

УДК 533.9.01

ВЛИЯНИЕ АНИЗОТРОПИИ ДАВЛЕНИЯ НА ДИАМАГНИТНЫЙ СИГНАЛ В ТОКАМАКЕ С НЕКРУГЛОЙ ПЛАЗМОЙ

© 2021 г. В. Д. Пустовитов^{a, b, *}, Е. А. Рябушев^{a, c}

^a Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”, Москва, Россия

^b Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, Россия

^c Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

*e-mail: Pustovitov_VD@nrcki.ru

Поступила в редакцию 15.02.2021 г.

После доработки 30.04.2021 г.

Принята к публикации 18.05.2021 г.

Анализируется связь диамагнитного сигнала с током и давлением анизотропной плазмы в токамаке. Она хорошо известна для цилиндрической плазмы круглого сечения, но здесь форма плазмы считается произвольной и учитывается тороидальность системы в комбинации с анизотропией. Это существенно усложняет вычисления и требует интегрирования обобщенного уравнения Грэда–Шафранова. Аналитические вычисления выполняются по схеме, применявшейся для изотропной плазмы в [Pustovitov V.D., Fusion Eng. Des. 2017. V. 117. P. 1]. Сделаны оценки большой группы слагаемых, возникающих из-за анизотропии, и выделен главный эффект. Результат готов для практического использования.

Ключевые слова: токамак, диамагнитный сигнал, анизотропное давление

DOI: 10.31857/S0367292121100061

1. ВВЕДЕНИЕ

Диамагнитные измерения принадлежат к стандартному набору методов диагностики плазмы, применяемых на всех действующих токамаках и стеллараторах [1–31]. Обычно при вычислении созданного плазмой тороидального магнитного потока

$$\Delta\Phi_{pl} \equiv \int_{pl} (\mathbf{B} - \mathbf{B}^e) d\mathbf{S}_{pl}, \quad (1)$$

где \mathbf{B} – полное магнитное поле, \mathbf{B}^e – магнитное поле, порожденное внешними по отношению к плазме источниками, а интегрирование осуществляется по ее поперечному сечению S_{pl} ($d\mathbf{S}_{pl}$ – элемент его площади), плазма предполагается изотропной, однако при неомическом нагреве на современных установках она может оказаться существенно анизотропной [6, 7, 9, 19, 22, 23, 31–41]. В этом случае теория предлагает использовать выражение [42–45]

$$2 \frac{\Delta\Phi_{pl}}{\Phi_0} = \frac{B_J^2}{B_0^2} - \beta_{\perp}, \quad (2)$$

связывающее $\Delta\Phi_{pl}$ с полным тороидальным магнитным потоком Φ_0 через сечение S_{pl} , полоидальным магнитным полем B_J на его границе, ва-

кумным тороидальным магнитным полем B_0 на геометрической кольцевой оси системы и β_{\perp} – отношением усредненного по S_{pl} поперечного давления плазмы p_{\perp} к магнитному давлению. Также известно обобщение на случай эллиптической формы S_{pl} с вытянутостью K

$$\Delta\Phi_{pl} = \frac{\mu_0 J_{pl}^2}{8\pi B_0} \frac{2K}{K^2 + 1} (1 - \beta_{\perp p}), \quad (3)$$

где J_{pl} – полный тороидальный ток. Вывод (3) и определение “полоидальной” беты $\beta_{\perp p}$ даны в [43], см. там уравнения (5) и (15). При равенстве продольного p_{\parallel} и поперечного p_{\perp} давлений формулы (2) и (3) с $K = 1$ воспроизводят широко известный классический результат, полученный более 60 лет тому назад [46–48]. Основные элементы в задаче иллюстрируются рис. 1.

В выражении (3), варианты которого можно найти в [1, 2, 18, 22, 31], единственным геометрическим параметром является K , от которого неявно зависит и $\beta_{\perp p}$. В действительности форма плазмы часто отличается от эллипса, поэтому (3) дает лишь оценку. Еще одно неявное ограничение связано с использованием при выводе (3) приближения большого аспектного отношения A (от-

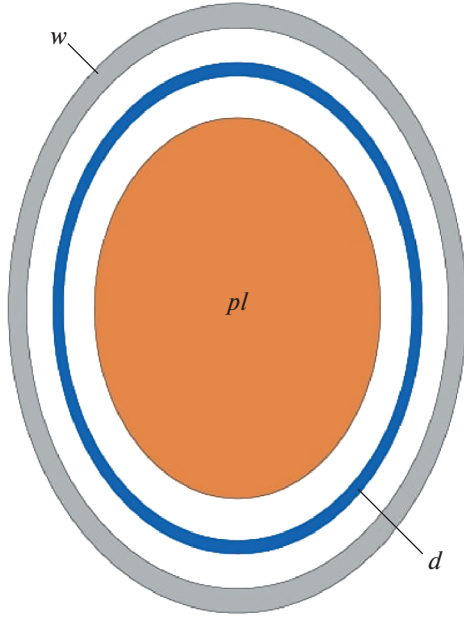


Рис. 1. Схематическое изображение основных элементов в задаче. Внешняя оболочка w — вакуумная камера (стенка), центральная часть pl — плазма. В вакуумном зазоре плазма-стенка показана диамагнитная петля d , лежащая в плоскости, перпендикулярной тороидальной оси.

ношение большого радиуса плазмы к малому). В [49] показано, что формулы, полученные для $\Delta\Phi_{pl}$ как асимптотики при $A \gg 1$, при $A \rightarrow 1$ дают завышенную в 2–10 раз оценку запасенной в плазме энергии. Это означает, что они заведомо неверны для сферических токамаков. При увеличении A ошибка (2) и (3) уменьшается. Для обычных токамаков с $A \approx 3$ она должна быть на уровне $O(1/A^2)$, но при нынешней точности измерений даже это становится существенным недостатком.

Для изотропной плазмы общее соотношение, пригодное при любой форме S_{pl} и без ограничений на A , в линейном приближении по диамагнитному эффекту плазмы имеет вид [50]

$$I_g \Delta\Phi_{pl} = C_J J_{pl}^2 - C_p \int_{pl} p d\tau, \quad (4)$$

где $I_g = 2\pi R_0 B_0 / \mu_0$ — полный внешний полоидальный ток, R_0 — большой радиус центра вакуумной камеры, интегрирование ведется по всему объему плазмы ($d\tau$ — его элемент), $C_p \approx 1$, а C_J — положительная константа, которая находится из решения уравнения равновесия, см. определение (36) ниже. Например, для эллиптической плазмы

зависимость C_J от вытянутости K можно аппроксимировать равенством [50]

$$C_J \approx \frac{\mu_0}{2} \frac{K}{K^2 + 1} R_0, \quad (5)$$

тогда (4) даст нам аналог (3).

