ФИЗИКА ПЛАЗМЫ, 2020, том 46, № 7, с. 667–672

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 533.951

БИФУРКАЦИЯ МИКРОВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ: МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛУЧЕВЫМИ МЕТОДАМИ

М. А. Терещенко*

Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН, Москва, Россия

**e-mail: maxt@inbox.ru*

Поступила в редакцию 17.01.2020 г.
После доработки 20.02.2020 г.
Принята к публикации 20.02.2020 г.

Предложена модификация численного метода “beam tracing”, позволяющая использовать его в зонах бифуркации микроволновых пучков, сопровождающейся линейной трансформацией мод. Теоретической основой модификации является гибридное пространственно-спектральное представление пучков, в котором их оси совпадают и, следовательно, параксиальное приближение остается справедливым. Определены начальные значения параметров пучка, отделяющегося от “родительского” и получены уравнения, связывающие амплитуды пучков в зоне бифуркации.

Ключевые слова: микроволновые пучки, лучевые траектории, линейная трансформация, дисперсионный тензор

DOI: 10.31857/S0367292120070094

1. ВВЕДЕНИЕ

Коротковолновые асимптотические численные методы традиционно применяются при моделировании распространения микроволновых пучков в плазме. Наиболее часто используемыми из них являются лучевые методы: “ray tracing” (RT) [1, 2] и его расширенный вариант “beam tracing” (BT) [3–5], учитывающий поперечные дифракционные эффекты в модели гауссова пучка. В основе RT лежит предположение об эйкональном характере пространственного изменения поля волны (приближение геометрической оптики), а для применимости BT дополнительно требуется параксиальный характер распределения поля. В неоднородной плазме магнитных ловушек распространение микроволновых пучков иногда, на некоторых сегментах их траекторий, выходит за рамки указанных приближений. В таких зонах стандартное применение лучевых методов бывает либо спорно, либо невозможно. Однако вычислительная эффективность лучевых методов побуждает к поиску возможностей обхода этих ограничений путем развития исходного теоретического аппарата и соответствующей модификации численных процедур. Ряд подобных задач уже решен. Так, в [6] была обоснована пригодность RT к неэйкональным режимам распространения микроволн. В [7] предложена схема применения BT в случаях сильной аберрации пучка или его распада на несколько волновых образований. В [8] показана возможность использования BT при наличии на траектории пучка каустик типа “cusp”, где пучок превращается в пространственно сложный волновой объект. Еще одним из микроволновых режимов распространения в плазме, исключавших применение BT, оставался случай бифуркации лучевых траекторий в зоне, где совместно верны дисперсионные соотношения для двух различных волновых мод. Это явление, известное также как линейная трансформация мод, принято теоретически описывать решениями укороченной системы из двух волновых уравнений (например, [1, 2, 9, 10]). Асимптотики таких решений позволяют определить эйкональные амплитуды двух мод за пределами зоны их резонансного взаимодействия. Однако для нахождения распределения поля во всем объеме плазмы в виде гауссовых пучков такой алгоритм не годится.

Заметим, что линейная трансформация мод в плазме также может происходить при туннелировании через область непрозрачности в **r**-пространстве или в **k**-пространстве волновых векторов (см., например, [11]). Это иной, более сложный эффект, который может рассматриваться как бифуркация лучевых траекторий лишь при исчезающе малой толщине слоя непрозрачности. При электронно-циклотронном нагреве плазмы в токамаках и стеллараторах бифуркации микроволновых пучков встречаются, например, в случаях прохождения вводимого извне пучка через область слабоанизотропной периферийной плазмы и, в некотором диапазоне плотностей, при строго перпендикулярном прохождении пучка через область резонанса на второй гармонике гирочастоты. В последнем случае пересечение дисперсионных зависимостей различных мод вызвано сильным импульсообразным увеличением показателя преломления необыкновенной волны вблизи резонанса из-за релятивистских поправок в тензоре диэлектрической проницаемости [12].

В данной работе представлен новый подход к проблеме бифуркации волн, заключающийся в использовании 3-мерного *“ad hoc”* гибридного $\mathbf{r}|\mathbf{k}$-представления для двух гауссовых пучков в зоне бифуркации (BZ). Свободные параметры этого представления должны быть выбраны так, чтобы оси обоих пучков в нем локально совпадали. В таком представлении сохраняется параксиальный характер распространения волн, а значит, метод BT в принципе применим. При этом исходное уравнение BT для амплитуды “родительского” пучка в BZ следует временно заменить на систему из двух связанных уравнений типа Баддена–Кравцова [9, 10], а после их расцепления возможен обратный переход в $\mathbf{r}$-пространство и дальнейший расчет распространения двух независимых пучков стандартным методом. Прочие же уравнения BT остаются справедливыми в BZ, и поэтому модифицированная процедура BT будет непрерывной при прохождении BZ и, соответственно, легко реализуемой.

