

## ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА КОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЕ С УСЛОВИЯМИ НЕЙМАНА В ХОЛОДНОЙ ПЛАЗМЕ

© 2021 г. S. Hussain<sup>a, \*</sup>, M. Ayub<sup>a, b</sup>

<sup>a</sup> Department of Mathematics, Quaid-i-Azam University 45320, Islamabad 44000, Pakistan

<sup>b</sup> Department of Mathematics, HITEC University, Taxila, Pakistan

\*e-mail: shussain@math.qau.edu.pk

Поступила в редакцию 22.02.2019 г.

После доработки 01.09.2019 г.

Принята к публикации 22.10.2019 г.

Представлено исследование явления дифракции электромагнитных волн на пластине ограниченной длины под влиянием холодной плазмы. Сформулировано уравнение Винера–Хопфа как краевая задача, связанная с этой моделью, и преобразования Фурье. Используется стандартная процедура для решения уравнения Винера–Хопфа. Используется асимптотическое разложение и модифицированный метод постоянных фаз для нахождения результата для волны, дифрагировавшей на пластине, в приближении граничных условий Неймана в анизотропной среде. Случай изотропной среды был получен приписыванием конкретных значений элементам тензора диэлектрической проницаемости. Только при рассмотрении очень большой частоты по сравнению с циклотронной частотой второй элемент тензора диэлектрической проницаемости принимается равным нулю. Различные физические параметры для изотропных и анизотропных сред обсуждаются с помощью графиков.

**Ключевые слова:** холодная плазма, метод Винера–Хопфа, дифракция волн, электромагнитные волны

**DOI:** 10.31857/S0367292120040046

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Анализ рассеяния волн в полубесконечной пластине, бесконечной пластине, пластине конечного размера, решетках и периодических структурах очень важен в оптике и электромагнитной теории. В связи с этим в последнее время были развиты различные численные и аналитические методы, и явление дифракции было исследовано для множества различных структур. Большое количество методов исследования применяется сейчас к проблеме рассеяния. Метод Римана–Гильберта был использован в теории дифракции и распространении электромагнитных волн [1]. Применяется метод функций Грина двойного ряда для анализа рассеяния волн комбинационными резонансными рассеивателями [2]. Метод аналитической регуляризации использовался для анализа задач на собственные значения также как и для рассеяния волн [3]. Икуно и Ясуура исследовали рассеяние периодической поверхностью методом сопоставления точек [4]. Метод согласования мод был применен для анализа рассеяния электромагнитных волн [5]. Краткое введение в метод Ясуура можно найти в [6]. Интегральный и дифференциальный метод применяется для анализа рассеяния решетками [7].

Хината и Хосоно применили метод сопоставления точки численный анализ рассеяния электромагнитной волны на плоской решетке, расположенной в однородной среде [8]. Анализ электромагнитных полей в неоднородной среде был выполнен с использованием расширенного метода рядов Фурье [9].

Метод Винера–Хопфа [10, 11] используется строго как теоретико-функциональный подход для анализа задач распространения и рассеяния волн, связанных с каноническими геометриями, и может быть эффективно применен для анализа дифракции на конкретных структурах. Анализ дифракции на пластинах, основанный на технике Винера–Хопфа, очень важен. В [12] и [13] была исследована задача о полупространстве, что привело к интенсивному изучению рассеяния звука и электромагнитных волн. К настоящему времени были изучены несколько классических задач на основе дифракции электромагнитных волн на точечном и линейном препятствии. Эти задачи представляют собой канонические задачи ГТД (геометрической теории дифракции). Исследователи продолжили решать задачи дифракции, рассматривая различные плоскости, с помощью различных аналитических и численных методов.

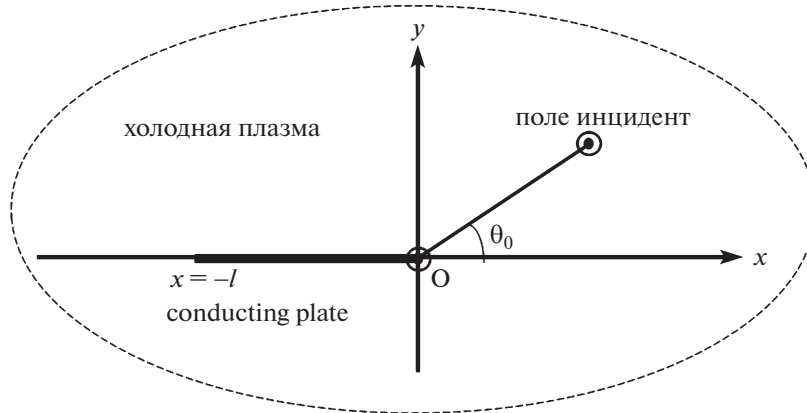


Рис. 1. Схема падения волны на конечную пластину, помещенную в холодную плазму.

Авторы работы [14] исследовали дифракцию плоской волны на щели, были получены точные и асимптотические решения. Позже в [15] была изучена дифракция плоской волны на конечной пластине с импедансными краевыми условиями. При анализе указанной задачи была применена техника Винера–Хопфа.

Анализируя проблемы дифракции, исследователи решили исследовать влияние холодной плазмы. Тогда аналогичным методом было исследовано рассеяние электромагнитной волны в присутствии холодной плазмы. Холодная плазма представлена в верхних слоях земной атмосферы далеко от поверхности Земли. Холодная плазма содержит ионы низкой энергии, которые холоднее, чем это ожидалось учеными. По этой причине пренебрегается давлением и температурой. Явление дифракции плоской волны на импедансной полуплоскости в присутствии холодной плазмы было исследовано в [16]. В [17] проведен анализ дифракции плоской E-поляризованной волны с помощью плоского импедансного волновода, расположенного в холодной плазме. В дальнейшем в [18] было изучено влияние диэлектрической проницаемости холодной плазмы на излучение основной ТЕМ-волны плоским импедансным волноводом. Для анализа этой проблемы был применен метод Винера–Хопфа.

