

УДК 533.9.01

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ВНЕШНЕЙ ЗАДАЧИ РАВНОВЕСИЯ ПЛАЗМЫ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ В ТОКАМАКЕ

© 2021 г. В. Д. Пустовитов^{a, b, *}, Н. В. Чукашев^{a, c}

^a Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”, Москва, Россия

^b Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, Россия

^c Московский физико-технический институт (НИУ), Долгопрудный, Россия

*e-mail: Pustovitov_VD@nrcki.ru

Поступила в редакцию 15.02.2021 г.

После доработки 30.04.2021 г.

Принята к публикации 25.05.2021 г.

Получены выражения для магнитного поля, создаваемого токами, текущими в плазме эллиптического сечения в токамаке. Предлагаемый аналитический подход опирается на метод функции Грина, что гарантирует точное выделение нужного решения при заданных граничных условиях и его правильную асимптотику на бесконечности. Тороидальность системы учитывается в линейном приближении, как в стандартных моделях теории равновесия, но в описании магнитного поля \mathbf{B} на границе плазмы удерживается вторая гармоника по полоидальному углу. Это и некруглость границы плазмы, на которой необходимо сшивать внутреннее и внешнее решения для \mathbf{B} , кардинально меняют характер задачи. Дано подробное описание приемов, позволяющих включить новые элементы в общую схему. Результат представлен через полоидальный поток как функцию координат, его градиент определяет локальные значения собственного поля.

Ключевые слова: токамак, равновесие плазмы, внешняя задача

DOI: 10.31857/S0367292121100073

1. ВВЕДЕНИЕ

Аналитическая теория равновесия плазмы в токамаке создавалась для тороидального шнура с круглым поперечным сечением [1–4]. В наше время токамаки работают с некруглой плазмой. Например, в токамаке JET вытянутость плазмы (отношение вертикальной оси сечения к горизонтальной) составляет $K_b = 1.6–1.8$ [5, 6], токамак ИТЭР рассчитан на $K_b = 1.70–1.85$ [5, 7], в токамаке JT-60SA плазма будет иметь $K_b = 1.95$ [8], в токамаке T-15MD планируется $K_b = 1.7–1.9$ [9, 10], в токамаке COMPASS-U $K_b = 1.8$ [11].

Известно, что учет конечного $K - 1$ необходим при интерпретации магнитных измерений. Это подтверждается формулой [12–16]

$$\Delta\Phi_D \equiv \Phi_{total} - \Phi_{vacuum} \approx \frac{2K_b}{K_b^2 + 1} \frac{(\mu_0 J)^2}{8\pi B_0} (1 - \beta_p) \quad (1)$$

для диамагнитного сигнала, где J – ток плазмы, B_0 – тороидальное магнитное поле в вакууме, а β_p – “полоидальная бета”. Целью настоящей ра-

боты является получение дополняющих (1) соотношений для полоидального поля при $K_b \neq 1$.

Интерес к этой теме был всегда связан с проблемами управления формой плазмы в токамаке и магнитной диагностики [3, 4, 12–14, 17–29]. К этим классическим направлениям добавляется широкий круг задач, в которых требуется вычислять электромагнитную реакцию стенки вакуумной камеры на быстрые изменения в плазме [5, 10, 13, 14, 30–37]. Сложность таких задач часто преодолевают, заменяя плазму кольцевым проводником с током [32, 33, 37–40]. Однако плазма в магнитном поле ведет себя иначе, чем твердый проводник. Ее способность практически мгновенно деформироваться и смещаться при изменении \mathbf{B} оказывается существенным фактором в расчетах сил, действующих на стенку при срывах [34, 35]. При этом точные численные результаты подтверждают высокую степень надежности аналитических предсказаний, основанных на стандартной модели равновесия круглой плазмы [35]. Это служит дополнительным стимулом к расширению теории на случай некруглой плазмы.

2. МОДЕЛЬ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В тороидальных системах с магнитным удержанием равновесная плазма подчиняется уравнению

$$\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (2)$$

поэтому на ее границе S_{pl} должно быть

$$\mathbf{n}_{pl} \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (3)$$

Здесь p – давление плазмы,

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^{pl} + \mathbf{B}^{ext} \quad (4)$$

– магнитное поле, которое складывается из собственного поля плазмы \mathbf{B}^{pl} и внешнего \mathbf{B}^{ext} ,

$$\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B} / \mu_0 \quad (5)$$

– плотность тока, а \mathbf{n}_{pl} – единичный вектор нормали к S_{pl} .

Индуктивные петли и датчики, реагирующие на

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad (6)$$

где \mathbf{E} – электрическое поле, позволяют измерить приращения $\delta \mathbf{B}$ снаружи плазмы. В идеале итогом магнитных измерений может быть знание $\delta \mathbf{B}^{pl}$ и $\delta \mathbf{B}^{ext}$ вне тора S_{pl} . На практике определяют несколько гармоник $\delta \mathbf{B}$ или связанных с ними “моментов” плотности тока [4, 17–29]. Кроме того, с помощью петель, покрывающих большую площадь, получают интегральные магнитные величины [4, 12–14, 18, 19, 22, 26, 41–43].

При планировании схем измерений и интерпретации данных основным является вопрос об информации, которую они дают о плазме. В общем случае плотность тока $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ в плазме неизвестна, а уравнение Био–Савара–Лапласа

$$\mathbf{B}^{pl}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{plasma} \mathbf{j}(\mathbf{r}_{pl}) \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_{pl}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{pl}|^3} dV_{pl} \quad (7)$$

дает лишь интеграл. Именно поэтому профиль тока в токамаках и стеллараторах можно оценить по значениям \mathbf{B}^{pl} лишь весьма приблизительно [17–29].

Уравнение (7) в сочетании с граничным условием (3) и уравнениями $\nabla \cdot \mathbf{B}^{ext} = \nabla \times \mathbf{B}^{ext} = 0$ для \mathbf{B}^{ext} внутри вакуумной камеры дает [44]

$$\mathbf{B}^{pl}(\mathbf{r}) - \eta_{pl} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{pl} (\mathbf{n}_{pl} \times \mathbf{B}) \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_{pl}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{pl}|^3} dS_{pl}, \quad (8)$$

где интегрирование производится по границе плазмы, а

$$\eta_{pl}(\mathbf{r}) \equiv \begin{cases} 1 & \text{inside } S_{pl}, \\ 0.5 & \text{at } S_{pl}, \\ 0 & \text{outside } S_{pl}. \end{cases} \quad (9)$$

Это точное решение можно символически представить в виде

$$\mathbf{B}_i = \begin{cases} \mathbf{B}^{pl} & \text{out,} \\ -\mathbf{B}^{ext} & \text{in,} \end{cases} \quad (10)$$

где \mathbf{B}_i – магнитное поле, создаваемое током с поверхностной плотностью

$$\mathbf{i} \equiv (\mathbf{n}_{pl} \times \mathbf{B}) / \mu_0 \quad (11)$$

на тороидальной границе S_{pl} , *in* и *out* обозначают области внутри и вне тора S_{pl} . Такой прием разделения полного поля на “внутреннее” и “внешнее”, называемый методом эквивалентных поверхностных токов, хорошо известен в электродинамике [45–47]. Он упоминается в [48], а для токамаков был переоткрыт в [49, 50] и получил название принципа виртуального кожуха, см. также [4, 51–59].

