L$. Заданные таким образом орты $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ вращаются вокруг вектора $\mathbf{b}$ с частотой Ω, поэтому они также могут быть выражены через фазу ларморовского вращения θ в виде

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_i\cos\theta + \mathbf{e}_j\sin\theta, \quad \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_i\sin\theta + \mathbf{e}_j\cos\theta,$$

где $\mathbf{e}_{i,j}$ — единичные ортогональные векторы в плоскости ларморовского вращения частицы $[\mathbf{e}_i\times\mathbf{e}_j] = \mathbf{b}$.

При помощи соотношений (5)–(7) вектор скорости и радиус-вектор частицы записываются в виде

$$\mathbf{v} = v_\parallel\mathbf{b} + \mathbf{V}_E + u\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{r} = \mathbf{R} + \frac{u}{\Omega}\mathbf{e}_2. \quad (8)$$

Подстановка (8) в лагранжиан (4) дает

$$L = m\left\{\frac{\Omega}{B}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) + v_\parallel\mathbf{b}(\mathbf{r},t) + \mathbf{V}_E(\mathbf{r},t) + u\mathbf{e}_1\right\}\times \times\left(\dot{\mathbf{R}} + \dot{\left(\frac{u}{\Omega}\mathbf{e}_2\right)}\right) - -\left\{Ze\Phi(\mathbf{r},t) + \frac{m}{2}|v_\parallel\mathbf{b}(\mathbf{r},t) + \mathbf{V}_E(\mathbf{r},t) + u\mathbf{e}_1|^2\right\}. \quad (9)$$

Далее используем стандартное для дрейфовой теории представление о порядке величин: $(\boldsymbol{\rho}_L\cdot\nabla)\mathbf{C} \sim \varepsilon\mathbf{C}$, $\varepsilon \ll 1$, где $\mathbf{C}$ — произвольный медленно меняющийся вектор. Усредним выражение (9) по циклотронному периоду, определяя при этом все величины в точке нахождения ведущего центра с точностью до второго порядка малости по ε:

$$\mathbf{C}(\mathbf{r}) = \mathbf{C}(\mathbf{R}) + \rho_{Li}\frac{\partial\mathbf{C}(\mathbf{R})}{\partial R_i} + \frac{1}{2}\rho_{Li}\rho_{Lj}\frac{\partial^2\mathbf{C}(\mathbf{R})}{\partial R_i\partial R_j} + O(\varepsilon^3).$$

Это в итоге дает

$$\begin{aligned} L = {} & m\left\{\frac{\Omega}{B}\mathbf{A} + v_\parallel\mathbf{b} + \mathbf{V}_E\right\}\cdot\dot{\mathbf{R}} + \\ & + \dot{\left(\frac{mu}{\Omega}\right)}\left\{\frac{u}{2B}(\nabla\cdot\mathbf{A} - \mathbf{b}\cdot(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{A}) + \frac{v_\parallel u}{2\Omega}\nabla\cdot\mathbf{b} + \right. \\ & \left. + \frac{u}{2\Omega}(\nabla\cdot\mathbf{V}_E - \mathbf{b}\cdot(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{V}_E)\right\} - \\ & - \left(\frac{mu^2}{2\Omega}\right)\left\{1 - \frac{v_\parallel}{\Omega}\mathbf{b}\cdot\nabla\times\mathbf{b} - \frac{1}{\Omega}\mathbf{b}\cdot\nabla\times\mathbf{V}_E\right\}\dot{\theta} - \\ & - Ze\left(\Phi + \frac{u^2}{4\Omega^2}\nabla^2\Phi\right) + \frac{m}{2}\left(v_\parallel^2 + V_E^2 + u^2\times \right. \\ & \left. \times\left\{1 - \frac{v_\parallel}{2\Omega}\mathbf{b}\cdot\nabla\times\mathbf{b} - \frac{1}{2\Omega}\mathbf{b}\cdot\nabla\times\mathbf{V}_E\right\}\right). \end{aligned} \quad (10)$$

В (10) все сглаженные величины как функции координат определены в точке нахождения ведущего центра $\mathbf{R}$.