2. ГАУССОВЫ ПУЧКИ В ГИБРИДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Лучевая траектория, также называемая бихарактеристикой, представляет собой кривую в 6-мерном континууме – совокупности $\mathbf{r}$-пространства и $\mathbf{k}$-пространства. Обозначим ее вектором $(\mathbf{R}^{(m)T}\mathbf{K}^{(m)T})^T$, являющимся вещественной функцией некоторой вещественной переменной s, где m – индекс рассматриваемой волновой моды, а T обозначает транспозицию[1]. Проекция лучевой траектории на $\mathbf{r}$-пространство выполняет роль расчетного “каркаса” в RT или задает ось гауссова пучка в BT. Гауссов микроволновый пучок математически является 3-мерным объектом, и его электрическое поле в $\mathbf{r}$-пространстве (в дальнейшем – в $\mathbf{r}$-представлении) имеет вид

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}^{(m)}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_R^{(m)} \exp\left[i\Theta^{(m)} - i\omega t\right],\\
&\Theta^{(m)} = \Phi^{(m)} + \mathbf{K}^{(m)T}\left(\mathbf{r}-\mathbf{R}^{(m)}\right) + \\
&+\frac{1}{2}\left(\mathbf{r}-\mathbf{R}^{(m)}\right)^T \mathbf{Q}^{(m)}\left(\mathbf{r}-\mathbf{R}^{(m)}\right).
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\Phi^{(m)}$ – вещественная функция s, а вектор $\mathbf{E}_R^{(m)}$ и симметричная матрица 3×3 $\mathbf{Q}^{(m)}$ – комплексные функции s, причем $\dot{\Phi}^{(m)} = \mathbf{K}^{(m)T}\dot{\mathbf{R}}^{(m)}$ и $\mathbf{Q}^{(m)}\dot{\mathbf{R}}^{(m)} = \dot{\mathbf{K}}^{(m)}$ (точка обозначает производную по s; подробнее об этих соотношениях, сохраняющихся при BT, см. [8]). Стандартный вариант BT включает в себя нахождение всех упомянутых функций на некотором интервале значений s путем численного интегрирования соответствующих обыкновенных дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями. Во многих практических задачах гауссов пучок вида (1) – достаточно хорошее приближение для распределения поля в пространстве. В случаях же, когда квадратичная по $\mathbf{r}-\mathbf{R}^{(m)}$ аппроксимация для комплексной фазовой функции $\Theta^{(m)}$ недостаточно точна, распределение поля обычно может быть представлено суммой конечного числа пучков вида (1) с различными осевыми траекториями [7].

Существуют ситуации, когда параксиальное разложение вида (1) для $\Theta^{(m)}$ вообще непригодно. Так, в каустике вблизи точки стагнации, где $\dot{\mathbf{R}}^{(m)} = \mathbf{0}$, матрица $\operatorname{Re}\mathbf{Q}^{(m)}$ имеет сингулярное поведение. Однако это не является непреодолимым препятствием для BT, так как в $\mathbf{k}$-представлении (после фурье-преобразования по $\mathbf{r}$) распределение поля (1) имеет аналогичный вид гауссова пучка и при $\dot{\mathbf{K}}^{(m)} \neq \mathbf{0}$ сохраняет параксиальный и эйкональный характер. Поэтому в подобных зонах можно игнорировать формальную неприменимость модели (1) и временно переходить от интегрирования уравнения для $\mathbf{Q}^{(m)}$ к интегрированию уравнения для обратной матрицы – гессиана фазы пучка в $\mathbf{k}$-представлении. При этом амплитуда и фаза прошедшего пучка за каустикой вычисляются так же, как если бы каустика отсутствовала [8].

Более сложен случай нарушения приближения (1) в области резонансного взаимодействия двух мод (скажем, с индексами 1 и 2) в неоднородной плазме, где соответствующие лучевые траектории, пересекаясь, могут быстро расходиться. Так как в BZ могут быть непараллельны не только векторы $\dot{\mathbf{R}}^{(1)}$ и $\dot{\mathbf{R}}^{(2)}$, но также $\dot{\mathbf{K}}^{(1)}$ и $\dot{\mathbf{K}}^{(2)}$, переход в $\mathbf{k}$-представление не способен вернуть задаче па-

[1] Поскольку в линейной алгебре традиционно векторы считаются матрицами-столбцами, здесь и далее для компактности часто используется их строчная запись в транспонированном виде.