Для аксиально-симметричной плазмы интегрирование по тороидальному углу превращает (8) в [60]

$$\psi^{pl} - \eta_{pl}(\psi - \psi_b) = 2\pi \oint_{pl} \mathbf{G} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}_{pl}, \quad (12)$$

где $\psi_b(t)$ – зависящее лишь от времени значение ψ на границе плазмы, $d\mathbf{l}_{pl} = \boldsymbol{\tau}_{pl} d\ell_{pl}$ – ориентированный элемент длины границы поперечного сечения S_{pl} ,

$$\boldsymbol{\tau}_{pl} = \mathbf{e}_\zeta \times \mathbf{n}_{pl} \quad (13)$$

– касательный орт к этому контуру, $\mathbf{e}_\zeta \equiv r \nabla \zeta$ – тороидальный орт,

$$\psi(r, z; t) \equiv \int_0^r \int_0^{2\pi} \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_z r dr d\zeta = \psi^{pl} + \psi^{ext} \quad (14)$$

– полный полоидальный магнитный поток, с которым магнитное поле связано равенством

$$2\pi \mathbf{B} = \nabla \psi \times \nabla \zeta + \mu_0 I \nabla \zeta, \quad (15)$$

(r, ζ, z) – цилиндрические координаты с $r = 0$ на главной оси тора, как на рис. 1, а I – определенный подобно ψ (с заменой $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{j}$ в (14)) полоидальный ток. Входящая в (12) известная функция Грина

$$G \equiv \frac{\sqrt{rr'}}{\pi k} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2} \right) K(k) - E(k) \right] \quad (16)$$

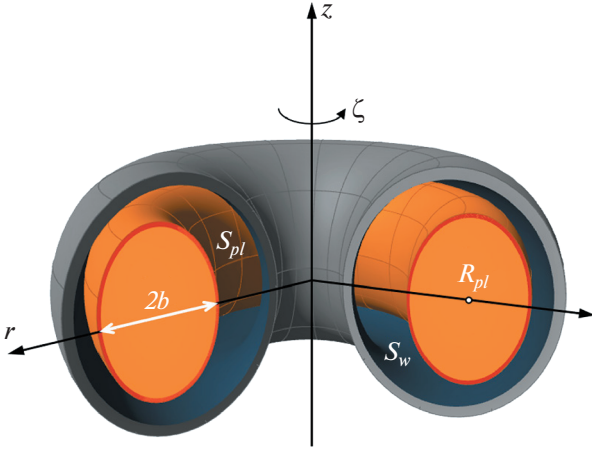


Рис. 1. Схематический вид токамака с вертикально вытянутой плазмой большого и малого радиусов R_{pl} и b соответственно. Здесь S_{pl} – тороидальная поверхность плазмы, а S_w – внутренняя сторона вакуумной камеры.

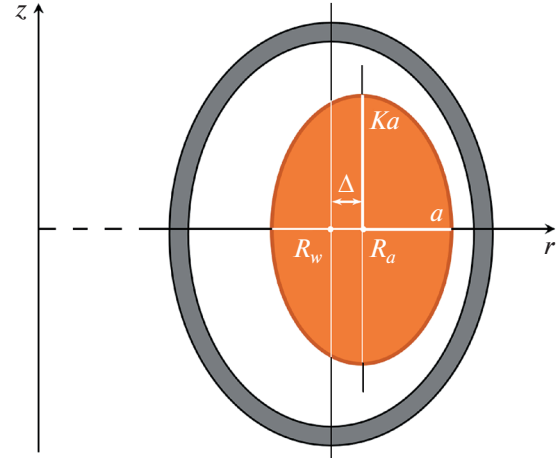


Рис. 2. Горизонтально смещенные магнитные поверхности эллиптического сечения. Здесь a и Ka – малая и большая полуоси эллипса, Δ – его сдвиг относительно центра вакуумной камеры R_w , а $R_a = R_w + \Delta$ – большой радиус магнитной поверхности $a = \text{const}$.

выражается через полные эллиптические интегралы первого и второго рода K и E соответственно, а

$$k^2 \equiv \frac{4rr'}{(r+r')^2 + (z-z')^2}. \tag{17}$$

Во избежание путаницы отметим, что всюду, кроме (16), символ K используется для обозначения вытянутости (эллиптичности) координатных поверхностей, которые, начиная с (18) и (19) и в разделе 3, совмещаются с магнитными, а далее выбираются иначе.

Аналитическое вычисление интеграла в (12) для плазмы с круглым сечением S_{pl} описано в [60, 61], а элементы техники представлены в [52, 62, 63] с расширениями и приложениями к стеллараторам. Здесь принципиальным отличием от прежних работ будет учет вертикальной вытянутости S_{pl} .

Далее мы рассмотрим плазму, магнитные поверхности которой вблизи S_{pl} представляют собой вложенные торы $a = \text{const}$ эллиптического сечения с вытянутостью $K(a)$ и горизонтальным смещением $\Delta(a)$ относительно центра вакуумной камеры $r = R_w$:

$$r = R_w + \Delta - a \cos \theta, \tag{18}$$

$$z = Ka \sin \theta, \tag{19}$$

как на рис. 2. Здесь a – малая полуось сечения. При $K = 1$ построения сводятся к стандартной модели смещенных круглых магнитных поверхностей [2–4, 52, 62, 64–68]. Некоторые результаты аналитических расчетов для тороидальной

плазмы с $K \neq 1$ приводились в [4, 52, 64, 66–73], метрические коэффициенты для прямой конфигурации с $\Delta = 0$ представлены в [74].

Отметим для полноты, что при решении внешних задач часто пользуются известным электродинамическим выражением

$$\Psi^v = 2\pi\mu_0 \int_v G(r, z; r', z') j_\zeta(r', z') dr' dz' \tag{20}$$

для полоидального потока $\Psi^v \equiv 2\pi r A_\zeta^v$ (A_ζ^v – тороидальная компонента вектор-потенциала), создаваемого распределенным кольцевым током с плотностью j_ζ в тороидальном проводнике v , см., например, уравнения (3.127) в [4], (2) в [26], (2.21) в [20], (24) в [60], (33) в [75]. При $\eta_{pl} = 0$ и условии (3) равенство (12) является его точным математическим следствием [23, 60, 62], но присутствие η_{pl} в (12) добавляет связи, не содержащиеся в (20) или аналогах (7) для токов во внешних проводниках. В частности, при $\eta_{pl} = 1$ соотношение (12) дает Ψ^{ext} через поле на границе плазмы, а не через такие токи.

Наша цель – вычисление интеграла в (12) для плазмы, граница которой имеет форму эллипса.

3. ПОЛОИДАЛЬНОЕ ПОЛЕ НА ГРАНИЦЕ ПЛАЗМЫ

Для интегрирования в (12) по такому контуру нужно удобным образом выразить функцию Гри-

на и тангенциальную компоненту магнитного поля на границе плазмы

$$\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\tau} = -\frac{\nabla \Psi \cdot \mathbf{n}}{2\pi r} = -\frac{\Psi'(a)|\nabla a|}{2\pi r}, \quad (21)$$

где $\boldsymbol{\tau}$ и \mathbf{n} – единичные касательный и нормальный векторы к магнитной поверхности $a = \text{const}$.