В представленном случае уравнение Гельмгольца моделируется с использованием электрических компонентов в присутствии магнитного поля с учетом эффектов холодной плазмы. Многие исследователи работали с радиосигналами, излучаемыми спутниками. Эти сигналы дифрагируют на различных препятствиях перед регистрацией земной станцией. Препятствия могут иметь различную структуру и характеристики. Целью данной работы является исследование влияния холодной плазмы на радиосигналы, которые дифрагируют на препятствиях (здесь использована

пластина конечной длины). Это важно, так как при прохождении спутником областей с холодной плазмой или при взаимодействии электромагнитного сигнала с холодной плазмой при измерениях могут возникнуть радикальные эффекты. При взаимодействии с холодной плазмой электромагнитный сигнал может измениться. Предполагается, что система погружена в холодную плазму, как показано на рис. 1.

Решение результирующего уравнения Гельмгольца получено с помощью ассоциированных специальных граничных условий техникой Винера–Хопфа. Краткий исторический обзор представлен в [19]. Кроме того, плазма, используемая в настоящей модели, рассматривается как холодная плазма, где можно пренебречь температурой и давлением. Также, здесь рассматривается анизотропия среды в результате намагничивания плазмы земным магнитным полем.

## 2. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Диэлектрическая проницаемость холодной плазмы в тензорном представлении выражается следующим образом

$$\epsilon = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \epsilon_1 & -i\epsilon_2 & 0 \\ i\epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  и  $\epsilon_z$  имеют вид

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= 1 - \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \left[ 1 - \left( \frac{\omega_c}{\omega} \right)^2 \right]^{-1}, \\ \epsilon_2 &= \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \left[ \frac{\omega}{\omega_c} - \frac{\omega_c}{\omega} \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (2)$$

и

$$\varepsilon_z = 1 - \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^2, \quad (3)$$

При этом

$$\omega_p^2 = \frac{N_e e^2}{m \varepsilon_0}, \quad \omega_c = \frac{|e| \mu_0 H_{dc}}{m}. \quad (4)$$

Здесь  $e$  – заряд электрона,  $N$  – концентрация электронов,  $m$  – масса электрона,  $\omega$  – частота,  $\omega_c$  – циклотронная частота,  $\omega_p$  – плазменная частота и  $H_{dc}$  – модуль вектора магнитного поля постоянного тока. Комбинирование уравнений Максвелла и тензора диэлектрической проницаемости дает компоненты электрического поля, представленные в терминах магнитного поля следующим образом:

$$E_x = \frac{i \varepsilon_1}{\omega \varepsilon_0 (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)} \frac{\partial H_z(x, y)}{\partial y} + \frac{\varepsilon_2}{\omega \varepsilon_0 (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)} \frac{\partial H_z(x, y)}{\partial x}, \quad (5)$$

и

$$E_y = \frac{\varepsilon_2}{\omega \varepsilon_0 (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)} \frac{\partial H_z(x, y)}{\partial y} - \frac{i \varepsilon_1}{\omega \varepsilon_0 (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)} \frac{\partial H_z(x, y)}{\partial x}. \quad (6)$$

Таким образом, с помощью уравнений (5) и (6) получается уравнение Гельмгольца в холодной плазме, имеющее вид

$$\partial_{xx} H_z(x, y) + \partial_{yy} H_z(x, y) + k_{eff}^2 H_z(x, y) = 0, \quad (7)$$

где

$$k_{eff} = k \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2}{\varepsilon_1}} \quad \text{и} \quad k = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}. \quad (8)$$

### 3. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ

Мы рассмотрели задачу о падении электромагнитной волны на проводящую пластину, у которой один край имеет координату  $x = 0$ , а другой координату  $x = -l$ . На поверхности пластины поставлены граничные условия Неймана. Падающая волна образует с горизонтальной осью угол  $\theta_0$ , который называется углом падения. Полное поле имеет следующее представление:

$$H_z^{tot}(x, y) = H_z^{inc}(x, y) + H_z(x, y), \quad (9)$$

где  $H_z^{inc}$  – падающее поле, которое определяется как

$$H_z^{inc}(x, y) = \exp\{-ik_{eff}(x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0)\}, \quad (10)$$

где  $k_{eff}$  – определенный в (8), – эффективное волновое число в свободном пространстве,  $k$  – волновое число в свободном пространстве. Для удобства аналитического решения считается, что среда характеризуется слабым затуханием, так что  $k_{eff} = \text{Re} k_{eff} + i \text{Im} k_{eff}$  ( $0 < \text{Im} k_{eff} \ll \text{Re} k_{eff}$ ), а решение для действительного  $k$  получается в предположении  $\text{Im} k_{eff} \rightarrow 0$  [20]. Рассматриваемая краевая задача (КЗ) сформулирована в терминах приведенного потенциала в безразмерном виде и будет целесообразным ввести обозначения для разделенного поля в различных типах областей.