Выражение (10) содержит член с $\nabla\cdot\mathbf{A} - \mathbf{b}\cdot(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{A}$, при занулении которого за счет соответствующей калибровки векторного потенциала $\mathbf{A}$, как это делается в классической электродинамике[1], слагаемое с $d(mu/\Omega)/dt$ становится второго порядка малости. Тогда, с точностью до нулевого порядка, функция Лагранжа (10) может быть записана в искомой форме

$$L = \frac{Ze}{c}\mathbf{A}^*\cdot\dot{\mathbf{R}}_d - \frac{m^2c}{2Ze}\mu\dot{\theta} - h. \quad (11)$$

Здесь

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A} + \frac{mc}{Ze}(v_\parallel\mathbf{b} + \mathbf{V}_E) \quad (12)$$

— модифицированный векторный потенциал, $\mu = u^2/B$ — магнитный момент и h — сглаженная функция Гамильтона заряженной частицы, определяемая выражением

$$h = Ze\Phi + \frac{m}{2}\left(v_\parallel^2 + V_E^2 + \mu B\right),$$

[1] Для вывода (11) можно использовать альтернативный метод, основанный на фундаментальном свойстве инвариантности уравнений движения относительно замены $L \to L + dF/dt$, где F — произвольная скалярная функция. Выбор такой функции в виде $F(\mathbf{R},t) = -\frac{mu^2}{2\Omega B}\mathbf{e}_2\cdot(\mathbf{e}_2\cdot\nabla)\mathbf{A}$ приводит к сокращению “ненужных” членов в выражении (9).

что в удерживаемом порядке совпадает с функцией (3). Функция Лагранжа (11) с точностью до отброшенных членов высших порядков малости обобщает известный лагранжиан Литтлджона [3, 4] на случай сильного поперечного электрического поля $\mathbf{E}_\perp = O(1)$.

Первое слагаемое в (11) по форме[2] совпадает с лагранжианом Морозова–Соловьева (1) с поправкой к модифицированному векторному потенциалу, связанной с $\mathbf{V}_E$. Как показано в [2], в случае $\mathbf{b}\cdot\nabla\times\mathbf{b} = 0$ уравнение движения ведущего центра можно представить в виде[3]

$$[\dot{\mathbf{R}}\times\mathbf{B}^*] = 0, \tag{13}$$

что формально совпадает с уравнением движения частицы пренебрежимо малой массы в некотором фиктивном магнитном поле $\mathbf{B}^* = \nabla\times\mathbf{A}^*$. Из уравнения (13) следует, что траектория ведущего центра пролегает вдоль силовых линий $\mathbf{B}^*$, т. е.

$$\dot{\mathbf{R}} = \frac{v_\parallel}{B}\mathbf{B}^*. \tag{14}$$

Обобщение (14) на случай $\mathbf{b}\cdot\nabla\times\mathbf{b} \neq 0$ и $\mathbf{b}\cdot\nabla\times\times\mathbf{V}_E \neq 0$ может быть проделано путем замены в знаменателе B на $B_\parallel^* = \mathbf{b}\cdot\mathbf{B}^*$. В рамках классической дрейфовой теории строгий вывод уравнения (14), обобщенного на случай $\mathbf{b}\cdot\nabla\times\mathbf{b} \neq 0$, был проделан Бузером в работе [11].

Используя уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \tag{15}$$

получим расширенную систему дрейфовых уравнений в сильном электрическом поле. Подставляя в (15) в качестве обобщенных координат $q_i = v_\parallel, \mu, \theta$ и лагранжиан (11) как функцию шести независимых переменных $L = L(\mathbf{R}, v_\parallel, \mu, \theta)$, найдем

$$\mathbf{b}\cdot\dot{\mathbf{R}} = v_\parallel, \quad \dot{\theta} = -\Omega, \quad \dot{\mu} = 0. \tag{16}$$

Из первого уравнения (при $q_1 = v_\parallel$) следует, что произведение $\mathbf{b}\cdot\dot{\mathbf{R}}$ равняется проекции скорости частицы $v_\parallel$ на направление магнитного поля в точке нахождения ведущего центра; второе уравнение (при $q_2 = \mu$) показывает, что производная по времени от фазы ларморовского вращения θ с точностью до членов нулевого порядка совпадает с циклотронной частотой: $\dot{\theta} = -\Omega + O(\varepsilon)$; и, наконец, третье уравнение (при $q_3 = \theta$) дает сохранение магнитного момента μ.

Далее, для $q_i = R_i$, с точностью до первого порядка получим

$$Ze\mathbf{E}^* + \frac{Ze}{c}[\dot{\mathbf{R}}\times\mathbf{B}^*] = \frac{m}{2}(\nabla V_E^2 + \mu\nabla B), \tag{17}$$

где

$$\mathbf{E}^* = -\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}^*}{\partial t} = \mathbf{E} - \frac{m}{Ze}\frac{\partial}{\partial t}(v_\parallel\mathbf{b} + \mathbf{V}_E). \tag{18}$$

Умножая (17) векторно на $\mathbf{b}$ с учетом $\mathbf{b}\cdot\dot{\mathbf{R}} = v_\parallel$, получим уравнение для $\dot{\mathbf{R}}$ в виде

$$\dot{\mathbf{R}} = \frac{1}{B_\parallel^*}\Big(v_\parallel\mathbf{B}^* + c[\mathbf{E}^*\times\mathbf{b}] + \frac{mc}{2Ze}[\mathbf{b}\times(\nabla V_E^2 + \mu\nabla B)]\Big). \tag{19}$$