С параметризацией, заданной равенствами (18) и (19), получим

$$\mathbf{e}_r \equiv \nabla r = (\Delta' - \cos \theta)\nabla a + a \sin \theta \nabla \theta, \quad (22)$$

$$\mathbf{e}_z \equiv \nabla z = K(1 + 2d \sin \theta)\nabla a + Ka \cos \theta \nabla \theta, \quad (23)$$

где $2d \equiv aK'/K$, а штрих обозначает производную по a . Решая эту систему, находим

$$D\nabla a = -\mathbf{e}_r Ka \cos \theta + \mathbf{e}_z a \sin \theta, \quad (24)$$

$$D\nabla \theta = \mathbf{e}_r K(1 + 2d) \sin \theta + \mathbf{e}_z (\cos \theta - \Delta'). \quad (25)$$

Введенная здесь величина

$$D \equiv \frac{1}{|\nabla a \times \nabla \theta|} = Ka(1 - \Delta' \cos \theta + 2d \sin^2 \theta) \quad (26)$$

– якобиан отображения (18) и (19).

Таким образом, в нашей модели

$$|\nabla a|^2 = \frac{a^2}{D^2} [1 + (K^2 - 1) \cos^2 \theta], \quad (27)$$

так что

$$\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\tau} d\ell = -\frac{\Psi' a^2}{2\pi Dr} [1 + (K^2 - 1) \cos^2 \theta] d\theta, \quad (28)$$

где мы воспользовались выражением элемента длины эллиптического контура

$$d\ell = a\sqrt{1 + (K^2 - 1) \cos^2 \theta} d\theta. \quad (29)$$

Теорема о циркуляции позволяет связать производную Ψ' с полным током плазмы:

$$\mu_0 J = -\alpha_{22} \Psi', \quad (30)$$

где коэффициент

$$\alpha_{22} = \frac{a}{R_a} \frac{K^2 + 1}{2K} f_{22} \quad (31)$$

получается интегрированием (28), $R_a = R_w + \Delta(a)$ – большой радиус магнитной поверхности, а

$$f_{22} = \frac{1}{2\pi} \times \int_0^{2\pi} \frac{1 + (K^2 - 1)/(K^2 + 1) \cos 2\theta}{(1 - a/R_a \cos \theta)(1 - \Delta' \cos \theta + 2d \sin^2 \theta)} d\theta \quad (32)$$

– величина порядка единицы [52]. С учетом этого (28) превращается в

$$\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\tau} d\ell = \frac{\mu_0 J}{2\pi f_{22}} \frac{R_a Ka}{Dr} \left[1 + \frac{K^2 - 1}{K^2 + 1} \cos 2\theta \right] d\theta. \quad (33)$$

Знаменатель Dr содержит сложную угловую зависимость, явно представленную в (32). Его можно упростить разложением по малым параметрам a/R_a , Δ' и d :

$$\frac{R_a Ka}{Dr} \approx 1 + \left(\Delta' + \frac{a}{R_a} \right) \cos \theta - 2d \sin^2 \theta + 2g \cos^2 \theta, \quad (34)$$

где

$$2g \equiv \Delta'^2 + \frac{a\Delta'}{R_a} + \frac{a^2}{R_a^2}. \quad (35)$$

Подстановка этого выражения в (32) приводит к

$$f_{22} \approx 1 - d + g, \quad (36)$$

с учетом чего из (33) получим

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 J}{2\pi} \left[1 + \left(\Delta' + \frac{a}{R_a} \right) \cos \theta + \left(d + g + \frac{K^2 - 1}{K^2 + 1} \right) \cos 2\theta \right] d\theta, \quad (37)$$

что справедливо для произвольной магнитной поверхности. Здесь и далее поправки, связанные с d , учтены в линейном приближении, а с a/R_a и Δ' – в квадратичном. Последние собраны в g , см. (35). Они естественно возникают из Dr в (34) при замене $(1 - x)^{-1}$ на $1 + x + x^2$.

В задачах равновесия круглой плазмы в правой части (37) достаточно ограничиться первой гармоникой по полоидальному угловому параметру θ [1, 2, 4, 60, 61]. Условия применимости такой операции известны [4, 52, 65]: большое аспектное отношение и давление плазмы несколько меньше равновесного предела. Удержание слагаемого с $\cos \theta$ означает учет тороидальности системы в основном приближении. В случае некруглой плазмы важна также и вторая гармоника. Это прямо следует из (37).

Отметим, что $(K^2 - 1)/(K^2 + 1) > 0.38$ при $K > 1.5$. Для сравнения укажем, что $a/R_a < 0.4$ для токамаков с $R_w/b > 2.5$. К таким относятся, например, токамаки JET, ASDEX-Upgrade и ИТЭР. В этом случае основной вклад во вторую гармонику в (37) дает слагаемое с K^2 .

4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА

В стандартной аналитической теории равновесия плазмы в токамаках [1–4, 52, 60, 64–68] связанная с тороидальностью неоднородность магнитного поля по полоидальному углу учитывается в линейном по a/R_{pl} приближении, где R_{pl} – большой радиус плазмы. Чтобы вписаться в эту

схему без потери точности, можно пользоваться приближенным выражением для G [52, 60, 61]

$$G_1 \equiv \frac{R}{2\pi} [\lambda_0 - 2 - \delta_x (\lambda_0 - 1)], \quad (38)$$

полученным из (16) с сохранением лишь линейных тороидальных поправок, которые объединены в слагаемом с

$$\delta_x \equiv \frac{x + x_b}{2R}. \quad (39)$$

Здесь

$$\lambda_0 \equiv \ln \frac{8R}{\sqrt{(x - x_b)^2 + (z - z_b)^2}}, \quad (40)$$

$$x \equiv R - r, \quad (41)$$

а индекс b обозначает переменную, “бегущую” по границе плазмы.

Вообще говоря, выбор R в (38)–(41) произволен. Это может быть радиус центра вакуумной камеры R_w или радиус центра крайней магнитной поверхности (границы плазмы) $R_{pl} = R_w + \Delta_b$, где Δ_b – горизонтальное смещение плазменного шнура относительно R_w . Далее использование R в формулах будет указывать на их применимость в любом интересующем нас случае. Необходимость различать близкие значения R_w и R_{pl} возникает, когда требуется точный учет положения плазмы относительно стенки ($\Delta_b \neq 0$).

Для вычисления (12) нужно выделить постоянную составляющую G_1 на контуре интегрирования, а переменную представить в виде ряда Фурье, подобного (37). Для круглой плазмы эта задача решалась в [52, 60, 61] с использованием известного полярного разложения логарифма [76]

$$\ln \frac{1}{\sqrt{1 - 2\xi \cos \omega + \xi^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n} \cos n\omega, \quad (42)$$

где $\xi = \rho_{\min}/\rho_{\max} < 1$. Оно применимо для λ_0 и в нашем случае, если выполняется условие сходимости, но не совсем удобно, так как радиус $\rho_b = \sqrt{x_b^2 + z_b^2}$ на границе некруглой плазмы будет функцией углового параметра θ_b . В связи с этим возникает необходимость найти подходящее нашей геометрии преобразование знаменателя в (40), чтобы затем представить λ_0 в виде ряда Фурье с коэффициентами, постоянными на S_{pl} .

Начнем с тождества

$$\lambda_0 = \ln 8R - \text{Re Ln}(w - w_b), \quad (43)$$

где Ln – функция комплексного логарифма,

$$w \equiv x + iz, \quad (44)$$

а i – мнимая единица. В нашей задаче переменные x_b и z_b пробегают эллиптическую границу плазмы, которой в (18) и (19) соответствует $a = b$ и $K = K(b) \equiv K_b$.