Полное поле  $H_z^{tot}(x, y)$  в диапазоне  $x \in (-\infty, \infty)$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$[\partial_{xx} + \partial_{yy} + k_{eff}^2] H_z^{tot}(x, y) = 0. \quad (11)$$

Продифрагировавшее поле, удовлетворяющее уравнению Гельмгольца, может быть извлечено из предыдущего уравнения следующим образом

$$[\partial_{xx} + \partial_{yy} + k_{eff}^2] H_z(x, y) = 0. \quad (12)$$

Нашей целью является определение дифракции падающей волны на конечную пластину с краевыми условиями Неймана. Условия Неймана поставлены вдоль поверхности пластины. Таким образом, для определения продифрагировавшего поля  $H_z$  определяются следующие граничные условия и условия непрерывности

$$\partial_y H_z^{tot}(x, 0^\pm) = 0 \quad \text{для} \quad -l \leq x \leq 0, \quad (13)$$

и

$$\begin{cases} c H_z^{tot}(x, 0^+) = H_z^{tot}(x, 0^-), \\ -\infty < x < -l, \quad x > 0, \\ \partial_y H_z^{tot}(x, 0^+) = \partial_y H_z^{tot}(x, 0^-), \\ -\infty < x < -l, \quad x > 0. \end{cases} \quad (14)$$

### 4. ТРАНСФОРМАЦИЯ ЗАДАЧИ

Применение преобразования Фурье по переменной  $x$  дает решение краевой задачи

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\alpha, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H_z(x, y) e^{i\alpha x} dx = \\ &= \mathcal{F}_+(\alpha, y) + e^{-i\alpha l} \mathcal{F}_-(\alpha, y) + \mathcal{F}_l(\alpha, y), \end{aligned} \quad (15)$$

где  $\alpha = \text{Re}\{\alpha\} + i\text{Im}\{\alpha\} = \sigma + i\tau$ . Ассимптотическое поведение  $H_z(x, y)$  при  $x \rightarrow \pm\infty$  имеет вид

$$H_z(x, y) = \begin{cases} O(e^{-ik_{eff}x}), \\ O(e^{-k_{eff}x \cos \theta_0}). \end{cases} \quad (16)$$

$\mathcal{F}_+(\alpha, y)$  ведет себя как регулярная функция  $\alpha$  при,  $-\text{Im}\{k_{eff}\} < \text{Im}\{\alpha\}$  и  $\mathcal{F}_-(\alpha, y)$  ведет себя как регулярная функция  $\alpha$  при  $\text{Im}\{\alpha\} < \text{Im}\{k_{eff}\} \cos \theta_0$ ,  $\mathcal{F}_l(\alpha, y)$  ведет себя как аналитическая функция  $\alpha$  в общей области  $-\text{Im}\{k_{eff}\} < \text{Im}\{\alpha\} < \text{Im}\{k_{eff} \cos \theta_0\}$ , что определяет область применимости техники Винера–Хопфа. Таким образом

$$\mathcal{F}_+(\alpha, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty H_z(x, y) e^{i\alpha x} dx, \quad (17)$$

$$\mathcal{F}_-(\alpha, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-l} H_z(x, y) e^{i\alpha(x+l)} dx, \quad (18)$$

$$\mathcal{F}_l(\alpha, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-l}^0 H_z(x, y) e^{i\alpha x} dx. \quad (19)$$

$$\mathcal{F}^{inc}(\alpha, 0) = \frac{1 - e^{-il(\alpha - k_{eff} \cos \theta_0)}}{i(\alpha - k_{eff} \cos \theta_0)}. \quad (20)$$

Применение преобразования Фурье к уравнениям (12)–(14) дает,

$$\left( \frac{d^2}{dy^2} + \gamma^2 \right) \mathcal{F}(\alpha, y) = 0, \quad (21)$$

где  $\gamma(\alpha) = \sqrt{k_{eff}^2 - \alpha^2}$ ,

$$\partial_y \mathcal{F}_l(\alpha, 0^+) = -\partial_y \mathcal{F}^{inc}(\alpha, 0), \quad (22)$$

$$\partial_y \mathcal{F}_l(\alpha, 0^-) = -\partial_y \mathcal{F}^{inc}(\alpha, 0), \quad (23)$$

и

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_-(\alpha, 0^+) &= \mathcal{F}_-(\alpha, 0^-) = \mathcal{F}_-(\alpha, 0), \\ \mathcal{F}_+(\alpha, 0^+) &= \mathcal{F}_+(\alpha, 0^-) = \mathcal{F}_+(\alpha, 0), \\ \partial_y \mathcal{F}_-(\alpha, 0^+) &= \partial_y \mathcal{F}_-(\alpha, 0^-) = \partial_y \mathcal{F}_-(\alpha, 0), \\ \partial_y \mathcal{F}_+(\alpha, 0^+) &= \partial_y \mathcal{F}_+(\alpha, 0^-) = \partial_y \mathcal{F}_+(\alpha, 0). \end{aligned} \quad (24)$$

### 5. МОДЕЛИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ВИНЕРА–ХОПФА

Решение уравнения (21), удовлетворяющее условиям излучения, имеет вид

$$\mathcal{F}(\alpha, y) = \begin{cases} A_1(\alpha) e^{-i\gamma y} & y \geq 0, \\ A_2(\alpha) e^{i\gamma y} & y < 0. \end{cases} \quad (25)$$

С помощью уравнений (15) и уравнений (22)–(25) вычисляется следующее функциональное уравнение Винера–Хопфа:

$$\mathcal{F}'_+(\alpha, 0) + e^{-i\alpha l} \mathcal{F}'_-(\alpha, 0) + \mathcal{H}(\alpha) F_l(\alpha, 0) = -k_{eff} \sin \theta_0 \mathcal{G}(\alpha), \quad (26)$$

где

$$\mathcal{H}(\alpha) = i\gamma, \quad (27)$$

$$F_l(\alpha, 0) = \frac{1}{2} [\mathcal{F}_l(\alpha, 0^+) - \mathcal{F}_l(\alpha, 0^-)], \quad (28)$$

$$\mathcal{G}(\alpha) = \frac{(1 - e^{-i(\alpha - k_{eff} \cos \theta_0)l})}{\sqrt{2\pi}(\alpha - k_{eff} \cos \theta_0)}. \quad (29)$$

### 6. ПРОЦЕДУРА ВИНЕРА–ХОПФА

Опустим детали и последуем за процедурой из [10]. Коэффициент ядра, вытекающий из (26), раскладывается на сомножители

$$\mathcal{H}(\alpha) = i\gamma = \mathcal{H}_+(\alpha) \mathcal{H}_-(\alpha), \quad (30)$$

$$\mathcal{H}_+(\alpha) = e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{k_{eff} + \alpha}, \quad \mathcal{H}_-(\alpha) = e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{k_{eff} - \alpha}, \quad (31)$$