Здесь также $B_\parallel^* = \mathbf{b}\cdot\mathbf{B}^*$. Выражение для $\dot{\mathbf{R}}$ записывается в более привычном виде суммы дрейфовых слагаемых [8] путем разложения $1/B_\parallel^*$ в (19) по ε с точностью до членов первого порядка малости:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{R}} = {}& v_\parallel\mathbf{b} + \mathbf{V}_E + \frac{u^2}{2\Omega}\frac{[\mathbf{b}\times\nabla B]}{B} + \frac{v_\parallel^2}{\Omega}[\mathbf{b}\times(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{b}] + \\ &+ \frac{c}{B\Omega}\left(\frac{\partial\mathbf{E}_\perp}{\partial t} + v_\parallel(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{E}_\perp + (\mathbf{V}_E\cdot\nabla)\mathbf{E}_\perp\right)_\perp + \\ &+ \frac{v_\parallel}{\Omega}\left([\mathbf{b}\times(\mathbf{V}_E\cdot\nabla)\mathbf{b}] - \frac{c\mathbf{E}_\perp}{B^2}\mathbf{b}\cdot\nabla B + \left[\mathbf{b}\times\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial t}\right]\right) - \\ &- \frac{c\mathbf{E}_\perp}{\Omega B^2}\left(\mathbf{V}_E\cdot\nabla B + \frac{\partial B}{\partial t}\right).\end{aligned} \tag{20}$$

Первая строчка уравнения (20) хорошо известна из классической дрейфовой теории [6, 12]. Остальные слагаемые пропорциональны $\varepsilon V_E/v$ и $\varepsilon(V_E/v)^2$ и отсутствуют в стандартной дрейфовой теории ввиду предположения $V_E \ll v$. В работе [6] указанные слагаемые были получены в компактной форме: $[\mathbf{b}\times(\partial\mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v})]/\Omega$, где $\mathbf{v} = v_\parallel\mathbf{b} + \mathbf{V}_E$ – формально эквивалентной поперечной к $\mathbf{B}$ компоненте гидродинамического уравнения движения холодной плазмы. При этом поправки к массовой скорости $\mathbf{V}$, связанные с движением такой плазмы в сильном электрическом поле, могут быть получены и из гидродинамических уравнений путем разложения конвективного члена $(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V}$ по степеням $1/\Omega$. Вторая строчка уравнения (20) описывает дрейфы, связанные с изменением электрического поля: первый член – известный поляризационный дрейф в нестационарном поле $\mathbf{E}(t)$, и два дополнительных

[2] В (12) переменные $v_\parallel$ и $\mathbf{R}$ считаются независимыми и при дальнейшем выводе дрейфовых уравнений движения используется их независимое варьирование; для вывода дрейфовых уравнений из L^* (1) необходимо рассматривать $v_\parallel$ как функцию от $\mathbf{R}$: $v_\parallel = v_\parallel(\mathbf{R})$.

[3] В случае сильного электрического поля необходимо также положить $\mathbf{b}\cdot\nabla\times\mathbf{V}_E = 0$.

слагаемых, связанных с неоднородностью $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ вдоль направлений магнитного поля и электрического дрейфа. Третья и четвертая строчки содержат дрейфы, вызванные неоднородностью и нестационарностью магнитного поля. Заметим, что уравнение движения ведущего центра с эффектами сильного электрического поля использовалось при построении квазигидродинамических моделей, описывающих динамику сильно разреженной плазмы в магнитном поле [13, 14]. Случай движения частицы в слабом электрическом, но сильно неоднородном магнитном поле рассмотрен в [15].

Чтобы замкнуть систему уравнений ведущего центра, остается получить уравнение на $v_\parallel$. Для этого умножим выражение (17) скалярно на $\mathbf{B}^*$. С учетом (18) это дает

$$\frac{dv_\parallel}{dt} = \frac{\mathbf{B}^*}{B_\parallel^*}\left\{\frac{Ze}{m}\mathbf{E} - \left(v_\parallel\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{V}_E}{\partial t}\right) - \frac{1}{2}(\nabla V_E^2 + \mu\nabla B)\right\},$$

что по аналогии с (19) можно привести к стандартному виду

$$\frac{dv_\parallel}{dt} = \frac{Ze}{m}\mathbf{b}\cdot\mathbf{E} + \frac{\mu B}{2}\nabla\cdot\mathbf{b} + \mathbf{V}_E\cdot\frac{d\mathbf{b}}{dt}. \quad (21)$$

Уравнения (16), (20), (21), формируют искомую систему дрейфовых уравнений в сильном электрическом поле.