Целью настоящей работы является обобщение (4) на анизотропный случай. По выводу оно должно быть более точным, чем (3). Окончательный результат оказывается компактным для обычных токамаков, но для систем с малым A он показывает, что анизотропия давления плазмы приводит к еще большим отличиям, чем было обнаружено в [49].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для вычисления $\Delta\Phi_{pl}$, производимого аксиально-симметричной плазмой произвольной формы, будем использовать метод, предложенный в [50]. Там он применялся в предположении $p_{\perp} = p_{\parallel} = p$, а здесь в уравнении равновесия

$$\nabla \cdot \vec{p} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (6)$$

будем различать продольное и поперечное давления в тензоре

$$\vec{p} \equiv p_{\parallel} \frac{\mathbf{B}\mathbf{B}}{B^2} + p_{\perp} \left(\vec{E} - \frac{\mathbf{B}\mathbf{B}}{B^2} \right). \quad (7)$$

Здесь $\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B} / \mu_0$ — плотность электрического тока, а \vec{E} — единичный тензор.

Равновесие анизотропной плазмы на основе уравнений (6) и (7) хорошо изученная область, см. [35, 39, 51–62]. Нам потребуется их следствие

$$\nabla p_{\parallel} = \sigma_{\parallel} \nabla \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \mathbf{K} \times \mathbf{B}, \quad (8)$$

где

$$\mu_0 \mathbf{K} \equiv \nabla \times (\sigma \mathbf{B}) \quad (9)$$

и

$$\sigma_{\parallel} \equiv \frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{B^2 / \mu_0}, \quad \sigma \equiv 1 - \sigma_{\parallel}. \quad (10)$$

Как известно, в конечном итоге из (8) и уравнений Максвелла при аксиальной симметрии получается анизотропный аналог уравнения Грэда–Шафранова [52, 55, 57, 63]

$$\frac{K_{\zeta}}{2\pi r} = -\nabla \cdot \frac{\sigma \nabla \Psi}{4\pi^2 \mu_0 r^2} = \frac{\partial p_{\parallel}}{\partial \Psi} + \mu_0 \frac{F_k F'_k(\Psi)}{4\pi^2 \sigma r^2}. \quad (11)$$

Здесь

$$K_{\zeta} \equiv \mathbf{K} \cdot \mathbf{e}_{\zeta} = \sigma j_{\zeta} + \frac{\nabla \sigma_{\parallel} \cdot \nabla \Psi}{2\pi r \mu_0}, \quad (12)$$

$F_k = \sigma I$ является функцией магнитной поверхности [52, 55, 57, 63], штрих обозначает производную, а величины

$$\psi(r, z) \equiv \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_{pol} = 2\pi \int_0^r \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_z r dr \quad (13)$$

и

$$I(r, z) \equiv \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}_{pol} = 2\pi \int_0^r \mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_z r dr \quad (14)$$

имеют смысл полоидального магнитного потока и тока соответственно. Магнитное поле \mathbf{B} связано с ними равенством

$$2\pi \mathbf{B} = \nabla \psi \times \nabla \zeta + \mu_0 I \nabla \zeta, \quad (15)$$

где ζ – тороидальный угол в стандартной цилиндрической системе координат (r, ζ, z) , показанной на рис. 2.

Нашей целью будет вычисление величины

$$\Delta \Phi_{pl} = \frac{1}{2\pi} \int_{pl} (\mathbf{B} - \mathbf{B}^e) \cdot \nabla \zeta d\tau = \frac{\mu_0}{4\pi^2} \int_{pl} \frac{I - I_g}{r^2} d\tau, \quad (16)$$

где I_g – это значение I в вакуумном зазоре между стенкой и плазмой. Последнее равенство в (16) получается подстановкой (15) в определение (1).

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ $\Delta \Phi_{pl}$

Интеграл в (16) определяется разностью $I - I_g$. Чтобы связать ее с величиной

$$F_k F'_k(\psi) = \frac{1}{2} \frac{d}{d\psi} (F_k^2 - I_g^2) \quad (17)$$

из уравнения (11), воспользуемся тождеством

$$I - I_g = \sigma_{\parallel} I_g + \frac{1}{2\sigma I_g} [F_k^2 - I_g^2 - (F_k - I_g)^2 + 2\sigma_{\parallel}^2 I_g^2], \quad (18)$$

где, напомним, $F_k = \sigma I$. В обычных токамаках всегда $|F_k/I_g - 1| \ll 1$ и $|\sigma_{\parallel}| \ll 1$, поэтому в (18) можно пренебречь последними двумя слагаемыми, квадратичными по этим малым параметрам.

При такой подстановке из (16) получим

$$\begin{aligned} \frac{8\pi^2}{\mu_0} I_g \Delta \Phi_{pl} &= \int_{pl} \frac{F_k^2 - I_g^2 + 2\sigma_{\parallel}^2 I_g^2}{\sigma r^2} d\tau = \\ &= \int_{pl} \left[(F_k^2 - I_g^2) \left\langle \frac{1}{\sigma r^2} \right\rangle + 2I_g^2 \left\langle \frac{\sigma_{\parallel}^2}{r^2} \right\rangle \right] dV, \end{aligned} \quad (19)$$

где введена операция усреднения

$$\langle f \rangle \equiv \frac{d}{dV} \int_V f d\tau \quad (20)$$

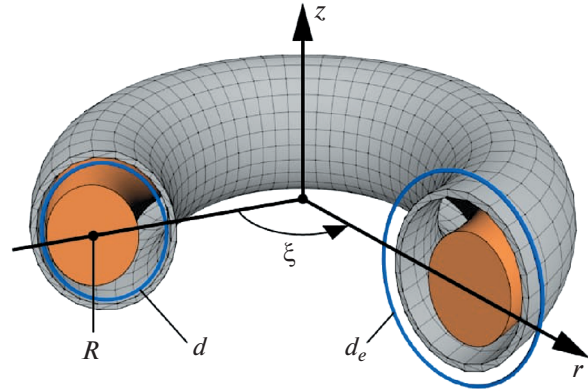


Рис. 2. Геометрия задачи и используемые обозначения. Плазма с большим радиусом R отделена от стенки токамака вакуумным зазором. Показаны два типа используемых в токамаках диамагнитных петель – внутри (d) и снаружи (d_e) вакуумной камеры. (r, ζ, z) – цилиндрические координаты, связанные с главной осью симметрии токамака.

по объему тороидального слоя dV между соседними магнитными поверхностями $\psi(V) = \text{const}$. Постоянство F_k и I_g на магнитной поверхности позволило перейти в (19) от трехмерного интегрирования по $d\tau$ к одномерному по dV .