Координаты (a, θ) в (18) и (19) привязаны к магнитным поверхностям внутри плазмы и подчиняются там условию $\mathbf{V} \cdot \nabla a = 0$. Фактически, они были нужны лишь вблизи S_{pl} для нахождения связи $\mathbf{V} \cdot d\mathbf{l}_{pl}$ с внутренним решением для B (через Δ' и d в (37)). По другую сторону S_{pl} (в вакуумной промежутке плазма-стенка) определим (a, θ) подобными равенствами

$$r = R - a \cos \theta, \quad (45)$$

$$z = Ka \sin \theta, \quad (46)$$

задающими при $a \geq b$ семейство вложенных торов с эллиптическими сечениями безотносительно к поведению линий \mathbf{V} . Совпадение граничного тора $a = b$ с S_{pl} обеспечивается заданием $K(b) = K_b$ и $R = R_{pl} = R_w + \Delta_b$. В остальном выбор координатных поверхностей $a(\mathbf{r}) = \text{const}$ во внешней области произволен, что позволит ниже вместо $\mathbf{V} \cdot \nabla a = 0$ ввести ограничение (52). Таким образом, координаты (a, θ) являются магнитными только внутри S_{pl} .

Если пользоваться параметризацией (45) и (46), получим

$$\begin{aligned} w &= a(\cos \theta + iK \sin \theta) = \\ &= a \frac{K+1}{2} e^{i\theta} \left(1 - \frac{K-1}{K+1} e^{-2i\theta}\right), \end{aligned} \quad (47)$$

аналогично и для w_b с заменой $a \rightarrow b$, $K \rightarrow K_b$ и $\theta \rightarrow \theta_b$. Для входящей в (43) комбинации эти подстановки дают

$$\begin{aligned} (w - w_b) \frac{2e^{-i\theta}}{a(K+1)} &= \\ &= (1 - \varepsilon e^{i\theta_-})(1 + \tilde{\varepsilon} e^{-i\theta_+}) + \left(\varepsilon \tilde{\varepsilon} - \frac{K-1}{K+1}\right) e^{-2i\theta}, \end{aligned} \quad (48)$$

где

$$\theta_- \equiv \theta_b - \theta, \quad \theta_+ \equiv \theta_b + \theta, \quad (49)$$

$$\varepsilon \equiv \frac{bK_b + 1}{aK + 1}, \quad (50)$$

а

$$\tilde{\varepsilon} \equiv \frac{K_b - 1}{K_b + 1} \varepsilon = \frac{bK_b - 1}{aK + 1}. \quad (51)$$

Ясно, что $a(K+1) = \ell_x + \ell_z$ – сумма полуосей эллипса $a = \text{const}$. Для системы вложенных координатных поверхностей во внешней области должно выполняться $a > b$ и $Ka > K_b b$, иначе наруши-

лось бы взаимно-однозначное соответствие (45), (46). При этих условиях получаем $\varepsilon < 1$.

Равенства (47) и (48) справедливы для любых $K(a)$ в (46), гарантирующих взаимно-однозначное соответствие $(r, z) \leftrightarrow (a, \theta)$. Здесь совпадение координатной поверхности $a = \text{const}$ с магнитной требуется лишь на границе плазмы $a = b$ и достигается при $K(b) = K_b$. Далее будем считать $K_b \geq 1$, а оставшейся свободой выбора $K(a)$ воспользуемся, чтобы избавиться от слагаемого с $e^{-2i\theta}$ в (48). Оно исчезает при

$$(K + 1)\varepsilon\tilde{\varepsilon} = K - 1. \quad (52)$$

Тогда комплексный логарифм от правой части (48) разбивается на два слагаемых, каждое из которых разлагается в ряд Меркатора

$$\text{Ln}(1 - s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n}, \quad |s| < 1, \quad (53)$$

поскольку при $a > b$ для токамаков с $K_b \geq 1$ выполнены условия сходимости $\varepsilon < 1$ и $\tilde{\varepsilon} < 1$, (см. (50) и (51)).

С учетом этих операций получаем из (43)

$$\lambda_0 = \ln \frac{16R}{a(K + 1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n} \left[\cos n\theta_- + \left(\frac{1 - K_b}{1 + K_b} \right)^n \cos n\theta_+ \right]. \quad (54)$$

Этот ряд Фурье с переменной θ_b и коэффициентами, постоянными на границе эллипса $a = b$, годится для внешней области $a > b$, где $\varepsilon < 1$. Связь (a, θ) с обычными цилиндрическими координатами (r, z) дается равенствами (45) и (46), где

$$Ka = \sqrt{a^2 + b^2(K_b^2 - 1)}, \quad (55)$$

что является следствием (52).

Последнее, обращая в нуль слагаемое с $e^{-2i\theta}$ в (48), соответствует такому $\tilde{\varepsilon}$, что

$$\tilde{\varepsilon}^2 = \frac{K_b - 1}{K_b + 1} \frac{K - 1}{K + 1}. \quad (56)$$

Это обеспечивает $|\tilde{\varepsilon}| < 1$ при любых $K(a) > 0$, поэтому при $\varepsilon > 1$ мы получили бы, разделив (48) на $\varepsilon e^{i\theta_-}$,

$$(w - w_b) \frac{2e^{-i\theta_b}}{b(K_b + 1)} = -(1 - \varepsilon^{-1} e^{-i\theta_-})(1 + \tilde{\varepsilon} e^{-i\theta_+}). \quad (57)$$

Подстановка этого выражения в (43) при $\varepsilon > 1$ с разложением по формуле (53) привела бы к

$$\lambda_0 = \ln \frac{16R}{b(K_b + 1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{-n}}{n} \left[\cos n\theta_- + \left(\frac{1 - K}{1 + K} \right)^n \cos n\theta_+ \right], \quad (58)$$

чем можно пользоваться внутри плазмы при $a < b$, если положить $R = R_{pl}$ и продолжить в эту область заданные (45) и (46) координаты a и θ с $K(a)$, удовлетворяющим (55).

Заметим, что это условие делает линии a и θ ортогональными: $\nabla a \cdot \nabla \theta = 0$. При этом они фактически представляют эллиптическую сетку

$$x = c \text{sh } u \cos \theta, \quad (59)$$

$$z = c \text{ch } u \sin \theta, \quad (60)$$

как применявшиеся в работах [4, 74, 77] в задаче равновесия прямого плазменного шнура эллиптического сечения с однородной плотностью тока. Координатные поверхности a и u совпадают при таком выборе c и u , когда эллипс $u = u_0$ совмещается с границей плазмы, так что $c \text{sh } u_0 = b - \text{ее малый радиус}$, а $K_b = \text{cth } u_0 - \text{вытянутость}$. Соответственно, $c - \text{фокальное расстояние эллипса}$, при постоянном b монотонно убывающее до нуля при $u_0 \rightarrow \infty$, т.е. при скруглении границы плазмы, $K_b \rightarrow 1$.

В параметризации (45), (46) с учетом (55) точка $x = 0$ является выделенной. Это связано с занулением x при $a = 0$ и конечностью z , что приводит к вырождению “нулевой” поверхности в отрезок. При $a = 0$ вытянутость $K(a)$ имеет особенность, однако эта сингулярность не препятствует вычислениям внутри плазмы. В разложение (58) вытянутость входит только в связке с малым радиусом a , образуя выражение (55), конечное при $a = 0$. Поэтому (58) в соглашении (55) можно применять и для вычисления поля внешних источников внутри плазмы.

Подстановка в (54) и (58) $K_b = 1$ воспроизводит формулу (44) из [61] для λ_0 при круглой границе, см. также [52, 60].