Используя уравнение (21), нетрудно получить выражение, описывающее приращения кинетической энергии $K = m(v_\parallel^2 + \mu B + V_E^2)/2$, которое, как и в [6], имеет вид

$$\frac{dK}{dt} = Ze(\dot{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{E}) + \frac{m\mu B}{2}\frac{\partial B}{\partial t}. \quad (22)$$

В статических полях $\partial(E,B)/\partial t = 0$ из уравнения (22) вытекает закон сохранения энергии

$$K + Ze\Phi = \text{const}.$$

3. ПРИМЕРЫ ДРЕЙФОВОГО ДВИЖЕНИЯ В СИЛЬНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Влияние сильного электрического поля на характер дрейфового движения заряженных частиц исследовалось численно. Поочередно рассматривались конфигурация с однородным магнитным полем $\mathbf{B} = \text{const}$ и неоднородным электрическим $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$ полем и конфигурация с неоднородным магнитным $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r})$ и однородным электрическим $\mathbf{E} = \text{const}$ полем. Направление полей было выбрано строго поперечным ($\mathbf{E}\perp\mathbf{B}$). Для каждой конфигурации были рассчитаны точные траектории движения положительно заряженной ($Z > 0$) частицы $\mathbf{r}$ и ее ведущего центра. Последняя определялась путем вычитания из радиус-вектора частицы текущего значения вектора ларморовского вращения, $\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_L$. Полученные траектории сравнивались с результатами численного расчета траекторий дрейфового центра $\mathbf{R}_{cl}$ (уравнение (20) без учета дрейфов в сильном электрическом поле) и $\mathbf{R}$ (полное уравнение (20)). Компоненты скорости частицы, фигурирующие в уравнении (20), рассчитывались из точных уравнений движения.

В качестве естественной нормировки пространственных и временных масштабов задачи использовались ларморовский радиус ($\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/\rho_{L0} = \mathbf{r}ZeB_0/(v_0mc)$) и циклотронный период ($\tilde{t} = t2\pi\Omega_0 = t2\pi ZeB_0/(mc)$), значения которых рассчитывались в начальный момент времени $t = 0$. Величина электрического поля задавалась при помощи безразмерного параметра $\varkappa = cE_0/v_0B_0$ (E_0 – значение электрического поля в точке нахождения частицы в начальный момент времени), естественным образом возникающего при выбранной нормировке. В строго поперечных полях параметр $\varkappa$ равен отношению V_{E0}/v_0. Ниже символ “тильда” у безразмерных величин опущен.

3.1. *Конфигурация с неоднородным электрическим полем*

В неоднородном электрическом и однородном магнитном полях уравнение (20) редуцируется к виду

$$\dot{\mathbf{R}} = v_\parallel\mathbf{b} + \mathbf{V}_E + \frac{c}{B\Omega}\left(v_\parallel(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{E}_\perp + (\mathbf{V}_E\cdot\nabla)\mathbf{E}_\perp\right)_\perp,$$

и содержит два дополнительных члена, связанные с сильным электрическим полем $\mathbf{E}(\mathbf{r})$.

Рассмотрим конфигурацию типа квадрупольной линзы с потенциалом $\Phi = -(E_0/r_0)xy$ (здесь $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ – исходное положение частицы), помещенную в однородное магнитное поле $\mathbf{B} = B_0\mathbf{e}_z$ ($B_0 = \text{const}$), см. рис. 1а. Пример траекторий движения заряженной частицы и ее ведущего центра в рассматриваемой системе представлен на рис. 1б. Без учета дополнительных дрейфов в электрическом поле классическая траектория дрейфового центра $\mathbf{R}_{cl}$ пролегает вдоль эквипотенциальей $\Phi = \text{const}$ и со временем асимптотически приближается к оси x. Под действием дополнительного дрейфа $\sim(\mathbf{V}_E\cdot\nabla)\mathbf{E}_\perp$ (ассоциируемого с действием центробежной силы $\mathbf{F}_c = -m(\mathbf{V}_E\cdot\nabla)\mathbf{V}_E$), одна из компонент которого направлена вдоль электрического поля $\mathbf{E}$, ведущий центр частицы $\mathbf{R}$ пересекает ось x. Другая компонента дополнительного дрейфа сонаправлена с электрическим дрейфом $\mathbf{V}_E$, поэтому за равный промежуток времени ведущий центр $\mathbf{R}$ частицы смещается на большее расстояние вдоль оси x, чем $\mathbf{R}_{cl}$. Проведенный расчет демонстриру-