раксиальный характер. Тем не менее локальную параксиальность в BZ может обеспечить переход в некоторое 3-мерное гибридное $\mathbf{r}|\mathbf{k}$-представление, которое содержит две компоненты $\mathbf{r}$-представления и одну $\mathbf{k}$-представления (или наоборот), причем среди них отсутствуют сопряженные пары вида (r_α, k_α). По сути, такое представление является частичным фурье-преобразованием вдоль некоторого направления в пространстве. Формальные математические аспекты переходов в представления такого типа рассматриваются в [13]. Пусть для определенности $\mathbf{h} = \begin{pmatrix} k_1 & r_2 & r_3 \end{pmatrix}^T$, тогда проекция лучевой траектории $\left(\mathbf{R}^{(m)T} \ \mathbf{K}^{(m)T}\right)^T$ на $\mathbf{h}$-пространство – вектор $\mathbf{H}^{(m)} = \left(K_1^{(m)} \ R_2^{(m)} \ R_3^{(m)}\right)^T$, – очевидно, будет зависеть от выбора направлений координатных ортов (в отличие от "чистых" $\mathbf{r}$- и $\mathbf{k}$-представлений). Основная идея рассматриваемого подхода заключается в том, что правильным выбором ортов можно добиться локальной параллельности векторов $\dot{\mathbf{H}}^{(1)}$ и $\dot{\mathbf{H}}^{(2)}$ в BZ. В дальнейшем будем называть $\mathbf{h}$-представлением именно такой вариант $\mathbf{r}|\mathbf{k}$-представления. Алгоритм выбора ортов может быть следующим. Пусть орт $\mathbf{e}_1$ находится в той же плоскости, что и векторы $\dot{\mathbf{R}}^{(1)}$ и $\dot{\mathbf{R}}^{(2)}$, тогда, независимо от выбора остальных ортов, проекции $\dot{\mathbf{R}}^{(1)}$ и $\dot{\mathbf{R}}^{(2)}$ на плоскость (r_2, r_3) параллельны. Следовательно, $\dot{R}_2^{(2)}/\dot{R}_2^{(1)} = \dot{R}_3^{(2)}/\dot{R}_3^{(1)} = \xi(\theta)$, где θ – угол между $\mathbf{e}_1$ и $\dot{\mathbf{R}}^{(1)}$. Зависимость $\xi(\theta)$ имеет вид $C_1 + C_2 \operatorname{ctg}\theta$. При этом функция $\zeta(\theta) = \dot{K}_1^{(2)}/\dot{K}_1^{(1)}$ – существенно более пологая, чем $\xi(\theta)$. Для параллельности $\dot{\mathbf{H}}^{(1)}$ и $\dot{\mathbf{H}}^{(2)}$ требуется $\zeta = \xi$, что и достигается подбором θ.

Выясним связь между функциями, характеризующими гауссов пучок в $\mathbf{r}$- и $\mathbf{h}$-представлениях, на участках траектории, примыкающих к BZ, где параксиальное приближение справедливо в обоих представлениях. Как и при переходе к $\mathbf{k}$-представлению [8], будем считать амплитуду $\mathbf{E}_R^{(m)}$ практически неизменной на коротком интервале Δs, который вносит основной вклад в интеграл Фурье. Тогда фурье-преобразование выражения (1) по координате r_1 приводит к следующему виду электрического поля волны в $\mathbf{h}$-представлении[2]:

$$\mathscr{E}(\mathbf{h}) = \mathbf{E}_R \int \exp\left[i\Theta - ik_1 r_1\right] dr_1 = \mathscr{E}_H \exp(i\Xi),$$
$$\Xi = \Psi + \mathbf{P}^T(\mathbf{h} - \mathbf{H}) + \frac{1}{2}(\mathbf{h} - \mathbf{H})^T \mathbf{V}(\mathbf{h} - \mathbf{H}). \quad (2)$$

[2] Для краткости в (2)–(4) у всех функций опущен индекс моды.

