

ВЛИЯНИЕ НЕВЗАИМНЫХ СИЛ  
НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПЫЛЕВЫХ КЛАСТЕРОВ

© 2021 г. А. М. Игнатов\*

Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН, Москва, Россия

\*e-mail: aign@fpl.gpi.ru

Поступила в редакцию 20.12.2020 г.

После доработки 14.01.2021 г.

Принята к публикации 15.01.2021 г.

Исследуется устойчивость плоских пылевых кластеров в виде правильного многоугольника с числом частиц от двух до пяти. Предполагается, что частицы расположены в плазме с максвелловскими электронами и с направленным потоком холодных ионов. Показано, что наряду с аperiодическими неустойчивостями могут развиваться осцилляционные неустойчивости. Определены области параметров плазмы, в которых осцилляционная неустойчивость кластера, состоящего из пяти частиц, насыщается на слабонелинейной стадии. В результате кластер формирует временной кристалл, который может быть хиральным.

*Ключевые слова:* пылевая плазма, плазменный кластер, временной кристалл

DOI: 10.31857/S0367292121050024

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В физике пылевой плазмы [1–3] кластерами называются ансамбли из небольшого числа макрочастиц, левитирующих в приэлектродном слое газоразрядной плазмы [4]. Равновесная высота левитации определяется балансом между силой тяжести и электростатическим отталкиванием заряженных частиц от нижнего электрода. В горизонтальном направлении удержание частиц обеспечивается при помощи специального профилирования электрода. Таким образом, отдельная частица оказывается в асимметричной потенциальной яме с характерными частотами колебаний в вертикальном направлении  $\Omega_0$  и горизонтальном направлении  $\Omega_1$ .

Отличительной чертой взаимодействия частиц является то, что благодаря направленному потоку ионов в приэлектродной области, электростатический потенциал вокруг заряженной частицы оказывается несимметричной функцией координат  $U(\rho, z) \neq U(\rho, -z)$  (ось  $z$  направлена вертикально). В результате взаимодействие между частицами оказывается не взаимным, т.е. нарушается третий закон Ньютона. Это, в частности, приводит к связи смещений отдельных частиц в вертикальном и горизонтальном направлениях.

Теоретические исследования динамики и устойчивости плоских плазменных кластеров (например, [5–9]) проводились в предположении, что частицы взаимодействуют посредством

кулоновского или каких-либо модельных потенциалов, не учитывающих влияния не взаимных сил. Настоящая статья является продолжением серии работ [10–14], в которых динамика двумерных ансамблей частиц исследовалась при помощи рассчитываемого численными методами потенциала взаимодействия. Развиваемый подход позволяет полностью учесть не взаимность межчастичных сил.

Рассматривается динамика кластеров в форме правильного многоугольника, состоящих из небольшого числа ( $N = 2 \dots 5$ ) частиц. Как известно, в квазидвумерных плазменных кристаллах не взаимность межчастичных сил приводит к развитию неустойчивости связанных волн [3]. Нелинейная теория этой неустойчивости [14] показывает, что в некотором диапазоне параметров плазмы формируется временной кристалл, т.е. в основном состоянии пылевые частицы осциллируют вблизи равновесных положений. Подобная неустойчивость, называемая в настоящей статье осцилляционной, может развиваться и в случае конечных кластеров.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 кратко описана используемая модель. Далее (раздел 3) линеаризованные уравнения движения для  $N$ -частичного кластера приведены к блочно-диагональному виду. В разделе 4 исследуются собственные частоты для различных кластеров и определены области параметров, для которых развивается тот или иной тип неустойчиво-

сти. Наконец, в разделе 5 развивается нелинейная теория наиболее интересной осцилляционной неустойчивости для кластера, состоящего из пяти частиц.