Далее, следуя алгоритму, предложенному в [50], усредним уравнение (11) по правилу (20). Результат этой операции

$$\psi'(V) J'_k(V) = \left\langle \frac{\partial p_{\parallel}}{\partial V} \right\rangle + \frac{\mu_0}{8\pi^2} \left\langle \frac{1}{\sigma r^2} \right\rangle \frac{d}{dV} (F_k^2 - I_g^2), \quad (21)$$

где

$$J_k(V) \equiv \int_V \frac{K_{\zeta}}{2\pi r} d\tau, \quad (22)$$

умножим на функцию h_k , определенную равенством

$$\left\langle \frac{1}{\sigma r^2} \right\rangle h_k(V) \equiv \int_0^V \left\langle \frac{1}{\sigma r^2} \right\rangle dV, \quad (23)$$

и проинтегрируем по всему объему плазмы. На ее границе $F_k|_{\text{boundary}} = I_g$, поэтому получим

$$\begin{aligned} \int_{pl} (F_k^2 - I_g^2) \left\langle \frac{1}{\sigma r^2} \right\rangle dV = \\ = \int_{pl} \left[h_k \left\langle \frac{\partial p_{\parallel}}{\partial V} \right\rangle - \psi'(V) J'_k(V) h_k \right] dV. \end{aligned} \quad (24)$$

Подстановка этого равенства в (19) приводит к

$$I_g \Delta \Phi_{pl} = \int_{pl} \left[h_k \left\langle \frac{\partial p_{\parallel}}{\partial V} \right\rangle + \frac{\mu_0 I_g^2}{4\pi^2} \left\langle \frac{\sigma_{\parallel}}{r^2} \right\rangle \right] dV - \int_{pl} \Psi'(V) J'_k(V) h_k dV. \quad (25)$$

Это аналог выражения (50) из работы [50], к которому (25) сводится при $p_{\parallel} = p_{\perp}$.

Первый интеграл в правой части (25) преобразуется к виду

$$-\int_{pl} \frac{dh_k}{dV} \langle p_{\perp} \rangle dV + \int_{pl} [\varepsilon_1 + h_k D(p_{\parallel})] dV, \quad (26)$$

где

$$\varepsilon_1 \equiv \left\langle \frac{\sigma_{\parallel} (B_{ig}^2 - B_t^2)}{\mu_0} \right\rangle + \left(1 - \frac{dh_k}{dV} \right) \left\langle \frac{\sigma_{\parallel} B_t^2}{\mu_0} \right\rangle - \frac{dh_k}{dV} \left\langle \frac{\sigma_{\parallel} B_p^2}{\mu_0} \right\rangle, \quad (27)$$

$$D(p_{\parallel}) \equiv \left\langle \frac{\partial p_{\parallel}}{\partial V} \right\rangle - \frac{d}{dV} \langle p_{\parallel} \rangle, \quad (28)$$

$B_{ig} = B_0 R_0 / r = \mu_0 I_g / (2\pi r)$ – вакуумное тороидальное поле, $B_t = \mu_0 I / (2\pi r)$ – полное тороидальное поле, а $B_p = |\nabla \Psi| / (2\pi r)$ – полоидальное поле. Переход к (26) производится путем вычитания из выражения в скобках [...] в (25) комбинации

$$h_k \frac{d}{dV} \langle p_{\parallel} \rangle + \frac{dh_k}{dV} \langle p_{\perp} \rangle + \left\langle \frac{\sigma_{\parallel} B_t^2}{\mu_0} \right\rangle \quad (29)$$

с учетом соотношений (10), $\mathbf{B}^2 = B_t^2 + B_p^2$ и

$$\int_{pl} h_k \frac{d}{dV} \langle p_{\parallel} \rangle dV = - \int_{pl} \frac{dh_k}{dV} \langle p_{\parallel} \rangle dV. \quad (30)$$

Отметим, что для изотропной плазмы $\varepsilon_1 = D(p_{\parallel}) = 0$, и тогда в (26) остается только первое слагаемое. В следующем разделе показано, что при типичных параметрах токамака второй интеграл в (26) является малой поправкой, поэтому им можно пренебречь и для плазмы с $p_{\parallel} \neq p_{\perp}$.

Входящая в (25) величина

$$J_k(V) = J(V) + \int_V \operatorname{div} \frac{\sigma_{\parallel} \nabla \Psi}{4\pi^2 r^2 \mu_0} d\tau = J(V) + \frac{dV}{d\Psi} \left\langle \frac{\sigma_{\parallel} B_p^2}{\mu_0} \right\rangle \quad (31)$$

лишь ненамного отличается от полного тороидального тока

$$J(V) \equiv \int_V \frac{j_{\zeta}}{2\pi r} d\tau = \int_V \nabla \cdot \frac{\nabla \Psi}{4\pi^2 r^2 \mu_0} d\tau = - \frac{\alpha_{22} \Psi'(V)}{\mu_0}, \quad (32)$$

текущего внутри магнитной поверхности $\Psi(V) = \text{const}$. Здесь использовано тождество

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{q} d\tau = \int_V \langle \nabla \cdot \mathbf{q} \rangle dV = \langle \mathbf{q} \cdot \nabla V \rangle \quad (33)$$

и введено обозначение

$$\alpha_{22} \equiv \frac{1}{4\pi^2} \left\langle \frac{|\nabla V|^2}{r^2} \right\rangle. \quad (34)$$

Подстановка (31) во второй интеграл в (25) дает

$$-\int_{pl} \Psi'(V) J'_k(V) h_k dV = C_J^a J_{pl}^2 + \int_{pl} \varepsilon_2 dV, \quad (35)$$

где

$$\frac{2}{\mu_0} C_J^a \equiv \frac{h_k}{\alpha_{22} b} \Big|_{pl} - \int_{pl} \frac{J^2}{J_{pl}^2} \frac{d}{dV} \left(\frac{h_k}{\alpha_{22}} \right) dV, \quad (36)$$

а

$$\varepsilon_2 \equiv \left\langle \frac{\sigma_{\parallel} B_p^2}{\mu_0} \right\rangle \left[\frac{dh_k}{dV} + \frac{h_k \Psi''(V)}{\Psi'(V)} \right]. \quad (37)$$

Первое слагаемое в правой части (35) получается с учетом равенства

$$\Psi'(V) J'(V) = - \frac{\mu_0}{2\alpha_{22}} \frac{dJ^2}{dV}, \quad (38)$$

которое следует из (32), а второе находится путем интегрирования по частям

$$\begin{aligned} & - \int_{pl} \Psi'(V) h_k \frac{d}{dV} (J_k - J) dV = \\ & = \int_{pl} \left[\frac{dh_k}{dV} + \frac{h_k \Psi''(V)}{\Psi'(V)} \right] \left\langle \frac{\sigma_{\parallel} B_p^2}{\mu_0} \right\rangle dV, \end{aligned} \quad (39)$$

где учтено (31) и его следствие, что $J_k - J = 0$ на магнитной оси и на границе плазмы. При $p_{\perp} = p_{\parallel}$ величина ε_2 обращается в ноль, а выражение (35) переходит во второе слагаемое из (4).