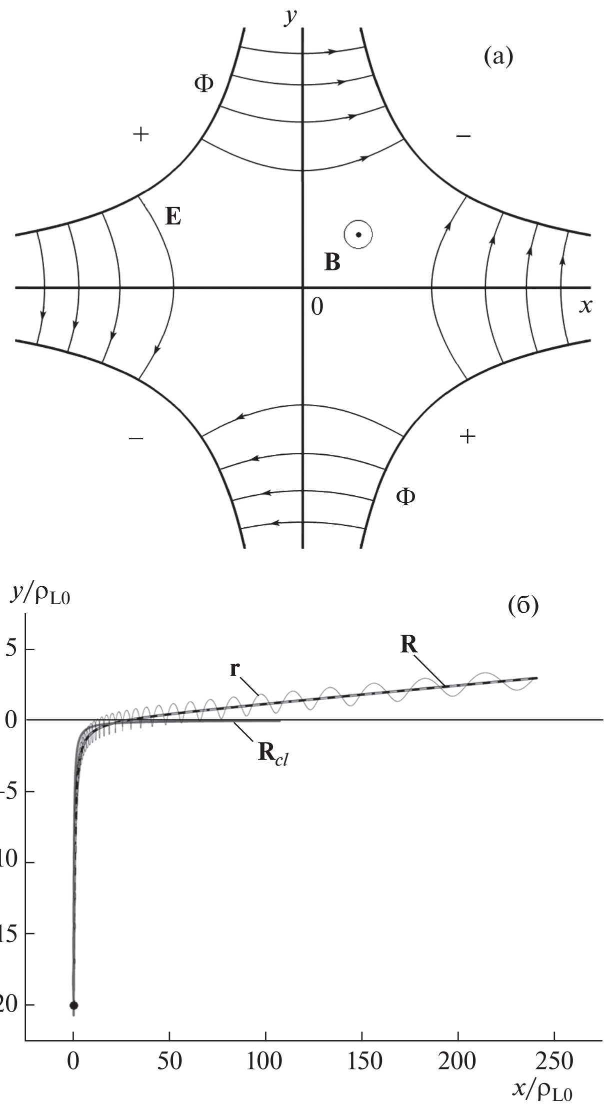

Рис. 1. Конфигурация квадрупольной электростатической линзы с осевым магнитным полем (а); траектории движения в рассматриваемой конфигурации (б): $\mathbf{r}$ – траектория частицы; $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}_{cl}$ – траектории движения ведущего центра, рассчитанные с учетом дополнительных дрейфов в электрическом поле и без них соответственно; штриховая линия – точная траектория движения ведущего центра; черный кружок – стартовая позиция частицы ($x = 0,\ y = -20\rho_{L0}$). Здесь $v_{\|} = 0,\ v_{\perp} = v_0$: $v_x = v_y = v_0/\sqrt{2}$, $\varkappa = 0.5$.

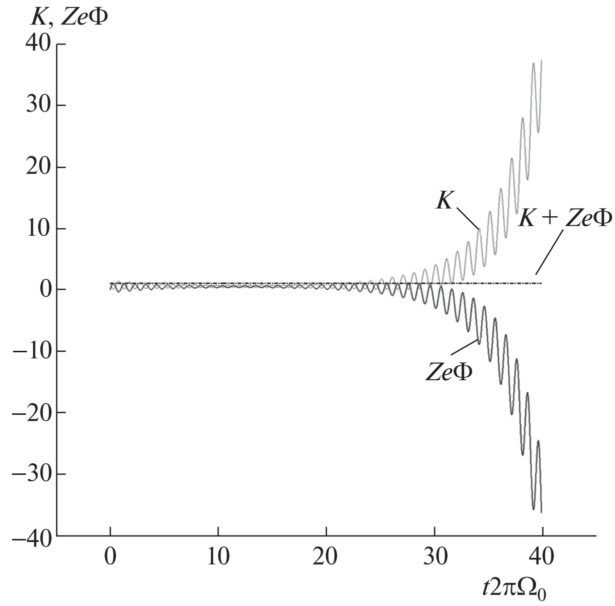

Рис. 2. Зависимости кинетической K и потенциальной $Ze\Phi$ энергий частицы, нормированных на начальное значение энергии, от времени t. Время расчета совпадает со временем расчета траектории на рис. 1б.

ет хорошее согласие траектории движения ведущего центра $\mathbf{R}$ с точными траекториями движения заряженной частицы, см. 1б.

Интересный эффект, проявляющийся в рассмотренной конфигурации, связан с увеличением энергии частицы за счет дрейфа в скрещенных полях вдоль электрического поля $\mathbf{E}$. В соответствии с выражением (22), приращение кинетической энергии при $\mathbf{B} = \text{const}$ и $v_{\|} = 0$ описывается уравнением

$$\frac{dK}{dt} = \frac{mc^2}{B^2}\mathbf{E}_{\perp}\cdot(\mathbf{V}_E\cdot\nabla)\mathbf{E}_{\perp}.$$

Указанный эффект не может быть описан в рамках классического дрейфового приближения, так как $Ze\left(\mathbf{E}_{\perp}\cdot\dot{\mathbf{R}}_{cl}\right) = Ze\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{V}_E\right) \equiv 0$. На рис. 2 изображено изменение энергии частицы во времени на траектории рис. 1б. Легко видеть, что даже при незначительном смещении траектории ведущего центра $\mathbf{R}$ вдоль электрического поля (порядка нескольких ларморовских радиусов), кинетическая энергия частицы увеличивается на порядок.