## 2. МОДЕЛЬ

Рассматривается ансамбль, состоящий из  $N$  частиц, расположенных во внешней потенциальной яме  $U_{ext}(\mathbf{r}) = \Omega_1^2(x^2 + y^2)/2 + \Omega_0^2 z^2/2$ . Считается, что частицы имеют одинаковые постоянные заряды  $Q$  и расположены в плазме, состоящей из направленного потока холодных ионов и максвелловских электронов. Соответствующий потенциал взаимодействия имеет вид

$$U(\mathbf{r}) = \frac{4\pi Q^2}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \frac{\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})}{k^2 \epsilon(-\mathbf{k}, \mathbf{k})}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{u} = (0, -u)$  – скорость потока. Диэлектрическая проницаемость плазмы при этом равна  $\epsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \omega_{pi}^2/(\omega(\omega + i\nu)) + 1/(k^2 \lambda_{De}^2)$ , где  $\omega_{pi}$  – ионная плазменная частота,  $\lambda_{De}$  – электронный дебаевский радиус и  $\nu \rightarrow 0$  – бесконечно малая частота столкновений. Взаимодействие изотропно в плоскости  $xy$ , т.е. потенциал (1) имеет вид  $U(\mathbf{r}) = U(\rho, z)$  ( $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ ). Наличие направленного потока ионов приводит к тому, что  $U(\rho, -z) \neq U(\rho, z)$ , т.е. межчастичные силы являются не взаимными.

Используются безразмерные переменные с масштабом длины  $\lambda = u/\omega_{pi}$ , межчастичные силы нормализованы на  $Q^2/\lambda^2$ , а масштаб времени для частиц с массой  $M_0$  равен  $M_0^{1/2} \lambda^{3/2} / |Q|$ . В этих переменных потенциал (1) помимо расстояния зависит от единственного характеризующего плазму параметра, который пропорционален числу Маха ионного потока,  $M = (n_e/n_i) u \sqrt{m_i/T_e}$ , где  $n_{e,i}$  – равновесные плотности электронов и ионов, а  $m_i$  – масса ионов. Производные потенциала рассчитываются численными методами, описанными в [13].

В равновесии частицы расположены по вершинам правильного многоугольника

$$\begin{aligned} x_j^{(0)} &= R \cos(2\pi j/N), \\ y_j^{(0)} &= R \sin(2\pi j/N), \\ z_j^{(0)} &= z_0, \end{aligned} \quad (2)$$

( $j = 0, \dots, N-1$ ).

Общие уравнения движения имеют вид

$$\ddot{\mathbf{r}}_j = -\nabla U_{ext}(\mathbf{r}_j) - \sum_{k=0, k \neq j}^{N-1} \nabla U(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k), \quad (3)$$

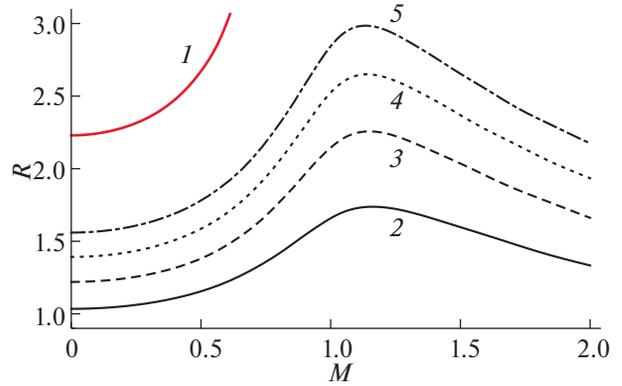


Рис. 1. Кривая 1 – зависимость решения  $u^{1,0}(r, M) = 0$  от  $M$ ; кривые 2–5 – зависимость радиуса кластера от числа Маха. Номер кривой соответствует числу пылинок в кластере,  $\Omega_1 = 0.1$ .