Далее равенство (38) с λ_0 в виде (54) для $a > b$ и (58) для $a < b$ будет использоваться для вычисления интеграла в (12). Он берется по контуру плазмы, поэтому в формулах, задающих G_1 , нужно будет подставить $R = R_{pl} = R_w + \Delta_b$. Тем самым мы совместим граничные поверхности двух систем координат – потоковых в (37) и геометрических в G_1 .

5. РЕЗУЛЬТАТ ИНТЕГРИРОВАНИЯ (12) ДЛЯ ПЛАЗМЫ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ

Согласно (37), на границе плазмы

$$\begin{aligned} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l}_{pl} = \\ = \mu_0 J \left[1 - \frac{b}{R_{pl}} \Lambda \cos \theta_b + \Lambda_2 \cos 2\theta_b \right] \frac{d\theta_b}{2\pi}, \end{aligned} \quad (61)$$

где $d\mathbf{l}_{pl}$ – элемент длины эллиптического контура, см. (29),

$$\Lambda \equiv -R_{pl} \frac{\Delta'(b)}{b} - 1, \quad (62)$$

$$\Lambda_2 \equiv d_b + \frac{K_b^2 - 1}{K_b^2 + 1}. \quad (63)$$

В последнем мы пренебрегли квадратичными по b/R_{pl} и Δ' поправками, дающими g в (37). Здесь их присутствие было бы некорректным, поскольку другой множитель в (12) вычислен в линейном приближении по тороидальности, см. (38).

Для круглой плазмы $d\mathbf{l}_{pl} = b d\theta$, и (61) превращается в граничное условие Шафранова

$$\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\tau}_{pl} = B_J \left(1 - \frac{b}{R_{pl}} \Lambda \cos \alpha \right), \quad (64)$$

эквивалентное уравнениям (6.7) в [2] и (26) в [3]. Здесь α – угол в полярных координатах (ℓ, α) , связанных с геометрическим центром плазмы, см. уравнение (59) и рис. 2 в [60].

Объединив (61) с (38) и подставив туда (54), из (12) получаем решение во внешней области при $a > b$:

$$\psi^{pl} = \psi_J \left(a_0^K + a_1^K \cos \theta + a_2^K \cos 2\theta \right), \quad (65)$$

где $\psi_J \equiv \mu_0 J R_{pl}$,

$$a_0^K \equiv \ln \frac{16R_{pl}}{a(K+1)} - 2, \quad (66)$$

$$a_1^K \equiv \frac{B_{\perp}^K}{B_J} \frac{a}{b} + \frac{\Delta^K(a)}{a}, \quad (67)$$

$$a_2^K \equiv \Lambda_2 \frac{b^2(K_b^2 + 1)}{2a^2(K+1)^2} \quad (68)$$

– амплитуды гармоник,

$$B_{\perp}^K \equiv -B_J \frac{b}{2R_{pl}} \left[\ln \frac{16R_{pl}}{b(K_b+1)} + \frac{2}{K_b+1} \left(\Lambda - \frac{K_b}{2} \right) \right], \quad (69)$$

$$\begin{aligned} \Delta^K(a) \equiv \frac{a^2}{2R_{pl}} \left[\ln \frac{a(K+1)}{b(K_b+1)} + \right. \\ \left. + \frac{2}{K_b+1} \left(\Lambda + \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{b^2(K_b+1)}{a^2(K+1)} \right) \right], \end{aligned} \quad (70)$$

нормировочная константа B_J введена как

$$B_J \equiv \frac{\mu_0 J}{2\pi b}, \quad (71)$$

а величина K , входящая в полученные выражения, удовлетворяет равенству (55).

При $K = K_b = 1$ функции a_0^K и a_1^K превращаются в a_0 и a_1 , введенные равенствами (63) и (64) в [60]. Для удобства сравнения также приведем следствия (69) и (70) в этом пределе:

$$B_{\perp}^{eq} = -B_J \frac{b}{2R_{pl}} \left[\ln \frac{8R_{pl}}{b} + \Lambda - \frac{1}{2} \right], \quad (72)$$

$$\Delta(\ell) = \frac{\ell^2}{2R_{pl}} \left[\ln \frac{\ell}{b} + \left(\Lambda + \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{b^2}{\ell^2} \right) \right]. \quad (73)$$

Оба являются известными результатами В.Д. Шафранова [1–3]. Первое дает величину внешнего вертикального поля, необходимого для поддержания тороидального равновесия круглой плазмы в токамаке. Второе при $\ell = b_w$ дает Δ_{iw} – величину ее смещения относительно идеально проводящей круглой стенки радиуса b_w , когда B_{\perp}^{eq} создается только токами, наведенными в этой стенке, а ее граница совпадает с магнитной поверхностью. Эти соотношения приводятся здесь в обозначениях [60], см. там (1), (65) и рис. 2.

Если входящее в (4) внешнее поле \mathbf{V}^{ext} известно, то выражения (65) с сопутствующими определениями достаточно для интерпретации магнитных измерений с помощью ψ -петель, которые представляют собой кольцевой проводник, проходящий вдоль тора параллельно плазменному шнуру [4, 12–14, 18, 19, 22, 26, 41–43]. Однако при переходных процессах, наиболее ярким примером которых являются срывы [5, 6, 67, 78–80] или принудительное гашение разряда [5, 67, 78–80], величина \mathbf{V}^{ext} сама становится неизвестной из-за токов, наведенных в стенке вакуумной камеры, см. [61]. Поэтому полезным может быть и подобное (65) выражение для $\psi^{ext} = \psi - \psi^{pl}$. Пользуясь (12), мы можем найти его внутри S_{pl} . Для

нашего случая оно получается подстановкой (58) и (61) в (12)

$$\psi^{ext} = \psi_b - \psi_J \left[a_0^K(b) + \frac{B_{\perp}^K}{B_J} \frac{a}{b} \cos \theta + \Lambda_2 \frac{a^2(K^2 + 1)}{2b^2(K_b + 1)^2} \cos 2\theta \right], \quad (74)$$

где a_0^K – функция (66).

Это равенство хорошо дополняет (65)–(68) тем, что обеспечивает $\psi^{pl} + \psi^{ext} = \psi_b$ на границе плазмы, как и должно быть вследствие (3). Оно легко трансформируется к обычным переменным (r, z) . Действительно, в этом разделе (a, θ) связаны с (r, z) посредством (45) и (46) с $R = R_{pl}$, поэтому $a \cos \theta = R_{pl} - r$, $a^2(K^2 + 1) \cos 2\theta = b^2(K_b^2 - 1) + 2[(R_{pl} - r)^2 - z^2]$.

Эти подстановки приводят (74) к виду

$$\psi^{ext} = \psi_0^{ext} + \psi_{\perp}^{ext} + \psi_q^{ext}, \quad (75)$$

где

$$\psi_0^{ext} \equiv \psi_b - \psi_J \left[\ln \frac{16R_{pl}}{b(K_b + 1)} - 2 \right] - \pi R_{pl} b B_2 \frac{K_b^2 - 1}{2} \quad (76)$$

– независящая от координат функция времени,

$$\psi_{\perp}^{ext} \equiv 2\pi R_{pl} B_{\perp}^K (r - R_{pl}), \quad (77)$$

$$\psi_q^{ext} \equiv \pi \frac{R_{pl}}{b} B_2 [z^2 - (R_{pl} - r)^2], \quad (78)$$

а множитель B_2 задается как

$$B_2 \equiv B_J \frac{2\Lambda_2}{(K_b + 1)^2}. \quad (79)$$

Здесь B_J – величина (71), а Λ_2 – величина (63).