3.2. Конфигурация с неоднородным магнитным полем

Рассмотрим движение заряженной частицы в конфигурации магнитного поля прямого тока $\mathbf{B} = \mathbf{e}_{\varphi}B_0r_0/r$, помещенного в однородное электрическое поле $\mathbf{E} = -E_0\mathbf{e}_z$ $(E_0 = \text{const})$, см. рис. 3а. Используется цилиндрическая система координат $\{r, \varphi, z\}$. В указанной геометрии уравнение (20) сводится к виду

$$\dot{\mathbf{R}} = v_{\|}\mathbf{b} + \mathbf{V}_E + \frac{u_{\perp}^2/2 + v_{\|}^2}{\Omega}\frac{[\mathbf{b}\times\nabla B]}{B} - \frac{c^2}{\Omega B^3}\mathbf{E}_{\perp}(\mathbf{E}_{\perp}\cdot[\mathbf{b}\times\nabla B]),$$

из которого следует, что движение ведущего центра заряженной частицы поперек магнитного поля складывается из электрического, тороидального (сумма градиентного и центробежного дрейфов), и дополнительного дрейфа в сильном электрическом поле, возникающего в случае $\mathbf{V}_E \cdot \nabla B \neq 0$. Так как дополнительный "электрический" дрейф имеет квадратичную зависимость от вектора электрического поля, его направление всегда противоположно тороидальному дрейфу. Очевидно, что при условии $u^2 + 2v_{\parallel}^2 = 2V_E^2/B$ возможна полная компенсация тороидального дрейфа. При $v_{\parallel} = 0$ из условия сохранения магнитного момента легко найти критическую точку r_{crit}, в которой $\dot{R}_z = 0$

$$r_{crit} = r_0\left(\frac{\mu B_0}{2V_{E0}^2}\right)^{1/3}.$$

Пример траектории заряженной частицы и ее ведущего центра при $v_{\parallel} = 0$ и $\varkappa = 0.2$ представлен на рис. 3б. Без учета дополнительного дрейфа ведущий центр частицы, описываемый вектором $\mathbf{R}_{cl}$, смещается вдоль осей r и z под действием электрического и тороидального дрейфов, соответственно. В действительности, после прохождения критической точки $r = r_{crit}$ частица начинает дрейфовать против тороидального дрейфа в направлении электрического поля, что подтверждается результатами численного расчета – см. кривые **R** и **r** на рис. 3б. В свою очередь смещение ведущего центра вдоль электрического поля приводит к изменению кинетической энергии частицы по закону

$$\frac{dK}{dt} = m\left[\frac{u^2}{2} + v_{\parallel}^2 - V_E^2\right](\mathbf{V}_E \cdot \nabla B).$$

Результаты расчета временной эволюции кинетической энергии при разных значениях величины электрического поля E_0 (параметра $\varkappa$) представлены на рис. 4а. Видно, что в слабом электрическом поле ($\varkappa = 0.05$ и $\varkappa = 0.1$) на заданном интервале времени частица теряет энергию, двигаясь против поля. При $\varkappa = 0.2$ частица также замедляется на интервале $r \in [r_0, r_{crit})$, но после прохождения критической точки $r = r_{crit}$, в которой $dK/dt = 0$, напротив начинает ускоряться, см. рис. 3б. Траектории движения ведущего центра, рассчитанные при разных значениях параметра $\varkappa$, представлены на рис. 3б.

На основе эффекта "дрейфового ускорения" (изменения кинетической энергии частицы при дрейфе в направлении электрического поля) в конфигурации, аналогичной рассмотренной выше, в работе [16] была предложена схема рекуперации тепловой энергии плазмы в энергию