где  $\mathbf{r}_j = (x_j, y_j, z_j)$ . Разлагая уравнения движения по степеням малых отклонений  $\mathbf{r}_j \rightarrow \mathbf{r}_j^{(0)} + \mathbf{r}_j$ , в нулевом порядке получаем условия равновесия

$$\begin{aligned} R\Omega_1^2 + \sum_{j=1}^{N-1} \sin(j\pi/N) u_j^{1,0} &= 0, \\ z_0\Omega_0^2 + \sum_{j=1}^{N-1} u_j^{0,1} &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где использованы обозначения для производных потенциала взаимодействия

$$u_j^{a,b} = \left. \frac{\partial^{a+b} U(\rho, z)}{\partial \rho^a \partial z^b} \right|_{\rho=d_j, z=0} \quad (5)$$

и  $d_j = 2R \sin(j\pi/N)$  – расстояние от частицы с номером  $j$  до частицы с номером 0.

В дальнейшем частоты ловушки  $\Omega_{0,1}$  и число Маха  $M$  считаются внешними управляющими параметрами. Равновесный радиус кластера рассчитывается при помощи первого уравнения (4) и зависит от  $\Omega_1$  и  $M$ . Несколько примеров зависимости  $R$  от  $M$  при фиксированном значении  $\Omega_1$  показаны на рис. 1. Заметим, что при  $M < 1$  потенциал (1) оказывается притягивающим для достаточно больших расстояний [11]. Зависимость дна потенциальной ямы от  $M$  показана кривой 1 на рис. 1. В этом случае внешнее удержание в поперечном направлении может отсутствовать, и радиус кластера достигает максимального значения при  $\Omega_1 = 0$ . При  $M > 1$  радиус кластера неограниченно растет с уменьшением  $\Omega_1$ .

### 3. ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

В первом порядке разложения общих уравнений движения (3) по малым отклонениям от равновесия получаются уравнения

$$\ddot{\mathbf{r}}_j = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{F}_{jk} \cdot \mathbf{r}_k.$$

Всего существует  $3N$  колебаний с частотами, определяемыми собственными значениями силовой матрицы  $-\mathbf{F}_{jk}$ . Анализ линеаризованных уравнений движения существенно упрощается при помощи разложения по неприводимым представлениям группы симметрии кластера  $C_N$  [5]. Для горизонтальных и вертикальных смещений это разложение записывается по разному:

$$\begin{aligned} x_j + iy_j &= \sum_{l=0}^{N-1} (\rho_l + i\phi_l) e^{i\alpha j(l+1)}, \\ z_j &= \sum_{l=0}^{N-1} \zeta_l e^{i\alpha j l}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\alpha = 2\pi/N$ . Используя формулу конечной геометрической прогрессии, легко получить обратные преобразования

$$\begin{aligned} \rho_l + i\phi_l &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} (x_j + iy_j) e^{-i\alpha j(l+1)}, \\ \zeta_l &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} z_j e^{-i\alpha j l}. \end{aligned} \quad (7)$$

При  $l = 0$  возмущение с  $\rho_0 \neq 0$  соответствует однородному растяжению или сжатию кластера в плоскости  $xу$ , возмущение с  $\phi_0 \neq 0$  приводит к повороту вокруг оси  $z$ . Поскольку смещения  $\mathbf{r}_j$  действительны, для преобразованных величин  $\tilde{\mathbf{r}}_l = (\rho_l, \phi_l, \zeta_l)$  выполняются очевидные соотношения  $\tilde{\mathbf{r}}_{N-l} = \tilde{\mathbf{r}}_l^*$  и  $\tilde{\mathbf{r}}_{l+N} = \tilde{\mathbf{r}}_l$ .

При помощи преобразований (6), (7) линеаризованные уравнения движения (3) переписываются в блочно-диагональном виде

$$\ddot{\tilde{\mathbf{r}}}_l = \mathbf{F}_l \cdot \tilde{\mathbf{r}}_l, \quad (l = 0 \dots N-1),$$