При помощи (26) и (35) формула (25) преобразуется к виду

$$I_g \Delta \Phi_{pl} = C_J^a J_{pl}^2 - C_p^a \int_{pl} p_{\perp} d\tau + \int_{pl} [\varepsilon + h_k D(p_{\parallel})] dV, \quad (40)$$

где

$$C_p^a \int_{pl} p_{\perp} d\tau \equiv \int_{pl} \frac{dh_k}{dV} \langle p_{\perp} \rangle dV, \quad (41)$$

а $\varepsilon \equiv \varepsilon_1 + \varepsilon_2$.

Для изотропной плазмы ϵ и $D(p_{\parallel})$ обращаются в ноль, множители C_J^a и C_p^a превращаются в C_J и C_p из (4), а (40) в точности воспроизводит (4).

4. КОЭФФИЦИЕНТЫ И ПОПРАВКИ В (40)

При $p_{\perp} = p_{\parallel} = p$, что предполагалось при выводе (4), замена $p \rightarrow p_{\perp}$ в (4) ничего не меняет, но облегчает сравнение (4) с (40). Их сходство усиливается, если заметить, что в (40) коэффициенты C_J^a и C_p^a можно с хорошей точностью заменить на C_J и C_p из (4).

Действительно, из (23) следует, что

$$h_k/h = 1 + O(\sigma_{\parallel}), \quad (42)$$

где h есть значение h_k при $\sigma_{\parallel} = 0$, т. е. для изотропной плазмы. Анизотропия входит в определение C_J^a только через h_k , поэтому

$$C_J^a/C_J = 1 + O(\sigma_{\parallel}). \quad (43)$$

При типичных условиях в токамаках величина $2\sigma_{\parallel} = O(\beta_{\parallel} - \beta_{\perp})$ может достигать значений лишь на уровне 0.01. Это и позволяет пренебречь отличием h_k от h в (36) и с хорошей точностью полагать $C_J^a = C_J$ при вычислении $\Delta\Phi_{pl}$.

Далее, из (23) видно, что

$$1 - dh_k/dV = h_k(V) \frac{d}{dV} \left\langle \frac{1}{\sigma r^2} \right\rangle \bigg/ \left\langle \frac{1}{\sigma r^2} \right\rangle \approx \approx V \frac{d}{dV} \left\langle \sigma_{\parallel} + 2x/R_c + 3x^2/R_c^2 \right\rangle, \quad (44)$$

где $x = R_c - r$, $R_c = R_0 + \Delta(a)$ — большой радиус магнитной поверхности с горизонтальной полуосью a , а $\Delta(a)$ — ее смещение относительно центра вакуумной камеры. В последнем равенстве мы сохранили только слагаемые, линейные по σ_{\parallel} и вплоть до квадратичных по x/R_c . Из (44) получается

$$h_k/V = 1 + O(b^2/R_0^2) + O(\sigma_{\parallel}) + O(\Delta' b/R_0), \quad (45)$$

где b — малый радиус, а штрих обозначает производную. Учет тороидальных эффектов в выражениях для $\Delta\Phi_{pl}$ обсуждался в [47, 48, 59, 64]. Обусловленные ими поправки к $\Delta\Phi_{pl}$, которые автоматически учитываются в C_J и C_p , могут быть на порядок выше, чем $O(\sigma_{\parallel})$, потому что у многих токамаков, включая JET и ITER, $A \equiv R_0/b \approx 3$. В стандартных моделях равновесия плазмы

$$\Delta'(a) = -\frac{a}{R_c} [\beta_p + l_i/2], \quad (46)$$

где $\beta_p = 2\mu_0(p - \bar{p})/B_p^2$ — полоидальная бета, $l_i = \bar{B}_p^2/B_p^2$ — внутренняя индуктивность плазмы на единицу длины (величина порядка единицы), а горизонтальная черта означает усреднение по поперечному сечению S_{pl} . При численных расчетах с $A \approx 3$ тороидальные поправки можно заметить на уровне 0.1, но они будут существенными в компактных системах.

В любом случае проделанные оценки показывают, что в формуле (40) константы (C_J^a, C_p^a) практически совпадают с (C_J, C_p), вычисленными с точным учетом тороидальности. Тогда в (40) остается оценить лишь последний интеграл с $\epsilon + h_k D(p_{\parallel})$, равный нулю при $p_{\perp} = p_{\parallel}$.

Покажем, что при умеренных и тем более больших значениях A им можно пренебречь и при $p_{\parallel} \neq p_{\perp}$. Начнем с того, что все слагаемые с p_{\perp} в $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$ содержат малые параметры $(B_{ig}^2 - B_i^2)/B^2$, B_p^2/B^2 и $1 - dh_k/dV$. Поэтому для обычных токамаков этой частью ϵ (назовем ее ϵ_{\perp}) можно пренебречь по сравнению с явным интегралом от p_{\perp} в (40).

Ситуация с $\epsilon_{\parallel} = \epsilon - \epsilon_{\perp}$ несколько иная, поскольку интеграл от $\epsilon_{\parallel} + h_k D(p_{\parallel})$ приходится сравнивать с первыми членами в (40), содержащими J_{pl} и поперечное давление p_{\perp} . Проблема возникает только при $p_{\parallel} \gg p_{\perp}$ или $p_{\perp} \rightarrow 0$, когда основное слагаемое с p_{\perp} становится малым, и ее проще всего проиллюстрировать, обратившись к цилиндрическому пределу для плазмы с круглым сечением.

В этом случае $\Delta = 0$, а p_{\parallel} , p_{\perp} и B^2 зависят только от полярного радиуса ρ . Тогда продольная проекция уравнения

$$\nabla p_{\perp} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \frac{1}{\mu_0} [\sigma_{\parallel} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{B} (\mathbf{B} \cdot \nabla \sigma_{\parallel})], \quad (47)$$

эквивалентного (8), удовлетворяется тождественно, а поперечная сводится к

$$\mu_0 \frac{dp_{\perp}}{d\rho} = -\frac{d}{d\rho} \frac{B^2}{2} - \sigma \frac{B_0^2}{\rho}, \quad (48)$$

где B_0 — полоидальная компонента магнитного поля в цилиндре. Ясно, что отличие σ от единицы практически не повлияет на $\Delta\Phi_{pl}$, вычисляемый из (48) стандартным образом. Однако замена $\sigma \rightarrow 1$ полностью уничтожает зависимость $\Delta\Phi_{pl}$ от p_{\parallel} в (48).

Если же стремиться к большей точности и сохранить σ_{\parallel} в $\sigma \equiv 1 - \sigma_{\parallel}$, то и в

$$B_r^2 - B_0^2 = 2B_0(B_r - B_0) + (B_r - B_0)^2 \quad (49)$$

следует оставить последнее слагаемое. Тогда после интегрирования (48) с естественными граничными условиями $p_{\perp}(b) = 0$, $B_r(b) = B_0$ и $B_{\theta}(b) = B_J$ получится

$$2 \frac{\Delta \Phi_{pl}}{\Phi_0} = \frac{B_J^2}{B_0^2} - \beta_{\perp} - \frac{\sigma_{\parallel} B_{\theta}^2}{B_0^2} - \frac{(B_r - B_0)^2}{B_0^2}, \quad (50)$$

где $\beta_{\perp} \equiv 2\mu_0 \bar{p}_{\perp} / B_0^2$. Последней малой поправкой всегда пренебрегают еще на стадии вычисления $\Delta \Phi_{pl}$, как это делалось при переходе от (18) к (19).