Здесь Ξ – комплексная фазовая функция пучка в $\mathbf{h}$-представлении, а комплексная матрица $\mathbf{V}$ – ее гессиан. Таким образом, $\mathscr{E}(\mathbf{h})$ математически также представляет собой гауссов пучок. Новые функции переменной s в (2) связаны со старыми так:

$$\mathscr{E}_H = \mathbf{E}_R \left(2\pi i/Q_{11}\right)^{1/2}, \quad \Psi = \Phi - K_1 R_1,$$
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -R_1 & K_2 & K_3 \end{pmatrix}^T, \quad (3)$$
$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} -Q_{11}^{-1} & Q_{11}^{-1}Q_{12} & Q_{11}^{-1}Q_{13} \\ Q_{11}^{-1}Q_{12} & Q_{22} - Q_{11}^{-1}Q_{12}^2 & Q_{23} - Q_{11}^{-1}Q_{12}Q_{13} \\ Q_{11}^{-1}Q_{13} & Q_{23} - Q_{11}^{-1}Q_{12}Q_{13} & Q_{33} - Q_{11}^{-1}Q_{13}^2 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что все свойства новых функций в (2) аналогичны свойствам соответствующих функций в $\mathbf{r}$-представлении гауссова пучка (1). Из (3) следует, что при обратном переходе к $\mathbf{r}$-представлению имеют место соотношения

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -P_1 & H_2 & H_3 \end{pmatrix}^T, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} H_1 & P_2 & P_3 \end{pmatrix}^T,$$
$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -V_{11}^{-1} & -V_{11}^{-1}V_{12} & -V_{11}^{-1}V_{13} \\ -V_{11}^{-1}V_{12} & V_{22} - V_{11}^{-1}V_{12}^2 & V_{23} - V_{11}^{-1}V_{12}V_{13} \\ -V_{11}^{-1}V_{13} & V_{23} - V_{11}^{-1}V_{12}V_{13} & V_{33} - V_{11}^{-1}V_{13}^2 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Для выполнения процедуры BT внутри BZ необходимо задать начальные значения всех функций в (2) для пучка, выделяющегося из "родительского" (чья мода имеет индекс 1) с уже известными значениями $\mathbf{H}^{(1)}$, $\mathbf{P}^{(1)}$, $\mathbf{V}^{(1)}$ и $\Psi^{(1)}$. Начальные значения для нового пучка соответствуют точке бифуркации, а значит, $\mathbf{H}^{(2)} = \mathbf{H}^{(1)}$ и $\mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{P}^{(1)}$. Начальное значение $\mathbf{V}^{(2)}$ определяется следующими условиями. Возможность формирования нового пучка в существующем поле "родительского" пучка подразумевает (i) идентичность их поперечных профилей интенсивности поля и (ii) согласованность кривизны их волновых фронтов. Первое условие означает $\operatorname{Im}\mathbf{V}^{(2)} = \operatorname{Im}\mathbf{V}^{(1)}$, а для выполнения второго требуется, чтобы $\operatorname{Re}\mathbf{V}^{(2)}$ одновременно удовлетворяло уравнениям $\mathbf{V}^{(2)}\dot{\mathbf{H}}^{(1)} = \dot{\mathbf{P}}^{(1)}$ и $\mathbf{V}^{(2)}\dot{\mathbf{H}}^{(2)} = \dot{\mathbf{P}}^{(2)}$, которые однозначно определяют 6 независимых компонент $\operatorname{Re}\mathbf{V}^{(2)}$. Так как поляризации двух пучков различны, выбор начального значения $\Psi^{(2)}$ не столь очевиден; он станет ясен из результатов разд. 3.

3. АМПЛИТУДНЫЕ УРАВНЕНИЯ В BZ

Все уравнения BT, за исключением амплитудных, остаются справедливыми для пучков в $\mathbf{h}$-представлении в BZ и поэтому здесь не приводятся. Уравнения же для $\mathscr{E}_H^{(1)}$ и $\mathscr{E}_H^{(2)}$ могут быть получены из векторного волнового уравнения максимально общего вида, записанного в $\mathbf{h}$-представлении. Исходное нелокальное волновое уравнение в $\mathbf{r}$-представлении для монохроматической волны в слабонеоднородной стационарной среде имеет вид (подробнее см. [6–8])

$$\int \mathbf{L}\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}', \frac{\mathbf{r}+\mathbf{r}'}{2}\right)\mathbf{E}(\mathbf{r}')\,d^3\mathbf{r}' = \mathbf{0}, \tag{5}$$

где дисперсионное ядро $\mathbf{L}$ – матрица 3 × 3, чей конкретный вид для дальнейшего изложения не существен. Из (5) непосредственно следует волновое уравнение в $\mathbf{h}$-представлении

$$\int \mathscr{L}\left(\mathbf{h}-\mathbf{h}', \frac{\mathbf{h}+\mathbf{h}'}{2}\right)\mathscr{E}(\mathbf{h}')\,d^3\mathbf{h}' = \mathbf{0}, \tag{6}$$