и

$$\gamma(\alpha) = \gamma_+(\alpha) \gamma_-(\alpha), \quad (32)$$

$$\gamma_+(\alpha) = \sqrt{k_{eff} + \alpha}, \quad \gamma_-(\alpha) = \sqrt{k_{eff} - \alpha}, \quad (33)$$

где  $\mathcal{H}_+(\alpha)$  и  $\gamma_+(\alpha)$ , регулярные при  $\text{Im}\{\alpha\} > -\text{Im}\{k_{eff}\}$ , лежат в верхней полуплоскости, а  $\mathcal{H}_-(\alpha)$  и  $\gamma_-(\alpha)$ , регулярные при  $\text{Im}\{\alpha\} < \text{Im}\{k_{eff}\} \cos \theta_0$ , лежат в нижней полуплоскости. Вывод и анализ уравнения (26) с использованием того же пути даны в [10]. Этот анализ может быть использован для получения приближенного решения для больших  $k_{eff}r$  ( $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ). Приравняв члены (26) с положительным знаком на одной стороне уравнения и члены с отрицательным знаком на другой стороне, получаем, следовательно, ту же функцию, скажем,  $J(\alpha)$ . Аналитическое продолжение наряду с расширенной формой теоремы Лиувилля позволяет предположить, что  $J(\alpha)$  как целая функция, фигурирующая в виде полинома, приравнивается к нулю. Исключая подробные расчеты по методике, приведенной в [10], получаем следующие результаты

$$\mathcal{F}'_+(\alpha, 0) = \frac{\mathcal{A}\mathcal{H}_+(\alpha)}{\sqrt{2\pi}} (\mathcal{G}_1(\alpha) + \mathcal{T}(\alpha) \mathcal{C}_1), \quad (34)$$

$$\mathcal{F}'_-(\alpha, 0) = \frac{\mathcal{A}\mathcal{H}_-(\alpha)}{\sqrt{2\pi}} (\mathcal{G}_2(-\alpha) + \mathcal{T}(-\alpha) \mathcal{C}_2), \quad (35)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1(\alpha) &= \frac{1}{(\alpha - k_{eff} \cos \theta_0)} \left( \frac{1}{\mathcal{H}_+(\alpha)} - \frac{1}{\mathcal{H}_+(k_{eff} \cos \theta_0)} \right) - \exp(-ilk_{eff} \cos \theta_0) \mathcal{R}_1(\alpha), \\ \mathcal{G}_2(\alpha) &= \frac{\exp(ilk_{eff} \cos \theta_0)}{(\alpha + k_{eff} \cos \theta_0)} \times \\ &\times \left( \frac{1}{\mathcal{H}_+(\alpha)} - \frac{1}{\mathcal{H}_+(-k_{eff} \cos \theta_0)} \right) - \mathcal{R}_2(\alpha), \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= \mathcal{H}_+(k_{eff}) \left( \frac{\mathcal{G}_2(k_{eff}) + \mathcal{H}_+(k_{eff}) \mathcal{G}_1(k_{eff}) \mathcal{T}(k_{eff})}{1 - \mathcal{H}_+(k_{eff}) \mathcal{T}^2(k_{eff})} \right), \\ \mathcal{C}_2 &= \mathcal{H}_+(k_{eff}) \left( \frac{\mathcal{G}_1(k_{eff}) + \mathcal{H}_+(k_{eff}) \mathcal{G}_2(k_{eff}) \mathcal{T}(k_{eff})}{1 - \mathcal{H}_+^2(k_{eff}) \mathcal{T}^2(k_{eff})} \right), \end{aligned} \quad (37)$$

$$\mathcal{R}_{1,2}(\alpha) = \frac{E_{-1} [W_{-1}(-i(k_{eff} \pm k_{eff} \cos \theta_0)l) - W_{-1}(-i(k_{eff} + \alpha)l)]}{2\pi i (\alpha \mp k_{eff} \cos \theta_0)}, \quad (40)$$

$$\mathcal{T}(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} E_{-1} W_{-1}(-i(k_{eff} + \alpha)l), \quad (41)$$

$$E_{-1} = 2 \exp(ik_{eff}l) (l)^{\frac{1}{2}} (i)^{-\frac{1}{2}}, \quad (42)$$

и

$$\begin{aligned} W_{n-\frac{1}{2}}(p) &= \int_0^\infty \frac{u^n \exp(-u)}{u+p} du = \\ &= \Gamma(n+1) \exp\left(\frac{p}{2}\right) p^{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}} W_{-\frac{1}{2}(n+1), \frac{1}{2}n}(p), \end{aligned} \quad (43)$$

где  $p = -i(k_{eff} + \alpha)l$  и  $n = -1/2$ .  $W_{m,n}$  известна как функция Уиттгера.

Из (25) и (26) дифрагированное поле в пространстве изображений дается следующим выражением:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\alpha, y) &= -\frac{1}{\mathcal{H}(\alpha)} \times \\ &\times \left[ \mathcal{F}'_+(\alpha, 0) + \mathcal{F}'_l(\alpha, 0) + e^{-i\alpha l} \mathcal{F}'_-(\alpha, 0) \right] e^{-i\gamma|y|}, \end{aligned} \quad (44)$$

где

$$\mathcal{F}'_l(\alpha, 0) = -\mathcal{A} \mathcal{G}(\alpha), \quad \text{и} \quad \mathcal{A} = -k_{eff} \sin \theta_0. \quad (45)$$

Дифрагировавшее поле в реальном пространстве получается при применении обратного Фурье преобразования  $\mathcal{F}(\alpha, y)$ , которое определяется следующим образом:

$$H_z(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\alpha, y) e^{-i\alpha x - i\gamma|y|} d\alpha. \quad (46)$$