В (50) она дает вклад порядка $(\Delta \Phi_{pl} / \Phi_0)^2$, который можно не учитывать даже при $\Delta \Phi_{pl} / \Phi_0 = 0.01$, что соответствует $\beta_{\perp} = 0.02$. В этой модели $B_J / B_0 = b / (qR_0)$, где q – запас устойчивости, поэтому $B_J^2 / B_0^2 = 1 / (9q^2)$ при $R_0 = 3b$. Слагаемое с σ_{\parallel} в (50) заведомо меньше, чем $0.5(\beta_{\parallel} - \beta_{\perp}) B_J^2 / B_0^2$, поэтому в нашем примере $\sigma_{\parallel} B_{\theta}^2 / B_0^2 < (\beta_{\parallel} - \beta_{\perp}) / 72$ при $q > 2$.

Таким образом, сохраняя последние два слагаемых в (50), вместо привычного (2) с поперечным давлением получим

$$2 \frac{\Delta \Phi_{pl}}{\Phi_0} = \frac{B_J^2}{B_0^2} - C_{p0}(\beta_{\perp} + \alpha \beta_{\parallel}), \quad (51)$$

где C_{p0} – цилиндрический аналог C_p , а α – малая величина порядка B_J^2 / B_0^2 . Кроме того, $D(p_{\parallel}) \neq 0$ даже в цилиндре, если плазма не круглая.

Чтобы оценить $h_k D(p_{\parallel})$ с учетом тороидальности, воспользуемся приведенными в [60, 65] частными решениями продольной компоненты уравнения (8)

$$p_{\perp} = p_{\perp 0}(V) + p_{\perp 1}(V) \frac{B_m - B}{B} \quad (52)$$

и

$$p_{\parallel} = p_{\parallel 0}(V) + (p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}) \frac{B - B_m}{B_m} + \frac{p_{\perp 1}(B - B_m)^2}{2 B B_m}, \quad (53)$$

где $p_{\perp 0}$, $p_{\perp 1}$ и $p_{\parallel 0}$ – функции магнитной поверхности, а $B_m = B_m(V)$ – значение магнитного поля в точке, где $p_{\perp} = p_{\perp 0}$ и $p_{\parallel} = p_{\parallel 0}$. При этом угловая зависимость p_{\parallel} содержится в $B - B_m$. Выражения (52) и (53) можно рассматривать в качестве первых членов разложения p_{\perp} и p_{\parallel} по функциям $(B_m / B - 1)^n$.

Подстановка (53) в (28) дает

$$D(p_{\parallel}) = (p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}) D(B / B_m) + (p_{\perp 1} / 2) [D(B / B_m) + D(B_m / B)]. \quad (54)$$

В токамаках наибольшая неоднородность магнитного поля связана с тороидальностью. Для оценок будем считать $B_m / B \approx r / r_m$, при этом выберем $r_m = R_c$. В таком приближении частную производную по V при постоянном B из определения $D(p_{\parallel})$ следует вычислять при постоянном r . Тогда в (54) достаточно найти лишь

$$D((r_m - r) / r) = \left\langle \frac{\partial}{\partial V} \left[\frac{x}{r} - \left\langle \frac{x}{r} \right\rangle \right] \right\rangle \quad (55)$$

и

$$D((r_m - r)^2 / (r r_m)) = \left\langle \frac{\partial}{\partial V} \left[\frac{x^2}{r R_c} - \left\langle \frac{x^2}{r R_c} \right\rangle \right] \right\rangle, \quad (56)$$

поскольку

$$\frac{r_m}{r} = 1 + \frac{x}{r}, \quad (57)$$

$$\frac{r_m}{r} + \frac{r}{r_m} = 2 + \frac{x^2}{r R_c}, \quad (58)$$

где $x = R_c - r$. Отсюда сразу следует, что $VD((r_m - r) / r) \leq O(a / R_c)$ и $VD((r_m - r)^2 / (r r_m)) \leq O(a^2 / R_c^2)$.

Уточним эти оценки для плазмы, магнитные поверхности которой предполагаются смещенными эллипсами с горизонтальной полуосью a и вытянутостью $K = K(a)$:

$$r = R_c - a \cos \theta, \quad (59)$$

$$z = Ka \sin \theta, \quad (60)$$

где θ – аналог полоидального угла. Этот случай был подробно рассмотрен в [66], см. там (3.24) и далее. Здесь мы воспользуемся равенствами (3.34) и (3.35) из [66], согласно которым

$$\left\langle \frac{x}{r} \right\rangle = \frac{2\pi Ka}{V'(a)} \times \quad (61)$$

$$\times \int_0^{2\pi} a \cos \theta (1 - \Delta' \cos \theta + d \sin^2 \theta) d\theta \approx -\frac{a \Delta'}{2R_c}$$

и

$$\left\langle \frac{x^2}{r R_c} \right\rangle = \frac{2\pi Ka}{R_c V'(a)} \times \quad (62)$$

$$\times \int_0^{2\pi} a^2 \cos^2 \theta (1 - \Delta' \cos \theta + d \sin^2 \theta) d\theta \approx \frac{a^2}{2R_c^2},$$

где $V'(a) = 4\pi^2 Ka R_c (1 + a \Delta' / 2R_c + d)$, $d \equiv a K' / (2K)$ предполагается малой, а при вычислении мы со-

хранили слагаемые вплоть до квадратичных по a/R_c и Δ' .

Далее, по тем же формулам получим

$$\left\langle \frac{\partial x}{\partial V r} \right\rangle \approx \frac{1}{V'} \left\langle \frac{\Delta'}{r} \right\rangle \approx \frac{\Delta'}{V' R_c} \quad (63)$$

и

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial x^2}{\partial V r R_c} \right\rangle &\approx \frac{\Delta'}{V' R_c} \left\langle \frac{2x}{r} - \frac{x^2}{r R_c} \right\rangle = \\ &= -\frac{\Delta'}{V' R_c} \left(\frac{a\Delta'}{R_c} + \frac{a^2}{2R_c^2} \right). \end{aligned} \quad (64)$$

Подстановка этих оценок в (55) и (56) дает

$$D(x/r) \approx \frac{\Delta' - a\Delta''}{V' R_c} \quad (65)$$

и

$$D(x^2/(rR_c)) \approx -\frac{a/R_c}{V' R_c}, \quad (66)$$

откуда следует, что

$$VD(p_{\parallel}) \approx (p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}) \frac{a(\Delta' - a\Delta'')}{R_c} + \frac{a^2 p_{\perp 1}}{R_c^2}. \quad (67)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} h_k D(p_{\parallel}) \leq &\langle p_{\parallel} - p_{\perp} \rangle [O(a\Delta'/R_c) + \\ &+ O(a^2\Delta''/R_c) + O(a^2/R_c^2)]. \end{aligned} \quad (68)$$