с дисперсионным ядром $\mathscr{L}(\mathbf{h}'', \mathbf{h}) = (2\pi)^{-2}\int \exp(i\mathbf{h}''^T\mathbf{p})\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{p},\mathbf{h})d^3\mathbf{p}$, где $\mathbf{p} = (-r_1\ k_2\ k_3)^T$, а дисперсионный тензор $\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{p},\mathbf{h})$ отличается от своего аналога в $\mathbf{r}$-представлении $\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{k},\mathbf{r}) = \int \exp\left(-i\mathbf{k}^T\mathbf{r}''\right)\mathbf{L}(\mathbf{r}'',\mathbf{r})\,d^3\mathbf{r}''$ лишь формальным обозначением переменных. Как и в $\mathbf{r}$-представлении [6], поле $\mathscr{E}(\mathbf{h},t)$ может быть представлено суперпозицией локально плоских волн вида $\mathbf{A}(\mathbf{p},\mathbf{h})\exp\left(i\mathbf{p}^T\mathbf{h} - i\omega t\right)$ с амплитудой, являющейся медленной функцией $\mathbf{h}$. Уравнение (6) по виду подобно уравнению (5), поэтому подобным же образом (см. [7]) получаем уравнение для $\mathbf{A}$

$$\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{A} - \frac{i}{2}\frac{\partial^2\boldsymbol{\Lambda}}{\partial p_\alpha \partial h_\alpha}\mathbf{A} - i\frac{\partial\boldsymbol{\Lambda}}{\partial p_\alpha}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial h_\alpha} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\boldsymbol{\Lambda}}{\partial p_\alpha \partial p_\beta}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial h_\alpha \partial h_\beta} = \mathbf{0} \tag{7}$$

(здесь и далее подразумевается суммирование от 1 до 3 по повторяющимся греческим индексам). При выводе (7) слагаемые, содержащие производные по $\mathbf{h}$, полагались величинами первого порядка малости, при этом последнее слагаемое имеет тот же порядок малости только из-за поперечной неоднородности пучка.

Пусть $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)})$ и $\mathbf{X} = (\mathbf{x}^{(1)}\ \mathbf{x}^{(2)}\ \mathbf{x}^{(3)})$, где $\lambda^{(\alpha)}$ – собственные значения матрицы $\boldsymbol{\Lambda}$, а $\mathbf{x}^{(\alpha)}$ – соответствующие им правые собственные векторы, причем $\left|\mathbf{x}^{(\alpha)}\right| = 1$. Тогда $\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{X} = \mathbf{X}\mathbf{D}$ и, следовательно, $\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{X}\mathbf{D}\mathbf{X}^{-1}$. Умножим (7) слева на $\mathbf{X}^{-1}$ и введем вектор $\mathbf{z} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}$. Так как $\mathbf{A} = z_\alpha \mathbf{x}^{(\alpha)}$, компоненты z_α – комплексные амплитуды собственных мод. Кроме того, введем обозначения

$$\mathbf{F}_\alpha = \mathbf{X}^{-1}\frac{\partial\mathbf{X}}{\partial h_\alpha},$$

$$\mathbf{G}_\alpha = \mathbf{X}^{-1}\frac{\partial\boldsymbol{\Lambda}}{\partial p_\alpha}\mathbf{X} = \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial p_\alpha} + \left[\mathbf{X}^{-1}\frac{\partial\mathbf{X}}{\partial p_\alpha}, \mathbf{D}\right]_-,$$
$$\mathbf{G}_{\alpha\beta} = \mathbf{X}^{-1}\frac{\partial^2\boldsymbol{\Lambda}}{\partial p_\alpha \partial p_\beta}\mathbf{X} = \frac{\partial\mathbf{G}_\alpha}{\partial p_\beta} + \left[\mathbf{X}^{-1}\frac{\partial\mathbf{X}}{\partial p_\beta}, \mathbf{G}_\alpha\right]_-, \tag{8}$$
$$[\mathbf{Y},\mathbf{Z}]_\pm = \mathbf{YZ} \pm \mathbf{ZY}.$$

В результате из (7) получаем

$$\left(2i\mathbf{D} + \frac{\partial\mathbf{G}_\alpha}{\partial h_\alpha} + [\mathbf{G}_\alpha, \mathbf{F}_\alpha]_+\right)\mathbf{z} + 2\mathbf{G}_\alpha\frac{\partial\mathbf{z}}{\partial h_\alpha} - i\,\mathbf{G}_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\mathbf{z}}{\partial h_\alpha \partial h_\beta} = \mathbf{0}. \tag{9}$$

В случае, если рассматриваемая точка лежит на общей оси гауссовых пучков различных мод, можно считать $\partial^2 z_m / \partial h_\alpha \partial h_\beta \approx iV_{\alpha\beta}^{(m)} z_m$ (без суммирования по m).