Используя (44) и (46), получим

$$\begin{aligned} H_z(x, y) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mathcal{H}(\alpha)} \times \\ &\times \left[ \mathcal{F}'_+(\alpha, 0) + \mathcal{F}'_l(\alpha, 0) + e^{-i\alpha l} \mathcal{F}'_-(\alpha, 0) \right] e^{-i\alpha x - i\gamma|y|} d\alpha, \end{aligned} \quad (47)$$

Теперь  $H_z(x, y)$  состоит из двух частей  $H_z^{sep}(x, y)$  и  $H_z^{int}(x, y)$

$$H_z(x, y) = H_z^{sep}(x, y) + H_z^{int}(x, y), \quad (48)$$

где

$$\begin{aligned} H_z^{sep}(x, y) &= -\frac{1}{2\pi} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{H}_+(\alpha) e^{(-i\alpha x - i\gamma|y|)}}{\mathcal{H}(\alpha) \mathcal{H}_+(k_{eff} \cos \theta_0) (\alpha - k_{eff} \cos \theta_0)} d\alpha \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-il(\alpha - k_{eff} \cos \theta_0)) \mathcal{H}_+(-\alpha) e^{(-i\alpha x - i\gamma|y|)}}{\mathcal{H}(\alpha) \mathcal{H}_+(-k_{eff} \cos \theta_0) (\alpha - k_{eff} \cos \theta_0)} d\alpha, \end{aligned} \quad (49)$$

и

$$\begin{aligned} H_z^{int}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mathcal{H}(\alpha)} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \mathcal{H}_+(\alpha) \mathcal{R}_1(\alpha) e^{-ilk_{eff} \cos \theta_0} \\ -\mathcal{H}_+(\alpha) \mathcal{T}(\alpha) \mathcal{C}_1 \\ +\mathcal{H}_+(-\alpha) \mathcal{R}_2(-\alpha) e^{-i\alpha l} \\ -\mathcal{H}_+(-\alpha) \mathcal{T}(-\alpha) \mathcal{C}_2 e^{-i\alpha l} \end{pmatrix} e^{(-i\alpha x - i\gamma|y|)} d\alpha. \end{aligned} \quad (50)$$

Разделенное поле, определяемое уравнением (49) состоит из двух частей. Одна соответствует дифракции на краю  $x = 0$ , а другая – на краю  $x = -l$ . Поле взаимодействия, определяемое уравнением (50), соответствует взаимодействию одного края с другим в отсутствии других.

## 7. ПОЛУЧЕНИЕ

### ПРОДИФРАГИРОВАВШЕГО ПОЛЯ

В дальней зоне решение для продифрагированного поля может быть получено с помощью асимптотической оценки интегралов, появляющихся в (49) и (50). С этой целью вводятся полярные координаты  $x = r \cos \theta$ ,  $|y| = r \sin \theta$ , и следующие

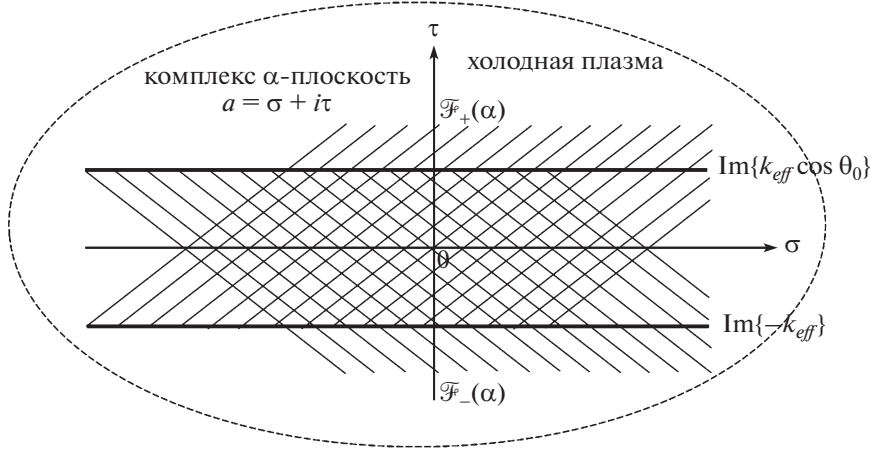


Рис. 2. Аналитическое продолжение на комплексной  $\alpha$ -плоскости.

шее преобразование, помогающее деформировать контур

$$\alpha = -k_{eff} \cos(\theta + i\zeta), \quad \text{где} \quad (51)$$

$$0 < \theta < \pi, \quad -\infty < \zeta < \infty.$$

Таким образом, используя модифицированный метод стационарных фаз [21], уравнение (46) принимает следующий вид:

$$H_z(x, y) = \frac{ik_{eff}}{\sqrt{k_{eff}r}} \mathfrak{F}(-k_{eff} \cos \theta, y) \sin \theta \exp\left(ik_{eff}r + i\frac{\pi}{4}\right). \quad (52)$$

Аналогично, применение модифицированного метода стационарных фаз [21] к интегралам (49) и (50) дает следующий результат:

$$H_z^{sep}(x, y) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{ik_{eff}}{\sqrt{k_{eff}r}} \times \quad (53)$$

$$\times f_{sep}(-k_{eff} \cos \theta) \sin \theta \exp\left(ik_{eff}r + i\frac{\pi}{4}\right),$$

$$H_z^{int}(x, y) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{ik_{eff}}{\sqrt{k_{eff}r}} \times \quad (54)$$

$$\times f_{int}(-k_{eff} \cos \theta) \sin \theta \exp\left(ik_{eff}r + i\frac{\pi}{4}\right),$$