Следовательно интеграл от $h_k D(p_{\parallel})$ в (40) вносит в $\Delta\Phi_{pl}/\Phi_0$ вклад порядка $0.1(\beta_{\parallel} - \beta_{\perp})$ при $R_0 = 3b$. В итоге поправкой с $h_k D(p_{\parallel})$ можно пренебречь по сравнению с основным слагаемым с p_{\perp} для не слишком компактных токамаков.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для интерпретации данных диамагнитных измерений в обычных токамаках более точной формулой, чем (4) или более простые частные следствия (2) или (3), должна быть

$$I_g \Delta\Phi_{pl} = C_J J_{pl}^2 - C_p \int_{pl} p_{\perp} d\tau + \delta, \quad (69)$$

где C_J — коэффициент, зависящий от решения уравнения равновесия, как это показано в разделе 3, величина $C_p \approx 1$, а δ — малая поправка, оценка которой проведена в разделе 4. Точные значения C_J и C_p даются формулами (36) и (41), в которых функцию h_k следует вычислять, заменив σ в (23) на единицу. Иначе говоря, для анизотропной плазмы достаточно вычислить единственный коэффициент C_J , причем в простейшем случае с

$p_{\parallel} = p_{\perp}$, а C_p заменить на единицу. При этом вычисления по формуле (69) оказываются много проще, чем громоздкие стандартные расчеты равновесия для каждого отдельного случая (как, например, в [31]).

Можно сказать, что анизотропия тороидальной плазмы произвольной формы учитывается заменой $p \rightarrow p_{\perp}$ в (4). Этот результат согласуется с ожиданиями, основанными на часто применяемых “цилиндрических” формулах (2) и (3), хотя их следует считать приближенным. Они действительно дают связь $\Delta\Phi_{pl}$ с p_{\perp} , но не учитывают появляющуюся в более высоком порядке разложения зависимость $\Delta\Phi_{pl}$ от p_{\parallel} , которую мы символически включили в (69) в δ .

Отсутствие p_{\parallel} в (69) указывает на более сильную зависимость $\Delta\Phi_{pl}$ от p_{\perp} , что иллюстрируется простым, но более точным чем (2) равенством (50) в цилиндрическом пределе, в котором β_{\parallel} входит с малым параметром B_0^2/B_0^2 . В (69) к этому добавляются поправки, связанные с тороидальностью. Проведенные оценки слагаемых с p_{\parallel} показывают, что они могут повлиять на $\Delta\Phi_{pl}$ при $p_{\parallel} \gg p_{\perp}$, особенно в компактных токамаках, как, например, NSTX [67], MAST [68] или обсуждавшиеся в [49, 69–71].

В обычных токамаках конечное приращение p_{\parallel} при постоянном p_{\perp} может отразиться на $\Delta\Phi_{pl}$ на уровне 0.1 по сравнению с вкладом от p_{\perp} при $A \geq 3$, но это уже будет на пределе точности диамагнитных измерений.

Величина $\Delta\Phi_{pl}$ является частью полного сигнала Φ_d через диамагнитную петлю. Будучи главной целью магнитных измерений, она задает необходимую точность определения других вкладов в Φ_d . Практические аспекты выделения $\Delta\Phi_{pl}$ из Φ_d для токамака ИТЭР рассмотрены в [18]. Одной из существенных проблем при быстрых переходных процессах является учет влияния токов, наводимых в стенке вакуумной камеры на Φ_d [1–3, 5–16, 18–20, 22, 24–28, 72]. Строгий подход к данной задаче обсуждался в [50, 73], а здесь мы этих вопросов не касаемся. Для полноты отметим, что вся ранее развитая техника и предложенные теоретические алгоритмы компенсации применимы при любом соотношении p_{\parallel} и p_{\perp} .