6. ОБСУЖДЕНИЕ

В токамаке

$$\psi^{ext} = \psi^e + \psi^w, \quad (80)$$

где e и w обозначают, соответственно, вклады от внешних катушек и стенки вакуумной камеры.

Если ψ^e известно, как и должно быть при заданных токах в полоидальных катушках, разность ψ^{ext} , найденного из условий равновесия плазмы, и ψ^e даст нам ψ^w . Поэтому равенство (75) тоже может быть полезным для диагностики плазмы.

Отметим, что при неизменном ψ^e величина ψ^w дает все 100% изменения ψ^{ext} . По определению найденная ψ^{ext} описывает внешнее поле, необходимое для удержания плазмы в равновесии при заданных R_{pl} и K_b . Равенства (77) и (78) связывают их с B_{\perp}^K и B_2 , которые зависят от параметров плазмы через (69) и (79). Последнее при подстановке (63) дает

$$B_2 = B_J \frac{2}{(K_b + 1)^2} \left(d_b + \frac{K_b^2 - 1}{K_b^2 + 1} \right). \quad (81)$$

При $d_b = 0$, что получается при однородной плотности тока в плазме, это совпадает с результатом (44) в [3], (3.9) в [4], (25) при $j_B = 0$ в [74]. Тогда при $K_b = 1.8$ из (81) получим $B_2 = 0.1348B_J$, а при $K_b = 2$ будет $B_2 = 0.1333B_J$. Это иллюстрирует слабую зависимость $B_2(K_b)$ в окрестности типичного для многих токамаков значения $K_b = 1.8$. При этом даже малые изменения d_b могут сильнее повлиять на приращение δB_2 . Последнее при заданном B_2^e может быть создано только токами в стенке. Если же они недостаточны для поддержания B_2 на уровне (81), то равновесие плазмы в заданном положении будет невозможным. На практике именно так и происходит при срывах, когда при изменении внутренних параметров плазмы она смещается по вертикали и движется к стенке. Такие события, приводящие к контакту горячей плазмы со стенкой и большим электродинамическим нагрузкам, называются vertical displacement events (VDEs) [5–8, 30–34, 36, 38, 67, 78–80]. Переход к VDE и сопутствующие явления при упомянутой слабой зависимости $B_2(K_b)$ должны наблюдаться при тепловом срыве (TQ) в токамаке ИТЭР, см. рис. 5 и далее в [31], где представлены результаты полномасштабных расчетов с помощью кода DINA. Возрастание K_b после TQ и уход плазмы по вертикали указывают на необходимость учета d_b в (81) и его изменения при $\delta J = 0$.

Связь (81) означает, что измеряемой может быть лишь комбинация в правой части. Ясно, что измерения квадрупольного поля должны быть проще и информативнее при срывах тока. Действительно, согласно (81), $B_2 \rightarrow 0$ при $J \rightarrow 0$, что гарантирует большую амплитуду измеряемого сигнала, на уровне 10% от начального B_J .

Наша процедура, основанная на (12), дает нам ψ^{ext} только в объеме плазмы. За его пределами это выражение также удовлетворяет уравнению

$$\nabla \cdot \frac{\nabla \psi^{ext}}{r^2} = 0, \quad (82)$$

но область его применимости вне тора зависит от расположения внешних проводников. В крайнем случае, когда поле \mathbf{B}^{ext} создается токами на поверхности плазмы S_{pl} , как показано формулами (10) и (11), продолжение (74) за пределы S_{pl} некорректно. В обычной же ситуации, когда ближайшим токнесущим проводником является стенка вакуумной камеры S_w , а катушки полоидального поля находятся на некотором удалении от S_w , аппроксимацию (74) можно продолжить вплоть до S_w . Математически это опирается на тот факт, что решение уравнения (82) с заданными граничными условиями единственно. Поэтому совпадение двух решений внутри S_{pl} означает, что они должны быть одинаковы всюду. Следует только помнить, что (74) представляет собой три первых члена ряда Фурье. Точность этого разложения уменьшается при удалении от оси в область, где вклад от более высоких гармоник $\propto r^m \cos mt$ возрастает. С этими оговорками можно рассматривать (74) как приближенное описание внешнего магнитного поля вплоть до S_w .

Согласно (14), (15) и (12), функция ψ^{ext} определяет магнитное поле, создаваемое всеми токами, внешними по отношению к плазме (включая те, которые индуцированы в стенке):

$$2\pi\mathbf{B}_p^{ext} = \nabla\psi^{ext} \times \nabla\zeta. \quad (83)$$

Подстановка (75) дает

$$\frac{r}{R_{pl}}\mathbf{B}_p^{ext} = B_{\perp}^K \mathbf{e}_z + B_2 \frac{(R_{pl} - r)\mathbf{e}_z - z\mathbf{e}_r}{b}. \quad (84)$$

Здесь первое слагаемое (77) определяет амплитуду вертикального поля, необходимого для удержания плазмы по большому радиусу. Сравнение (69) с (72) показывает его отличие от классического значения B_{\perp}^{eq} . Как и должно быть, B_{\perp}^K и B_{\perp}^{eq} совпадают при $K_b = 1$. В численных расчетах [18] было установлено, что они остаются близкими при $K_b < 1.5$. Слабая зависимость B_{\perp}^K от K_b подтверждается формулой (69).

Второе слагаемое описывает квадрупольное магнитное поле, необходимое для вытягивания сечения плазмы. Согласно (84), введенная (79) константа B_2 соответствует величине такого поля на расстоянии b от центра S_{pl} .

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен метод аналитического решения внешней задачи в токамаке с плазмой эллиптического сечения. Построения выполнены по схеме, ранее развитой для круглой плазмы [60], но те-

перь допускаются конечные значения вытянутости K_b . Это существенно меняет граничные условия и требует дополнительных вычислений.

Получение аналитических выражений для \mathbf{B}^{pl} вне плазмы всегда было сопряжено с большими трудностями [1, 4, 23, 66, 68, 74], даже если плазма круглая. Использование в качестве основы математически совершенного равенства (12) со стандартной функцией Грина (16) сводит задачу к вычислению контурного интеграла. Равенство (61) подсказывает удобную параметризацию $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$, которой (с удержанием большего числа гармоник) можно пользоваться при любой форме плазмы. Для завершения вычислений остается преобразовать G к подобному виду. Здесь упрощение достигается переходом к новым переменным (a, θ) , в которых вытянутость K поверхностей $a = \text{const}$ подчиняется условию (55).

Полученные выражения связывают измеряемые магнитные величины с характеристиками плазмы. Обе функции ψ^{pl} и ψ^{ext} определяются интегралом (12), поэтому измерения полоидального магнитного поля в вакуумном зазоре плазменн-стенка могут дать лишь те плазменные параметры, которыми задается B на S_{pl} . В нашем случае это входящие в (61) Λ и Λ_2 и, разумеется, полный ток J . Столь малый объем информации объясняется тем, что \mathbf{B}^{pl} — интегральная величина, см. (7).

Еще одна область, где потребуются приведенные соотношения для ψ^{pl} и ψ^{ext} , — это анализ быстрых переходных процессов, при которых вводятся значительные токи в стенке вакуумной камеры. Начиная с [1], стандартная теория равновесия была нацелена на предсказание горизонтального смещения плазмы. Учет второй гармоники в ψ^{pl} и ψ^{ext} открывает возможность анализа вертикального движения плазмы в более адекватной постановке, нежели в моделях [32, 33, 37] с заменой плазмы тонким жестким проводником.