где

$$f_{sep}(-k_{eff} \cos \theta) = \frac{\mathfrak{H}_+(-k_{eff} \cos \theta)}{\mathfrak{H}(-k_{eff} \cos \theta) \mathfrak{H}_+(-k_{eff} \cos \theta_0) (-k_{eff} \cos \theta - k_{eff} \cos \theta_0)} - \frac{\exp(ik_{eff}(\cos \theta + \cos \theta_0)l) \mathfrak{H}_+(k_{eff} \cos \theta)}{\mathfrak{H}(-k_{eff} \cos \theta) \mathfrak{H}_+(k_{eff} \cos \theta_0) (-k_{eff} \cos \theta - k_{eff} \cos \theta_0)}, \quad (55)$$

и

$$f_{int}(-k_{eff} \cos \theta) = \frac{1}{\mathfrak{H}(-k_{eff} \cos \theta)} \times \begin{pmatrix} \mathfrak{H}_+(-k_{eff} \cos \theta) \mathfrak{R}_1(-k_{eff} \cos \theta) e^{ik_{eff} \cos \theta_0} \\ + \mathfrak{H}_+(k_{eff} \cos \theta) \mathfrak{R}_2(k_{eff} \cos \theta) e^{ik_{eff} \cos \theta} \\ - \mathfrak{H}_+(-k_{eff} \cos \theta) \mathfrak{I}(-k_{eff} \cos \theta) \mathfrak{C}_1 \\ - \mathfrak{H}_+(k_{eff} \cos \theta) \mathfrak{I}(k_{eff} \cos \theta) \mathfrak{C}_2 e^{ik_{eff} \cos \theta} \end{pmatrix}. \quad (56)$$

Уравнение (52) дает асимптотическое представление продифрагировавшего поля в дальней зоне как  $k_{eff}r \rightarrow \infty$ . Также асимптотическое разложение  $H_z(x, y)$  справедливо для любого угла на-

блюдения всюду в пространстве. Найдено, что разделенное поле представляет собой поле, дифрагировавшее на краях  $x = -l$  и  $x = 0$ , плюс дополнительный вклад в поле геометрической волны, не включенный в поле падения. Разделенное поле является результирующим полем, которое вносит вклад в физику задачи. В то время как взаимодействующее поле обеспечивает взаимодействие одного края с другим, однако не приводит ни к какой физике задачи. Разделенное поле обеспечивает физическое восприятие явления дифракции на определенной границе. Таким образом, только разделенное поле принимается во внимание при численном моделировании, так как оно описывает процесс дифракции на кон-

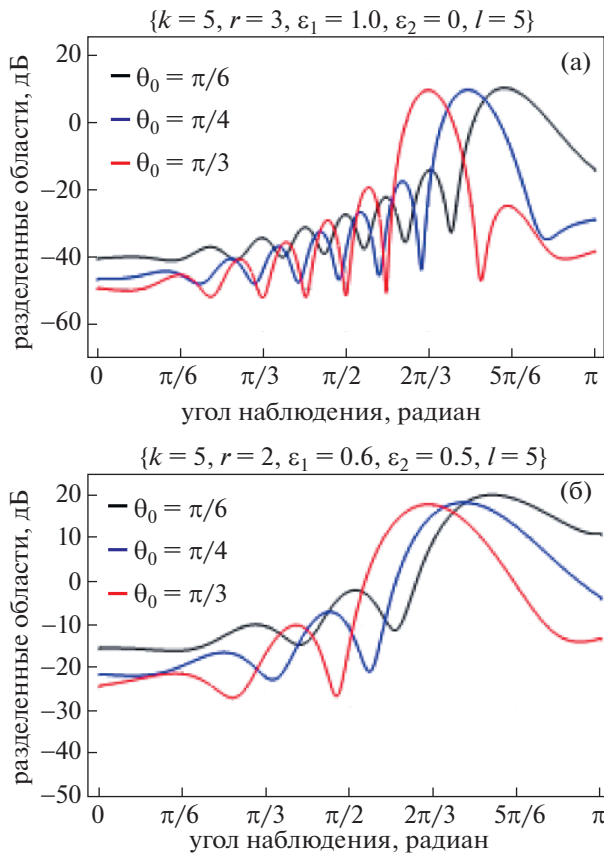


Рис. 3. Зависимость разделенного поля от угла падения в изотропной (а) и анизотропной (б) среде для  $l = 5$ .

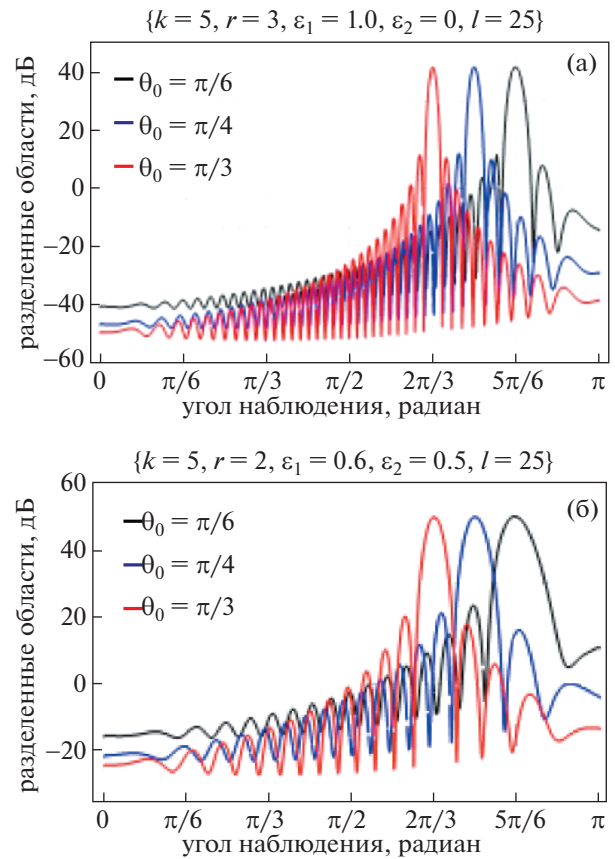


Рис. 4. Зависимость разделенного поля от угла падения в изотропной (а) и анизотропной (б) среде для  $l = 25$ .