Авторы благодарны экспертам группы ИТРА по МГД-устойчивости плазмы за многочисленные полезные обсуждения, своим российским коллегам Ю.В. Грибову и С.В. Коновалову за постоянную поддержку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Strait E.J.* // Rev. Sci. Instruments. 2006. V. 77. P. 023502.
2. *Strait E.J., Fredrickson E.D., Moret J.-M., Takechi M.* // Fusion Sci. Technol. 2008. V. 53. P. 304.
3. *Tonetti G., Christiansen J.P., de Kock L.* // Rev. Sci. Instruments. 1986. V. 57. P. 2087.
4. *Besshou S., Pustovitov V.D., Fujita N., Kondo K., Mizuuchi T., Nagasaki K., Nakasuga M., Obiki T., Okada H., Sano F., Zushi H.* // Phys. Plasmas. 1998. V. 5. P. 481.
5. *Saha S.K., Kumar R., Hui A.K.* // Rev. Sci. Instruments. 2001. V. 72. P. 4289.
6. *Manini A., Moret J.-M., Alberti S., Goodman T.P. and Henderson M.A.* // Plasma Phys. Control. Fusion. 2002. V. 44. P. 139.
7. *Joffrin E., Defrasne P.* // Rev. Sci. Instruments. 2002. V. 73. P. 2266.
8. *Moret J.-M., Buhlmann F., Tonetti G.* // Rev. Sci. Instruments. 2003. V. 74. P. 4634.
9. *Yamaguchi T., Watanabe K.Y., Sakakibara S., Narushima Y., Narihara K., Tokuzawa T., Tanaka K., Yamada I., Osakabe M., Yamada H., Kawahata K., Yamazaki K., LHD Experimental Group* // Nuclear Fusion. 2005. V. 45. P. L33.
10. *Shen B., Sun Y.W., Wan B.N., Qian J.P.* // Rev. Sci. Instruments. 2007. V. 78. P. 093501.
11. *Trembach D., Xiao C., Dreval M., Hirose A.* // Rev. Sci. Instruments. 2009. V. 80. P. 053502.
12. *Kumar S., Jha R., Lal P., Hansaliya Ch., Gopalkrishna M.V., Kulkarni S., Mishra K.* // Rev. Sci. Instruments. 2010. V. 81. P. 123505.
13. *Bak J.G., Lee S.G., Kim H.S.* // Rev. Sci. Instruments. 2011. V. 82. P. 063504.
14. *Sevillano M.G., Garrido I., Garrido A.J., Romero J., Paley J., Moret J.-M., Coda S., Felici F., Curchod L., the TCV team* // Proc. 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC). Orlando, FL, USA, December 12–15, 2011. P. 7536.
15. *Ji X.Q., Yang Q.W., Xu Y., Sun T.F., Yuan B.S., Feng B.B., Liu Y., Cui Z.Y., Lu J.* // Rev. Sci. Instruments. 2013. V. 84. P. 083507.
16. *Schmitt J.C., Talmadge J.N., Anderson D.T., Hanson J.D.* // Phys. Plasmas. 2014. V. 21. P. 092518.
17. *Han H.S., Hahn S.H., Bak J.G., Hyatt A., Johnson R., Woo M.H., Kim J.S., Bae Y.S., KSTAR team* // Fusion Eng. Des. 2015. V. 95. P. 44.
18. *Fresa R., Albanese R., Arshad S., Coccoresse V., de Magistris M., Minucci S., Pironti A., Quercia A., Rubinacci G., Vayakis G., Villone F.* // Fusion Eng. Des. 2015. V. 100. P. 133.
19. *Endler M., Brucker B., Bykov V., Cardella A., Carls A., Dobmeier F., Dudek A., Fellinger J., Geiger J., Grosser K., Grulke O., Hartmann D., Hathiramani D., Höchel K., Köppen M., Laube R., Neuner U., Peng X., Rahbarnia K., Rummel K., Sieber T., Thiel S., Vorköper A., Werner A., Windisch T., Ye M.Y.* // Fusion Eng. Des. 2015. V. 100. P. 468.
20. *Gerasimov S.N., Abreu P., Baruzzo M., Drozdov V., Dvornova A., Havlíček J., Hender T.C., Hronova O., Kruezi U., Li X., Markovič T., Pánek R., Rubinacci G., Tsalas M., Ventre S., Villone F., Zakharov L.E., JET Contributors* // Nuclear Fusion. 2015. V. 55. P. 113006.
21. *Zhu L.Z., Chen Z.P., Li F.M., Liu H., Chen Z.Y., Zhuang G.* // Rev. Sci. Instruments. 2016. V. 87. P. 11D420.
22. *Giannone L., Geiger B., Bilato R., Maraschek M., Odstrcily T., Fischer R., McCarthy P.J., Fuchs J.C., Mertens V., Schuhbeck K.H., ASDEX Upgrade Team* // Rev. Sci. Instruments. 2016. V. 87. P. 053509.
23. *Huang J., Liang Y., Qian J.P., Xu L.Q., He K.Y., Liu Y.K. and the EAST team* // Plasma Phys. Control. Fusion. 2017. V. 59. P. 065010.
24. *Giannone L., Fischer R., Fuchs J.C., Geiger B., Maraschek M., Rittich D., Sieglin B., Bock A., Hobirk J., Kallenbach A., Mertens V., Schuhbeck K.H., McCarthy P.J.* // Rev. Sci. Instruments. 2018. V. 89. P. 106101.
25. *Rahbarnia K., Thomsen H., Neuner U., Schilling J., Geiger J., Fuchert G., Andreeva T., Endler M., Hathiramani D., Bluhm T., Zilker M., Carvalho B.B., Werner A., Wendelstein 7-X Team* // Nuclear Fusion. 2018. V. 58. P. 096010.
26. *Moreau P., Le-Luyer A., Spuig P., Malard P., Saint-Laurent F., Artaud J.F., Morales J., Faugeras B., Heumann H., Cantone B., Moreau M., Brun C., Nouaillietas R., Nardon E., Santraine B., Berne A., Kumari P., Belsare S., WEST Team* // Rev. Sci. Instruments. 2018. V. 89. P. 10J109.
27. *Dubrov M.L., Pustovitov V.D.* // Plasma Phys. Control. Fusion. 2019. V. 61. P. 065018.
28. *Grebenshchikov S.E., Kharchev N.K., Vasilkov D.G.* // Plasma Phys. Rep. 2019. V. 45. P. 1059.
29. *Пашнеv В.К., Сороковой Е.Л., Петрушеня А.А., Ожерельев Ф.И.* // ЖТФ. 2019. Т. 89. С. 55. [V.K. Pashnev, E.L. Sorokovoy, A.A. Petrushenya, and F.I. Ozherel'ev, Tech. Phys. **64**, 47 (2019).]
30. *Пашнеv В.К., Сороковой Е.Л., Петрушеня А.А.* // Физика плазмы. 2020. Т. 46. С. 963. [V.K. Pashnev, E.L. Sorokovoy, and A.A. Petrushenya, Plasma Phys. Rep. **46**, 1045 (2020).]
31. *Giannone L., Fischer R., Kappatou A., Tardini G., Weiland M., Angioni C., Fable E., Griener M., McDermott R., Sieglin B., van Vuuren A.J., Bilato R., Dunne M., Gude A., Kallenbach A., Kurz J.M., Maraschek M., Rittich D.M., Ryter F., Schneider P., Schuhbeck K.H., Stroth U., H. Zohm, ASDEX Upgrade Team* // Nuclear Fusion. 2021. V. 61. P. 066021.
32. *Vlasenkov V.S., Kulygin V.M., Leonov V.M., Merezhkin V.G., Mukhovatov V.S., Semashko N.N., Sinitsyna L.D., Panasenkov A.A., Tulinin G.N.* // Plasma Phys. Control. Nuclear Fusion Res. (Proc. 6th Int. Conf., Berchtesgaden, 1976). Vienna: IAEA, 1977. V. 1. P. 85.
33. *Andryukhina E.D., Danlikin I.S., Dyabilin K.S., Fedyanin O.I.* // Proc. 12th Eur. Conf. Control. Fusion and Plasma Phys. (Budapest, 1985). ECA. V. 9F. Pt I. P. 481.
34. *Yamada H., Ida K., Iguchi H., Morita S., Kaneko O., Arimoto H., Hosokawa M., Idei H., Kubo S., Matsuoka K., Nishimura K., Okamura S., Takeiri Y., Takita Y., Takahashi C., Hanatani K., Howe H.C., Hirshman S.P., Lee D.K.* // Nuclear Fusion. 1992. V. 32. P. 25.
35. *Zwingmann W., Eriksson L.G., Stubberfield P.* // Plasma Phys. Control. Fusion. 2001. V. 43. P. 1441.