Авторы благодарны экспертам группы ИГРА по МГД-устойчивости плазмы за многочисленные полезные обсуждения, своим российским коллегам С.В. Коновалову, Н.В. Иванову, Ю.В. Грибову и Б.В. Кутееву за поддержку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шафранов В.Д. // Атомная энергия. 1962. Т. 13. С. 521. [V.D. Shafranov, J. Nuclear Energy C 5, 251 (1963).]
2. Шафранов В.Д. // Вопросы теории плазмы. Вып. 2 / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963. С. 92. [V.D. Shafranov, in *Reviews of Plasma Physics*, ed. by M.A. Leontovich (Consultants Bureau, New York, 1966), Vol. 2, p. 103.]

3. *Mukhovatov V.S., Shafranov V.D.* // Nuclear Fusion. 1971. V. 11. P. 605.
4. *Захаров Л.Е., Шафранов В.Д.* // Вопросы теории плазмы. Вып. 11 / Под ред. М.А. Леонтовича и Б.Б. Кадомцева. М.: Энергоиздат, 1982. С. 118. [L.E. Zakharov and V. D. Shafranov, *Reviews of Plasma Physics, Vol. 11*. Ed. by M.A. Leontovich and B.B. Kadomtsev. Consultants Bureau, New York, 1986.]
5. *Hender T.C., Wesley J.C., Bialek J., Bondeson A., Boozer A.H., Buttery R.J., Garofalo A., Goodman T.P., Granetz R.S., Gribov Y., Gruber O., Gryaznevich M., Giruzzi G., Günter S., Hayashi N. et al.* // Nuclear Fusion. 2007. V. 47. P. S128.
6. *Romanelli F., Kamendje R., JET-EFDA Contributors* // Nuclear Fusion. 2009. V. 49. P. 104006.
7. *Shimada M., Campbell D.J., Mukhovatov V., Fujiwara M., Kirneva N., Lackner K., Nagami M., Pustovitov V.D., Uckan N., Wesley J., Asakura N., Costley A.E., Donné A.J.H., Doyle E.J., Fasoli A. et al.* // Nuclear Fusion. 2007. V. 47. P. S1.
8. *Barabaschi P., Kamada Y., Shirai H., the JT-60SA Integrated Project Team* // Nuclear Fusion. 2019. V. 59. P. 112005.
9. *Khvostenko P.P., Anashkin I.O., Bondarchuk E.N., Injutin N.V., Khvostenko A.P., Kochin V.A., Kuzmin E.G., Levin I.V., Lutchenko A.V., Modyaev A.L., Nikolaev A.V., Notkin G.E., Romannikov A.N., Sidorenko D.M., Sokolov M.M., Solopeko A.V., Sushkov A.V.* // Fusion Eng. Des. 2019. V. 146. P. 1108.
10. *Dubrov M.L., Pustovitov V.D.* // Plasma Phys. Control. Fusion. 2019. V. 61. P. 065018.
11. *Panek R., Markovic T., Cahyna P., Dejarnac R., Havlicek J., Horacek J., Hron M., Imrisek M., Junek P., Komm M., Sestak D., Urban J., Varju J., Weinzettl V., Adamek J. et al.* // Fusion Eng. Des. 2017. V. 123. P. 11.
12. *Lao L.L., St. John H.E., Stambaugh R.D., Pfeiffer W.* // Nuclear Fusion. 1985. V. 25. P. 1421.
13. *Strait E.J.* // Rev. Sci. Instrum. 2006. V. 77. P. 023502.
14. *Strait E.J., Fredrickson E.D., Moret J.-M., Takechi M.* // Fusion Sci. Technol. 2008. V. 53. P. 304.
15. *Fresa R., Albanese R., Arshad S., Coccoresse V., de Magistris M., Minucci S., Pironti A., Quercia A., Rubinacci G., Vayakis G., Villone F.* // Fusion Eng. Des. 2015. V. 100. P. 133.
16. *Pustovitov V.D.* // Fusion Eng. Des. 2017. V. 117. P. 1.
17. *Wootton A.J.* // Nuclear Fusion. 1979. V. 19. P. 987.
18. *Swain D.W., Neilson G.H.* // Nuclear Fusion. 1982. V. 22. P. 1015.
19. *Lao L.L., St. John H., Stambaugh R.D., Kellman A.G., Pfeiffer W.* // Nuclear Fusion. 1985. V. 25. P. 1611.
20. *Кузнецов Ю.К., Пятов В.Н., Ясин И.В.* // Физика плазмы. 1987. Т. 13. С. 139. [Yu.K. Kuznetsov, V.N. Ryatov and I.V. Yasin, *Sov. J. Plasma Phys.* **13** (1987) 75.]
21. *Вабищевич П.Н., Зотов И.В.* // Физика плазмы. 1988. Т. 14. С. 1299. [P.N. Vabishchevich and I.V. Zotov, *Sov. J. Plasma Phys.* **14**, 759–764 (1988)].
22. *Lao L.L., Ferron J.R., Groebner R.J., Howl W., St. John H., Strait E.J., Taylor T.S.* // Nuclear Fusion. 1990. V. 30. P. 1035.
23. *Braams B.J.* // Plasma Phys. Control. Fusion. 1991. V. 33. P. 715.
24. *Kurihara K.* // Fusion Technology. 1998. V. 34. P. 548.
25. *Pustovitov V.D.* // Nuclear Fusion. 2001. V. 41. P. 721.
26. *Lao L.L., St. John H.E., Peng Q., Ferron J.R., Strait E.J., Taylor T.S., Meyer W.H., Zhang C., You K.I.* // Fusion Sci. Technol. 2005. V. 48. P. 968.
27. *Brix M., Hawkes N.C., Boboc A., Drozdov V., Shara-pov S.E., JET-EFDA Contributors* // Rev. Sci. Instrum. 2008. V. 79. P. 10F325.
28. *Demidov A.S., Savel'ev V.V.* // Russian J. Mathematical Physics. 2010. V. 17. P. 56.
29. *Zaitsev F.S., Kostomarov D.P., Suchkov E.P., Drozdov V.V., Solano E.R., Murari A., Matejcek S., Hawkes N.C., JEST-EFDA Contributors* // Nuclear Fusion. 2011. V. 51. P. 103044.
30. *Villone F., Barbato L., Mastrostefano S., Ventre S.* // Plasma Phys. Control. Fusion. 2013. V. 55. P. 095008.
31. *Khayrutdinov R.R., Lukash V.E., Pustovitov V.D.* // Plasma Phys. Control. Fusion. 2016. V. 58. P. 115012.
32. *Kiramov D.I., Breizman B.N.* // Phys. Plasmas. 2017. V. 24. P. 100702.
33. *Pfefferlé D., Bhattacharjee A.* // Phys. Plasmas. 2018. V. 25. P. 022516.
34. *Sovinec C.R., Bunkers K.J.* // Plasma Phys. Control. Fusion. 2019. V. 61. P. 024003.
35. *Isernia N., Pustovitov V.D., Villone F., Yanovskiy V.* // Plasma Phys. Control. Fusion. 2019. V. 61. P. 115003.
36. *Clauser C.F., Jardin S.C., Ferraro N.M.* // Nuclear Fusion. 2019. V. 59. P. 126037.
37. *Bardsley O.P., Hender T.C.* // Phys. Plasmas. 2020. V. 27. P. 102508.
38. *Riccardo V., Walker S., Noll P.* // Fusion Eng. Des. 2000. V. 47. P. 389.
39. *Xu Weiwei, Liu Xufeng, Du Shuangsong, Song Yuntao* // Fusion Eng. Des. 2017. V. 114. P. 131.
40. *Ma Xuebin, Li Min, Liu Songlin* // Fusion Eng. Des. 2018. V. 131. P. 21.
41. *Kurihara K.* // Fusion Eng. Des. 2000. V. 51–52. P. 1049.
42. *Chiariello A.G., Formisano A., Ledda F., Martone R., Murari A., Pizzo F., Terranova D., JET Contributors* // Fusion Eng. Des. 2019. V. 146. P. 2074.
43. *Pan Y., Fan W., Chen C., Yin Z.* // Plasma Sci. Technol. 2019. V. 21. P. 105602.
44. *Pustovitov V.D.* // Plasma Phys. Controlled Fusion. 2008. V. 50. P. 105001.
45. *Стрэттон Дж.А.* Теория электромагнетизма. Москва: ОГИЗ государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948. [J.A. Stratton, *Electromagnetic Theory* (McGraw-Hill, New York, 1941).]
46. *Смайт В.* Электростатика и электродинамика. М.: Изд-во иностранной литературы, 1954. [W.R. Smythe, *Static and Dynamic Electricity*, 3rd ed. (McGraw Hill, New York, 1968).]
47. *Марков Г.Т., Чаплин А.Ф.* Возбуждение электромагнитных волн. М.: “Энергия”, 1967.
48. *Морозов А.И., Соловьев Л.С.* // Вопросы теории плазмы. Вып. 2 / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963. С. 3. [A.I. Morozov and