Рассмотрим область резонансного взаимодействия двух свободно распространяющихся мод, где $\left|\lambda^{(1)}\right|, \left|\lambda^{(2)}\right| \ll 1$ и $\left|\lambda^{(3)}\right| \sim 1$, тогда $|z_3| \ll |z_1|, |z_2|$; умножив первые два уравнения системы (9) соответственно на z_1^* и z_2^*, в ведущем порядке малости имеем

$$\frac{\partial}{\partial h_\alpha}\left(\frac{\partial\lambda^{(m)}}{\partial p_\alpha}|z_m|^2\right) + \left(2i\lambda^{(m)} + 2i\frac{\partial\lambda^{(m)}}{\partial p_\alpha}\frac{\partial\theta_m}{\partial h_\alpha} + \left([\mathbf{G}_\alpha, \mathbf{F}_\alpha]_+ + \mathbf{G}_{\alpha\beta}V_{\alpha\beta}^{(m)}\right)_{m,m}\right)|z_m|^2 + \left([\mathbf{G}_\alpha, \mathbf{F}_\alpha]_+ + \mathbf{G}_{\alpha\beta}V_{\alpha\beta}^{(m)}\right)_{m,3-m} z_m^* z_{3-m} = 0, \tag{10}$$

где $m = 1, 2$ и $\theta_m = \arg z_m$. Сделаем ряд упрощающих предположений, не необходимых, но позволяющих избавиться в окончательных уравнениях от учета второстепенных для данной работы эффектов. Будем считать дисперсионный тензор эрмитовым ($\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}^{*T}$, $\mathrm{Im}\,\lambda^{(m)} = 0$) в рассматриваемой области и, соответственно, пренебрегать диссипацией энергии мод. Кроме того, заметим, что в среднем недиагональные элементы матрицы $\mathbf{G}_\alpha$ по абсолютной величине значительно меньше ее диагональных элементов: при $m \neq n$ величины $\mathbf{x}^{(m)*T}\left(\partial\boldsymbol{\Lambda}/\partial p_\alpha\right)\mathbf{x}^{(n)}$ стремятся к нулю в случаях близости $\mathbf{x}^{(m)}$ или $\mathbf{x}^{(n)}$ к одному из собственных векторов матрицы $\partial\boldsymbol{\Lambda}/\partial p_\alpha$, так как $\mathbf{x}^{(m)*T}\mathbf{x}^{(n)} = \delta_{mn}$. Как известно из рассмотрения в $\mathbf{r}$-представлении [7], недиагональные элементы $\mathbf{G}_\alpha$ ответственны за эффект слабого нерезонансного взаимодействия между модами, поэтому в данном контексте ими можно пренебречь. Наконец, будем полагать, что BZ не совпадает с каустикой, то есть амплитуда $\mathbf{A}(\mathbf{p},\mathbf{h})$ отлична от нуля лишь в небольшой окрестности значения $\mathbf{p} = \partial\Psi^{(1)}/\partial\mathbf{h}$, а значит, в BZ вдоль общей оси взаимодействующих пучков допустима факторизация $z_m(\mathbf{p},\mathbf{H}^{(m)}(s)) = \mathscr{E}_H^{(m)}(s)\exp\left(i\Psi^{(m)}(s)\right)g(\mathbf{p})$. Тогда, учитывая, что $\partial\lambda^{(m)}/\partial\mathbf{p} = \dot{\mathbf{H}}^{(m)}$, переход к лучевым уравнениям осуществляется с помощью замены

$$\frac{\partial}{\partial h_\alpha}\left(\frac{\partial\lambda^{(m)}}{\partial p_\alpha}|z_m|^2\right) = |g|^2\left(\frac{d\left|\mathscr{E}_H^{(m)}\right|^2}{ds} + \frac{\partial^2\lambda^{(m)}}{\partial h_\alpha\partial p_\alpha}\left|\mathscr{E}_H^{(m)}\right|^2\right). \quad (11)$$