кретной границе. Более того, поле взаимодействия появляется за счет двойной дифракции на двух краях, которая уже учтена в форме разделенного поля краями  $x = -l$  и  $x = 0$ . Кроме того, увеличение длины пластины до бесконечности убирает вклад, возникающий из-за членов взаимодействия, и, следовательно, разделенное поле представляется дифракционным полем. Таким образом, только разделенное поле обсуждается в следующем разделе.

## 8. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Влияние физических параметров, таких как угол падения, волновое число, компоненты тензора диэлектрической проницаемости  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  и длина плиты на явление дифракции исследуется численно с помощью изображения зависимости вариации разделенного поля ( $20 \log$ ) от угла наблюдения  $\theta_0$ . На рис. 3 и 4 представлены результаты для различных углов падения  $\theta_0$  при фиксированных остальных параметрах. При увеличении значения угла падения, разделенное поле получает сдвиг фазы в обратном направлении.

Анизотропная среда холодной плазмы вызывает вертикальный сдвиг разделенного поля и увеличение длины волны, как показано на рис. 3б и 4б. Также для деформации контура в гиперболическую форму мы формулируем следующие преобразования

$$\alpha = -k_{eff} \cos(\theta + i\xi)$$

где  $0 < \theta < \pi$ ,  $-\infty < \xi < \infty$ ,

так что контур над  $\alpha$  приобретает форму гиперболы. Если  $\theta < \theta_0$ , две гиперболы никогда не пересекутся друг с другом, но инверсия неравенства вызывает вклад полюса, приводящий к подавлению падающей волны в области тени. Как показано на рис. 5, амплитуда разделенной волны уменьшается при увеличении  $k$ . Из этого следует, что частота волны движется в сторону нижней границы частоты. Присутствие анизотропной среды приводит к увеличению длины волны разделенного поля, как показано на рис. 5. Также наблюдается, что анизотропная среда холодной плазмы, вызывающая увеличение длины волны, воздействует на разделенное поле в виде вертикального сдвига, как показано на рис. 5б, по срав-

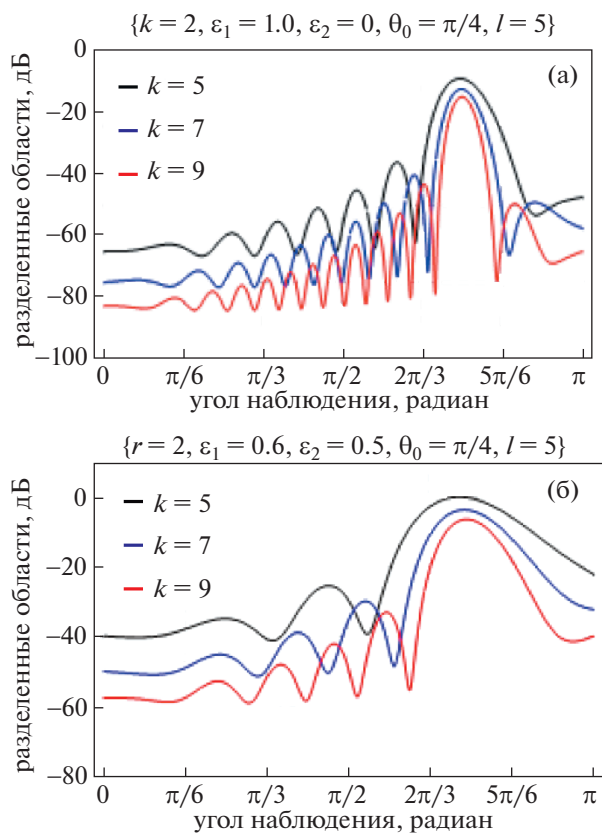


Рис. 5. Зависимость разделенного поля от волнового числа в изотропной (а) и анизотропной (б) среде.

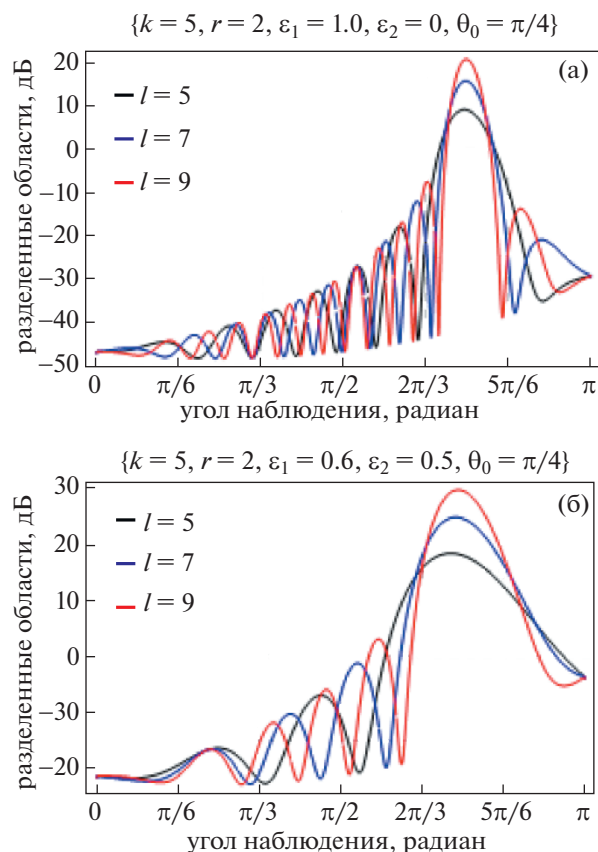


Рис. 6. Зависимость разделенного поля от длины пластины в изотропной (а) и анизотропной (б) среде.