- L.S. Solov'ev, in: *Reviews of Plasma Physics* (edited by M.A. Leontovich), Consultants Bureau, New York (1966), pp. 1–101.]
49. *Shafranov V.D., Zakharov L.E.* // *Nuclear Fusion*. 1972. V. 12. P. 599.
 50. *Zakharov L.E.* // *Nuclear Fusion*. 1973. V. 13. P. 595.
 51. *Takeda T., Tokuda S.* // *J. Comput. Phys.* 1991. V. 93. P. 1.
 52. *Pustovitov V.D.* // *Reviews of Plasma Physics*. V. 21 / Ed. by *B.B. Kadomtsev and V.D. Shafranov*. New York: Consultants Bureau, 2000. P. 1.
 53. *Strumberger E., Günter S., Merkel P., Schwarz E., Tichmann C., Zehrfeld H.-P.* // *Nuclear Fusion*. 2002. V. 42. P. 827.
 54. *Hirshman S.P., Lazarus E.A., Hanson J.D., Knowlton S.F., Lao L.L.* // *Phys. Plasmas*. 2004. V. 11. P. 595.
 55. *Lazerson S.A., Sakakibara S., Suzuki Y.* // *Plasma Phys. Control. Fusion*. 2013. V. 55. P. 025014.
 56. *Li X., Zakharov L.E., Drozdov V.V.* // *Phys. Plasmas*. 2014. V. 21. P. 012505.
 57. *Hanson J.D.* // *Plasma Phys. Control. Fusion*. 2015. V. 57. P. 115006.
 58. *Sweeney R.M., Strait E.J.* // *Phys. Plasmas*. 2019. V. 26. P. 012509.
 59. *Malhotra D., Cerfon A.J., O'Neil M., Toler E.* // *Plasma Phys. Control. Fusion*. 2020. V. 62. P. 024004.
 60. *Пустовитов В.Д.* // *Физика плазмы*. 2019. Т. 45. С. 1088. [V.D. Pustovitov, *Plasma Phys. Rep.* **45**, 1114 (2019).]
 61. *Pustovitov V.D.* // *Phys. Plasmas*. 2018. V. 25. P. 062510.
 62. *Пустовитов В.Д.* // *Физика плазмы*. 1988. Т. 14. С. 1436. [V.D. Pustovitov, *Sov. J. Plasma Phys.* **14**, 840 (1988).]
 63. *Pustovitov V.D.* // *Nuclear Fusion*. 1990. V. 30. P. 1523.
 64. *Freidberg J.P.* *Ideal MHD*. New York: Plenum, 1987.
 65. *Пустовитов В.Д., Шафранов В.Д.* // *Вопросы теории плазмы*. Вып. 15 / Под ред. Б.Б. Кадомцева. М.: Энергоатомиздат, 1987. С. 146. [V.D. Pustovitov and V.D. Shafranov, in *Reviews of Plasma Physics*, Ed. by *B.B. Kadomtsev* (Energoatomizdat, Moscow, 1987; Consultants Bureau, New York, 1990), Vol. 15. p. 163.]
 66. *Миямото К.* *Основы физики плазмы и управляемого синтеза*. М.: Физматлит, 2007. [K. Miyamoto, *Fundamentals of Plasma Physics and Controlled Fusion*. Revised edn. NIFS-PROC-48 (Toki, National Institute for Fusion Science, 2001).]
 67. *Wesson J.* *Tokamaks*, 3rd ed. Oxford: Clarendon Press, 2004.
 68. *Goedbloed J.P., Keppens R., Poedts S.* *Advanced Magnetohydrodynamics; with Applications to Laboratory and Astrophysical Plasmas*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2010.
 69. *Матвеева Е.А., Пустовитов В.Д.* // *Физика плазмы*. 1988. Т. 14. С. 151. [E.A. Matveeva and V.D. Pustovitov, *Sov. J. Plasma Phys.* **14**, 81 (1988).]
 70. *Guazzotto L., Freidberg J.P.* // *Phys. Plasmas*. 2007. V. 14. P. 112508.
 71. *Ferrara M., Hutchinson I.H., Wolfe S.M.* // *Nuclear Fusion*. 2008. V. 48. P. 065002.
 72. *Stacey W.M., Bae Ch.* // *Phys. Plasmas*. 2009. V. 16. P. 082501.
 73. *Aghbolaghi M.A., Farahani N.D., Davani F.A.* // *Fusion Eng. Des.* 2019. V. 143. P. 1.
 74. *Goedbloed J.P., Zakharov L.E.* // *Nuclear Fusion*. 1980. V. 20. P. 1515.
 75. *Jardin S.C., Pomphrey N., DeLucia J.* // *J. Comput. Phys.* 1986. V. 66. P. 481.
 76. *Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M.* *Table of Integrals, Series and Products*. Academic Press, 2007.
 77. *Gajewski R.* // *Phys. Fluids*. 1972. V. 15. P. 70.
 78. *Lehnen M., Arnoux G., Brezinsek S., Flanagan J., Gerasimov S.N., Hartmann N., Hender T.C., Huber A., Jachmich S., Kiptily V., Kruezi U., Matthews G.F., Morris J., Plyusnin V.V., Reux C., Riccardo V., Sieglin B., de Vries P.C.* // *Nuclear Fusion*. 2013. V. 53. P. 093007.
 79. *Romanelli F.* *JET EFDA Contributors* // *Nuclear Fusion*. 2013. V. 53. P. 104002.
 80. *Hollmann E.M., Aleynikov P.B., Fulop T., Humphreys D.A., Izzo V.A., Lehnen M., Lukash V.E., Papp G., Pautasso G., Saint-Laurent F., Snipes J.A.* // *Phys. Plasmas*. 2015. V. 22. P. 021802.