Подставляя (11) в вещественные части уравнений (10), получаем систему уравнений типа Баддена–Кравцова [9, 10] для абсолютных значений амплитуд

$$\begin{aligned} &2\frac{d\left|\mathscr{E}_H^{(1)}\right|}{ds} + U^{(1)}\left|\mathscr{E}_H^{(1)}\right| - \operatorname{Re}W\left|\mathscr{E}_H^{(2)}\right| = 0,\\ &2\frac{d\left|\mathscr{E}_H^{(2)}\right|}{ds} + U^{(2)}\left|\mathscr{E}_H^{(2)}\right| + \operatorname{Re}W\left|\mathscr{E}_H^{(1)}\right| = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$U^{(m)} = \frac{\partial^2\lambda^{(m)}}{\partial h_\alpha\partial p_\alpha} + \frac{\partial^2\lambda^{(m)}}{\partial p_\alpha\partial p_\beta}\operatorname{Re}V_{\alpha\beta}^{(m)},$$

$$W = \frac{\partial\left(\lambda^{(1)}+\lambda^{(2)}\right)}{\partial p_\alpha}\mathbf{x}^{(2)*T}\frac{\partial\mathbf{x}^{(1)}}{\partial h_\alpha}\frac{\mathscr{E}_H^{(1)}\mathscr{E}_H^{(2)*}}{\left|\mathscr{E}_H^{(1)}\right|\left|\mathscr{E}_H^{(2)}\right|}\times,$$
$$\times\exp\left(i\Psi^{(1)} - i\Psi^{(2)}\right).$$

Мнимые части уравнений (10) дают дисперсионные уравнения

$$\begin{aligned} &\lambda^{(m)} + \frac{\partial\lambda^{(m)}}{\partial p_\alpha}\hat{P}_\alpha^{(m)} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\lambda^{(m)}}{\partial p_\alpha\partial p_\beta}\operatorname{Im}V_{\alpha\beta}^{(m)} +\\ &\qquad + \frac{1}{2}\operatorname{Im}W\frac{\left|\mathscr{E}_H^{(3-m)}\right|}{\left|\mathscr{E}_H^{(m)}\right|} = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где введено обозначение $\hat{\mathbf{P}}^{(m)} = \partial\arg\mathscr{E}_H^{(m)}/\partial\mathbf{h} + \left|x_\alpha^{(m)}\right|^2\partial\arg x_\alpha^{(m)}/\partial\mathbf{h}$. Этот вектор, очевидно, определяет эволюцию фазы $\psi^{(m)} = \int\left(\partial\lambda^{(m)}/\partial\mathbf{p}\right)^T\hat{\mathbf{P}}^{(m)}ds$ функции $\mathscr{E}_H^{(m)}$ – дополнительного к $\Psi^{(m)}$ сдвига фазы пучка.

Формирование и рост мощности нового пучка происходят при условии фазовой когерентности, которое, как следует из (12) и (13), имеет вид $\operatorname{Im}W = 0$, $\operatorname{Re}W < 0$. Это условие определяет начальное значение функции $\Psi^{(2)}$. В случае $\left|U^{(m)}\right| \ll |W|$ темп перекачки энергии между двумя пучками можно оценить с помощью простого уравнения

$$\frac{d}{ds}\operatorname{arctg}\frac{\left|\mathscr{E}_H^{(2)}\right|}{\left|\mathscr{E}_H^{(1)}\right|} = -\frac{1}{2}\operatorname{Re}W, \quad (14)$$

которое приближенно соответствует системе (12). С ростом s величина $|\arg W|$ возрастает, так как в общем случае $\dot{\Psi}^{(1)} \neq \dot{\Psi}^{(2)}$. Начиная со значений $|\arg W| \sim 1$ резонансное взаимодействие двух мод практически прекращается, так как вклад противоположных по знаку полупериодов $\operatorname{Re}W$ почти полностью компенсируется. Весь интервал эффективного взаимодействия пучков оказывается короче, чем характерная длина участка, где $\dot{\mathbf{H}}^{(1)}$ и $\dot{\mathbf{H}}^{(2)}$ параллельны. Превращение пучков в независимо распространяющиеся подразумевает замены $\operatorname{Re}W \to 0$ и $\operatorname{Im}W \to 0$ в (12) и (13), после чего в процедуре ВТ может быть осуществлен обратный переход от $\mathbf{h}$- к $\mathbf{r}$-представлению и стандартной технике расчета.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе описан принцип модификации стандартного метода ВТ, позволяющей использовать его в зонах бифуркации микроволновых пучков в неоднородной плазме, сопровождающейся линейной трансформацией мод. Основным результатом статьи является описанный в разд. 2 метод перехода в 3-мерное гибридное пространственно-спектральное представление, выбранное таким образом, что в нем оси двух пучков локально совпадают. Это дает принципиальную возможность, оставаясь в рамках параксиального приближения, применять для расчетов в BZ обычные уравнения ВТ, за исключением амплитудных уравнений. Вероятно, этот метод может быть использован для понижения размерности и в ряде других волновых задач в трехмерно-неоднородных конфигурациях; он более универсален и гибок, чем использованный в [8] метод перехода в $\mathbf{k}$-представление.