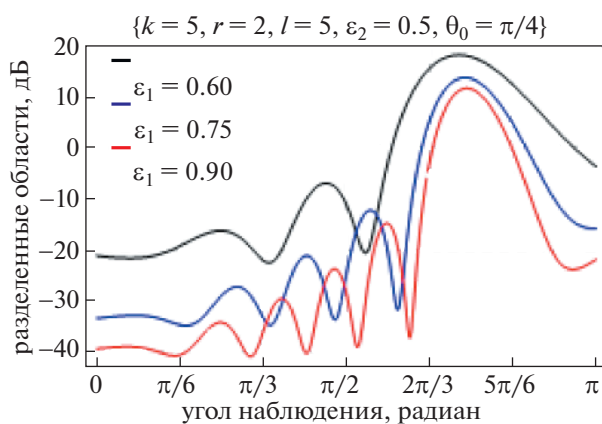


Рис. 7. Зависимость разделенного поля от компоненты диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_1$ .

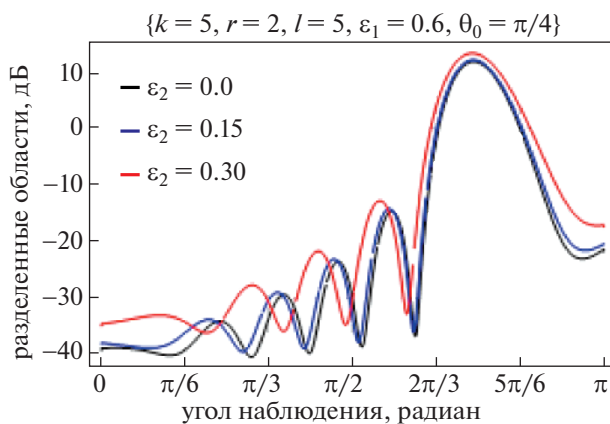


Рис. 8. Зависимость разделенного поля от компоненты диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_2$ .

нению со случаем изотропной среды, показанным на рис. 5а. Рисунок 6 – графическое описание разделенного поля для разных длин пластины  $l$ . На этих двух рисунках видно, что амплитуда растет с ростом длины пластины. На рис. 6б длина волны становится больше из-за наличия ани-

тропной среды холодной плазмы, чем длина волны разделенного поля в изотропной среде, как показано на рис. 6а. Причиной этого увеличения является пренебрежение давлением и температурой холодной плазмы. Рисунок 7 демонстрирует влияние диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_1$  хо-



лодной плазмы на разделенное поле. Резкое влияние  $\epsilon_1$  на разделенное поле наблюдается при наличии анизотропной среды. Амплитуда разделенного поля уменьшается при увеличении  $\epsilon_1$ . На рис. 8 амплитуда разделенного поля слабо увеличивается при увеличении  $\epsilon_2$ . Улучшение в  $\epsilon_1$  приводит к увеличению циклотронной частоты  $\omega_c$ . Следовательно, магнитная сила Лоренца увеличивается и приводит к увеличению амплитуды разделенного поля (продифрагировавшего поля).

## 9. ВЫВОДЫ

В настоящем сообщении представлено строгое исследование электромагнитной волны, дифрагирующей на конечной пластине с условиями Неймана, погруженной в холодную плазму. Обнаружено, что на разделенное поле влияют (а) увеличение длины пластины, (б) изменение угла падения, (с) изменение волнового числа, (д) различные значения диэлектрической проницаемости элементов холодной плазмы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shestopalov V.P.* The Riemann–Hilbert Method in the Theory of Diffraction and Propagation of Electromagnetic Waves. Kharkov University Press, Kharkov, 1971.
2. *Nosich A.I.* Analytical and Numerical Methods in Electromagnetic Wave Theory. Science House, Tokyo, 1993.
3. *Nosich A.I.* IEEE Antennas Propagat. Mag. 1999. V. 41. P. 34.
4. *Okuno H., Yasuura K.* IEEE Trans. Antennas Propagat. 1973. V. 21. P. 657.
5. *Okuno Y.* Analysis Methods for Electromagnetic Wave Problems. Artech House, Boston, 1990.
6. *Okuno Y.* Analytical and Numerical Methods in Electromagnetic Wave Theory. Science House, Tokyo, 1993.
7. *Petit R.* Electromagnetic Theory of Gratings. Springer-Verlag, Berlin, 1980.
8. *Hinata T., Hosono T.* Trans. IECE Japan. 1976. V. J59-B. P. 571.
9. *Yamasaki T., Isono K., Hinata T.* IEICE Trans. Electron. 2005. V. E88-C. P. 2216.
10. *Noble B.* Methods Based on the Wiener-Hopf Technique for the Solution of Partial Differential Equations. Pergamon, London, 1958.
11. *Mitra R., Lee S.-W.* Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves. Macmillan, New York, 1971.
12. *Poincare H.* Acta Math. 1892. V. 16. P. 297.
13. *Sommerfeld A.* Math. Ann. 1896. V. 47. P. 317.
14. *Kobayashi K.* J. Phys. Soc. Jpn. 1991. V. 60. P. 1891.
15. *Nawaz R., Ayub M., Javaid A.* PloS ONE. 2014. V. 9. P. 01.
16. *Sahin I., Serbest A.H., Lyalinov M.A.* IEEE. 1998. V. 38. P. 569.
17. *Khan T.A., Ayub M., Jilani K.* Physica Scripta. 2014. V. 89. P. 01.
18. *Ayub M., Khan T.A., Jilani K.* Math. Meth. Appl. Sci. 2016. V. 39. P. 134.
19. *Lawrie J.B., Abrahams I.D.* J. Engineering Mathematics. 2007. V. 59. P. 351.
20. *Zheng J.P., Kobayashi K.* Progress In Electromagnetic Research B. 2009. V. 13. P. 203.
21. *Copson E.T.* Asymptotic Expansions. University Press, Cambridge, 1967.