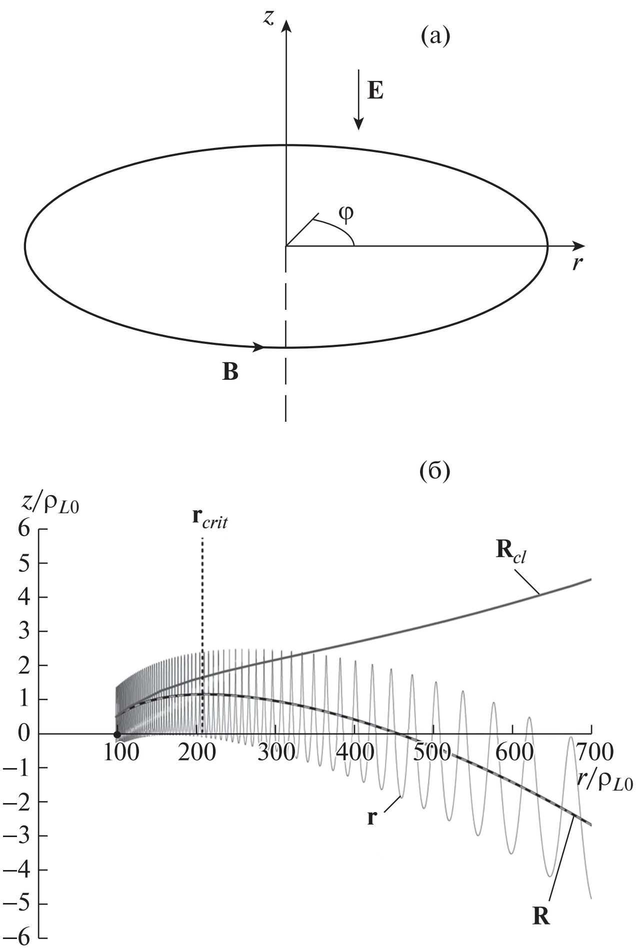

Рис. 3. Конфигурация магнитного поля прямого тока и аксиального электрического поля (а); траектории движения в плоскости $r-z$ (б): **r** – траектория частицы; **R** и $\mathbf{R}_{cl}$ – траектории движения ведущего центра, рассчитанные с учетом дополнительных дрейфов в электрическим поле и без них соответственно; штриховая линия – точная траектория движения ведущего центра; черный кружок – стартовая позиция частицы ($r = 100\rho_{L0}$, $z = 0$). Здесь $v_{\parallel} = 0$, $v_{\perp} = v_0$: $v_r = v_z = v_0/\sqrt{2}$, $\varkappa = 0.2$.

электрического поля. Результаты [16] опирались на модель классической дрейфовой теории, в рамках которой приращение кинетической энергии предопределено направлением полей, т.е. $dK/dt < 0$ при $\mathbf{V}_E \cdot \nabla B < 0$ и наоборот. Учет дополнительных дрейфов ограничивает радиальный размер пространственной области, в которой частицы теряют свою энергию, величиной r_{crit}, которая в случае достаточно сильного электрического поля, $|V_E| \sim 0.1|v_0|$, по порядку величины составляет $\sim 10^2\rho_L$.