В разд. 3 показано, что амплитуды взаимодействующих пучков в $\mathbf{h}$-представлении подчиняются системе связанных обыкновенных дифференциальных уравнений типа Баддена–Кравцова, которые переходят в стандартные независимые уравнения ВТ за пределами BZ. Полученные уравнения, как следует из их вывода, допускают обобщения на физически и практически интересные ситуации, в которых важен учет диссипации (BZ находится в области резонансного поглощения, темп которого весьма различен для участвующих мод). В типичных схемах электронно-циклотронного нагрева плазмы в токамаках и стеллараторах такие ситуации не являются экзотическими.

Детали численной реализации предложенного подхода в коде TRUBA [14], аналитические результаты, связанные с дисперсионными зависимостями мод и наличием диссипации, и демонстрационные расчеты будут содержаться в отдельной, более обширной статье.

Работа выполнена в рамках исследований по государственному заданию “Физика высокотемпературной плазмы. Фундаментальные проблемы динамики, удержания и нагрева плазмы в трехмерных магнитных конфигурациях” (НИОКТР АААА-А19-119121790086-9, тема № 0024-2019-0006).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. [Kravtsov Yu.A., Orlov Yu.I. Geometrical optics of inhomogeneous media. Berlin: Springer-Verlag, 1990.]
2. *Tracy E.R., Brizard A.J., Richardson A.S., Kaufman A.N.* Ray tracing and beyond: phase space methods in plasma wave theory. Cambridge: University Press, 2014.
3. *Тимофеев А.В.* // Физика плазмы. 1995. Т. 21. С. 646. [Timofeev A.V. // Plasma Phys. Rep. 1995. V. 21. P. 610.]
4. *Pereverzev G.V.* // Phys. Plasmas. 1998. V. 5. P. 3529. https://doi.org/10.1063/1.873070
5. *Poli E., Peeters A.G., Pereverzev G.V.* // Comput. Phys. Commun. 2001. V. 136. P. 90. https://doi.org/10.1016/S0010-4655(01)00146-1
6. *Tereshchenko M., Castejón F., Pavlov S., Cappa A.* // Phys. Scr. 2011. V. 84. 025401. https://doi.org/10.1088/0031-8949/84/02/025401
7. *Tereshchenko M., Castejón F., Cappa A.* // Plasma Phys. Control. Fusion. 2013. V. 55. 115011. https://doi.org/10.1088/0741-3335/55/11/115011
8. *Терещенко М.А.* // Физика плазмы. 2017. Т. 43. С. 9. [Tereshchenko M.A. // Plasma Phys. Rep. 2017. V. 43. P. 18. doi:10.1134/S1063780X17010123]
9. *Железняков В.В., Кочаровский В.В., Кочаровский Вл.В.* // УФН. 1983. Т. 141. С. 257. [Zheleznyakov V.V., Kocharovskii V.V., Kocharovskii Vl.V. // Sov. Phys. Usp. 1983. V. 26. P. 877. doi:10.1070/PU1983v026n10ABEH004518]
10. *Кравцов Ю.А., Найда О.Н., Фуки А.А.* // УФН. 1996. Т. 166. С. 141. [Kravtsov Yu.A., Naida O.N., Fuki A.A. // Phys. Usp. 1996. V. 39. P. 129. doi:10.1070/PU1996v039n02ABEH000131]
11. *Тимофеев А.В.* // Физика плазмы. 2000. Т. 26. С. 874. [Timofeev A.V. // Plasma Phys. Rep. 2000. V. 26. P. 820. doi:10.1134/1.1316823]
12. *Bornatici M., Cano R., De Barbieri O., Engelmann F.* // Nucl. Fusion. 1983. V. 23. P. 1153. https://doi.org/10.1088/0029-5515/23/9/005
13. *Маслов В.П., Федорюк М.В.* Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука, 1976. [Maslov V.P., Fedoriuk M.V. Semiclassical approximation in quantum mechanics. Dordrecht: D. Reidel Pub. Co., 1981.]
14. *Tereshchenko M., Castejón F., Cappa A.* TRUBA User Manual. Informes Técnicos CIEMAT No.1134, 2008.