36. Fasoli A., Gormenzano C., Berk H.L., Breizman B., Briguglio S., Darrow D.S., Gorelenkov N., Heidbrink W.W., Jaun A., Konovalov S.V., Nazikian R., Noterdaeme J.-M., Sharapov S., Shinohara K., Testa D., Tobita K., Todo Y., Vlad G. and Zonca F. // Progress in the ITER Physics Basis, Chapter 5 // Nuclear Fusion. 2007. V. 47. P. S264.
37. Watanabe K.Y., Suzuki Y., Sakakibara S., Yamaguchi T., Narushima Y., Nakamura Y., Ida K., Nakajima N., Yamada H., and LHD Experiment Group // Fusion Sci. Technol. 2010. V. 58. P. 160.
38. Asahi Y., Suzuki Y., Watanabe K.Y., Cooper W.A. // Phys. Plasmas. 2013. V. 20. P. 022503.
39. Qu Z.S., Fitzgerald M., Hole M.J. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2014. V. 56. P. 075007.
40. Layden B., Qu Z.S., Fitzgerald M. and Hole M.J. // Nuclear Fusion. 2016. V. 56. P. 112017.
41. Paz-Soldan C., Eidiets N.W., Liu Y.Q., Shiraki D., Boozer A.H., Hollmann E.M., Kim C.C., Lvovskiy A. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2019. V. 61. P. 054001.
42. Голдстон Р.Дж. // Основы физики плазмы. Т. 2 / Под ред. А.А. Галеева и Р. Судана. М.: Энергоиздат, 1984. С. 583. [R.J. Goldston, in *Handbook of Plasma Physics*, Ed. by A.A. Galeev and R.N. Sudan (Elsevier, Amsterdam, 1984), Vol. 2, p. 683.]
43. Lao L.L., St. John H.E., Stambaugh R.D., Pfeiffer W. // Nuclear Fusion. 1985. V. 25. P. 1421.
44. Wesson J. Tokamaks, 3rd ed. Oxford: Clarendon Press, 2004.
45. Hutchinson I.H. Principles of Plasma Diagnostics. Cambridge Univ. Press, 2005. P. 22.
46. Брагинский С.И., Шафранов В.Д. // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. М.: Изд-во АН СССР, 1958. Т. 2. С. 26. [S.I. Braginskii and V.D. Shafranov. *Plasma Physics and Problem of Controlled Thermonuclear Reactions* / Ed. M.A. Leontovich. New York: Pergamon, 1959. V. 2. P. 39.]
47. Mukhovatov V.S., Shafranov V.D. // Nuclear Fusion. 1971. V. 11. P. 605.
48. Greene J.M., Johnson J.L., Weimer K.E. // Phys. Fluids. 1971. V. 14. P. 671.
49. Bongard M.W., Barr J.L., Fonck R.J., Reusch J.A., Thome K.E. // Phys. Plasmas. 2016. V. 23. P. 072508.
50. Pustovitov V.D. // Fusion Eng. Des. 2017. V. 117. P. 1.
51. Kruskal M.D., Oberman C.R. // Phys. Fluids. 1958. V. 1. P. 275.
52. Grad H. // Phys. Fluids. 1967. V. 10. P. 137.
53. Dobrott D. R., Johnson J.L. // Plasma Phys. 1969. V. 11. P. 211.
54. Spies G.O., Nelson D.B. // Phys. Fluids. 1974. V. 17. P. 1879.
55. Захаров Л.Е., Шафранов В.Д. // Вопросы теории плазмы / Под ред. Леонтовича М.А. и Кадомцева Б.Б. М.: Энергоиздат, 1982. Вып. 11. С. 118.
56. Iacono R., Bondeson A., Troyon F., Gruber R. // Phys. Fluids B. 1990. V. 2. P. 1794.
57. Takeda T., Tokuda S. // J. Comput. Phys. 1991. V. 93. P. 1.
58. Cooper W.A., Graves J.P., Hirshman S.P., Yamaguchi T., Narushima Y., Okamura S., Sakakibara S., Suzuki C., Watanabe K.Y., Yamada H., Yamazaki K. // Nuclear Fusion. 2006. V. 46. P. 683.
59. Pustovitov V.D. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2010. V. 52. P. 065001.
60. Лепихин Н.Д., Пустовитов В.Д. // Физика плазмы. 2013. Т. 39. С. 683. [N.D. Lepikhin and V.D. Pustovitov, Plasma Phys. Rep. **39**, 605 (2013).]
61. Hodgson J.D.B., Neukirch T. // Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, 2015, <https://doi.org/10.1080/03091929.2015.1081188>
62. Souza L.C., Viana R.L. // Phys. Plasmas. 2019. V. 26. P. 042502.
63. Пустовитов В.Д. // Физика плазмы. 1984. Т. 10. С. 1148. [V.D. Pustovitov, Sov. J. Plasma Physics **10**, 660 (1984).]
64. Pustovitov V.D. // J. Plasma Fusion Res. (formerly Kakuyugo Kenkyu). 1993. V. 69. P. 34.
65. Pustovitov V.D. // AIP Conf. Proc. 2012. V. 1478. P. 50.
66. Pustovitov V.D. // Reviews of Plasma Physics. V. 21 / Ed. by B.B. Kadomtsev and V.D. Shafranov. New York: Consultants Bureau, 2000. P. 1.
67. Kaye S.M., Abrams T., Ahn J.-W., Allain J.P., Andre R., Andruczyk D., Barchfeld R., Battaglia D., Bhattacharjee A., Bedoya F., Bell R.E., Belova E., Berkery J., Berry L., Bertelli N., et al. // Nuclear Fusion. 2015. V. 55. P. 104002.
68. Kirk A., Adamek J., Akers R.J., Allan S., Appel L., Arese Lucini F., Barnes M., Barrett T., Ben Ayed N., Boeglin W., Bradley J., Browning P.K., Brunner J., Cahyna P., Cardnell S., et al. // Nuclear Fusion. 2017. V. 57. P. 102007.
69. Кутеев Б.В., Гончаров П.Р., Сергеев В.Ю., Хрипунов В.И. // Физика плазмы. 2010. Т. 36. С. 307. [B.V. Kuteev, P.R. Goncharov, V.Yu. Sergeev, and V.I. Khripunov, Plasma Phys. Rep. **36**, 281 (2010).]
70. Сергеев В.Ю., Кутеев Б.В., Быков А.С., Петров В.С., Голиков А.А., Голубева А.В., Гончаров П.Р., Грязневич М.П., Кирнев Г.С., Клищенко А.В., Лукьянов В.В., Спицин А.В., Сычугов Д.Ю., Шпанский Ю.С. // Физика плазмы. 2012. Т. 38. С. 571. [V.Yu. Sergeev, B.V. Kuteev, A.S. Bykov, V.S. Petrov, A.A. Golikov, A.V. Golubeva, P.R. Goncharov, M.P. Gryaznevich, G.S. Kirnev, A.V. Klishchenko, V.V. Luk'yanov, A.V. Spitsyn, D.Yu. Sychugov, and Yu.S. Shpansky, Plasma Phys. Rep. **38**, 521 (2012).]
71. Sykes A., Costley A.E., Windsor C.G., Asunta O., Brittles G., Buxton P., Chuyanov V., Connor J.W., Gryaznevich M.P., Huang B., Hugill J., Kukushkin A., Kingham D., Langtry A.V., McNamara S., Morgan J.G., Noonan P., Ross J.S.H., Shevchenko V., Slade R., Smith G. // Nuclear Fusion. 2018. V. 58. P. 016039.
72. Besshou S., Aizawa K., Tomiyama K., Kondo K., Mizuuchi T., Nagasaki K., Obiki T., Okada H., Sano F. // Rev. Sci. Instruments. 2001. V. 72. P. 3859.
73. Пустовитов В.Д. // Физика плазмы. 2020. Т. 46. С. 675. [V.D. Pustovitov, Plasma Phys. Rep. **46**, 747 (2020).]