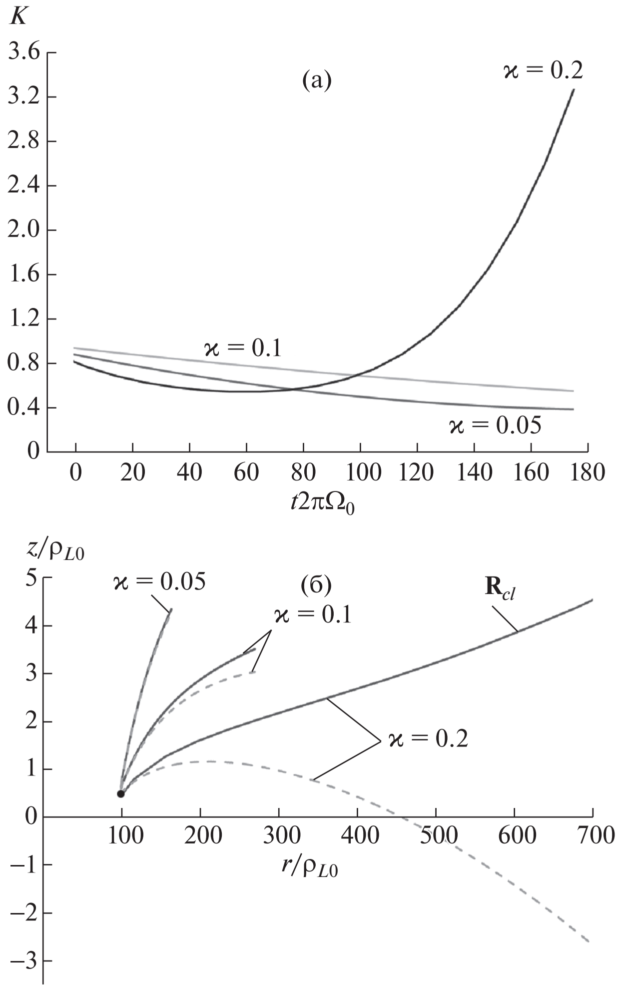

Рис. 4. Зависимости сглаженной кинетической энергии частицы K от времени t, соответствующие траекториям ведущего центра на рис. 4б (а); траектории движения ведущего центра заряженной частицы в плоскости $r-z$ в магнитном поле прямого тока и аксиальном электрическом поле: сплошные линии – траектории движения классического дрейфового центра, рассчитанные без учета дополнительных дрейфов в электрическим поле; штриховые линии – точные траектории движения ведущего центра; черный кружок – стартовая позиция частицы ($r = 100\rho_{L0}$, $z = 0$). Здесь $v_{\parallel} = 0$, $v_{\perp} = v_0$: $v_r = v_z = v_0/\sqrt{2}$, $\varkappa = 0.05$, $\varkappa = 0.1$, $\varkappa = 0.2$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполнен анализ дополнительных (по сравнению с классической дрейфовой теорией) слагаемых в уравнении дрейфового движения ведущего центра (20). Показано, что дрейфовое движение нерелятивистской заряженной частицы в скрещенных медленно меняющихся электрическом и магнитном полях с сильной электрической компонентой отличается от предсказаний классической дрейфовой теории и имеет специфические составляющие, вклад которых в итоговое движение может быть весьма значителен. Дополнительные дрейфы вызваны неоднородностью поля в направлении $\mathbf{B}$ и $\mathbf{V}_E$ и их учет важен, если скорость $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$-дрейфа сопоставима с полной скоростью частицы. Получен обобщенный лагранжиан Литтлджона (10) и с его помощью продемонстрирован переход к системе уравнений расширенной дрейфовой теории (16), (20) и (21).

Численно исследованы особенности дрейфового движения частицы в некоторых модельных конфигурациях скрещенных полей. Показано, что динамика ведущего центра в сильном электрическом поле существенно отличается от обычного $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$-дрейфа. Особенностью движения в сильном электрическом поле является наличие компоненты дрейфовой скорости вдоль электрического поля $\mathbf{E}_\perp$. Такое смещение, в свою очередь, приводит к изменению кинетической энергии частицы, так как $\dot{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{E}_\perp \neq 0$. В постоянном магнитном поле такое “дрейфовое” ускорение очевидно не описывается классической дрейфовой теорией, в которой $\mathbf{V}_E\cdot\mathbf{E}\equiv 0$. Важно отметить, что, поскольку дополнительные дрейфы обусловлены неоднородностью электрического и магнитного полей, они зависят от заряда и массы заряженных частиц, и, таким образом, способны вносить вклад в генерацию тока в плазме, как и известный поляризационный ток.

Работа частично поддержана Министерством науки и высшего образования РФ (соглашение № 3.2223.2017/4.6) (раздел 3) и Программой РУДН “5-100” (раздел 2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 1. Механика. М.: Наука, 1988.
2. *Морозов А.И., Соловьев Л.С.* // ДАН СССР. 1959. Т. 128. С 506.
3. *Littlejohn R.G.* // J. Plasma Phys. 1983. V. 29. P. 111. https://doi.org/10.1017/S002237780000060X
4. *Cary J.R., Brizard A.J.* // Rev. Mod. Phys. 2009. V. 81. P. 693. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.81.693
5. *Морозов А.И.* Плазменные ускорители / Под ред. Л.А. Арцимовича, С.Д. Гришина, Г.Л. Гродзовского, Л.В. Лескова, А.И. Морозова, А.А. Поротникова, А.М. Дороднова, В.Г. Падалки, М.И. Пергамента. М.: Машиностроение, 1973. С. 5.
6. *Морозов А.И., Соловьев Л.С.* Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 2. С. 177.
7. *Нортроп Т.*, Адиабатическая теория заряженных частиц / Под ред. Н. Н. Семашко. М.: Атомиздат, 1967.

8. *Ильгисонис В.И.* Классические задачи физики горячей плазмы. М.: Издательский дом МЭИ, 2015.
9. *Charoy T., Boeuf J.P., Bourdon A., Carlsson J.A., Chabert P., Cuenot B., Eremin D., Garrigues L., Hara K., Kaganovich I.D., Powis A.T., Smolyakov A., Sydorenko D., Tavant A., Vermorel O., Villafana W.* // Plasma Sources Sci. Technol. 2019. V. 28. P. 105010. https://doi.org/10.1088/1361-6595/ab46c5
10. *Boeuf J.P., Garrigues L.* // Phys. Plasmas. 2018. V. 25. P. 061204. https://doi.org/10.1063/1.5017033
11. *Boozer A.H.* // Phys. Fluids. 1980. V. 23. P. 904. https://doi.org/10.1063/1.863080
12. *Сивухин Д.В.* Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 1. С. 7.
13. *Рудаков Л.И., Сагдеев Р.З.* Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Издательство Академии Наук СССР, 1958. Т. 3. С. 268.
14. *Волков Т.Ф.* Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1964. Вып. 4. С. 3.
15. *Ходжаев К.Ш., Чирков А.Г., Шаталов С.Д.* // ПМТФ. 1981. 4. С. 3.
16. *Тимофеев А.В.* // Физика плазмы. 1978. Т. 4. В. 4. С. 826.