где матрица  $\mathbf{F}_l$  имеет вид

$$\mathbf{F}_l = \begin{pmatrix} F_l^{\rho\rho} - \Omega_1^2 & -iF_l^{\rho\phi} & F_l^{\rho\zeta} \\ iF_l^{\rho\phi} & F_l^{\phi\phi} - \Omega_1^2 & -iF_l^{\phi\zeta} \\ F_l^{\zeta\rho} & -iF_l^{\phi\zeta} & F_l^{\zeta\zeta} - \Omega_0^2 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Входящие сюда матричные элементы выражаются в виде конечных действительных сумм

$$\begin{aligned} F_l^{\rho\rho} &= -\sum_{j=1}^{N-1} \left[ \frac{u_j^{(1,0)}}{R} \frac{\cos^2(\alpha j/2) \sin^2(\alpha j l/2)}{\sin(\alpha j/2)} + \right. \\ &\quad \left. + 2u_j^{(2,0)} \sin^2(\alpha j/2) \cos^2(\alpha j l/2) \right], \\ F_l^{\rho\phi} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} \left[ \frac{u_j^{(1,0)}}{R} \cos(\alpha j/2) \sin(\alpha j l) + \right. \\ &\quad \left. + u_j^{(2,0)} \sin(\alpha j) \sin(\alpha j l) \right], \\ F_l^{\rho\zeta} &= -2 \sum_{j=1}^{N-1} u_j^{(1,1)} \sin(\alpha j/2) \sin^2(\alpha j l/2), \\ F_l^{\phi\phi} &= -\sum_{j=1}^{N-1} \left[ \frac{u_j^{(1,0)}}{R} \sin(\alpha j/2) \cos^2(\alpha j l/2) + \right. \\ &\quad \left. + 2u_j^{(2,0)} \cos^2(\alpha j/2) \sin^2(\alpha j l/2) \right], \\ F_l^{\phi\zeta} &= \sum_{j=1}^{N-1} u_j^{(1,1)} \cos(\alpha j/2) \sin(\alpha j l), \\ F_l^{\zeta\rho} &= -2 \sum_{j=1}^{N-1} u_j^{(1,1)} \sin(\alpha j/2) \cos^2(\alpha j l/2), \\ F_l^{\zeta\zeta} &= -2 \sum_{j=1}^{N-1} u_j^{(0,2)} \sin^2(\alpha j l/2). \end{aligned} \quad (9)$$

В общем случае матрица (8) не обладает какими-либо свойствами симметрии. Однако в отсутствие невзаимных сил производные  $u_j^{(1,1)} = 0$ ,  $F_l^{\rho\phi} = F_l^{\zeta\rho} = F_l^{\phi\zeta} = 0$ , и матрица  $\mathbf{F}_l$  становится эрмитовой. При этом уравнения для смещений вдоль  $z$  и в плоскости  $xу$  расцепляются и могут быть исследованы независимо.

Использование преобразований (6), (7) позволяет существенно упростить задачу поиска частот колебаний и анализа устойчивости пылевых кластеров. Все  $3N$  колебаний разделяются на тройки, характеризуемые числом  $l$ , которое играет роль волнового вектора в бесконечных системах. Обозначим собственные значения матрицы  $-\mathbf{F}_l$  (8) как  $\omega(N, l, \alpha)^2$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ). Эти частоты являются корнями кубического многочлена  $P_l^N(\omega^2) = \det(\omega^2 \mathbf{I} + \mathbf{F}_l) = 0$  ( $\mathbf{I}$  – единичная матрица), причем, как видно из структуры матрицы (9), коэффициенты полинома действительны.

Поскольку из явных выражений (9) следует, что  $\mathbf{F}_{N-l} = \mathbf{F}_l^*$ , выполняется соотношение  $\omega(N, l, \alpha)^2 = \omega(N, N-l, \alpha)^2$ , т.е. любые колебания с  $0 < l < N/2$  двукратно вырождены. Это вырождение

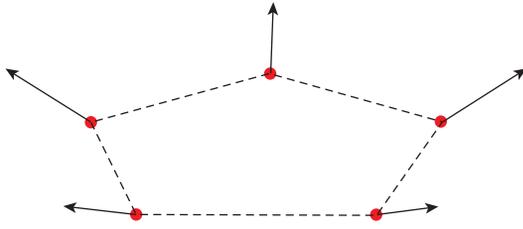


Рис. 2. Пример смещений частиц для моды с  $l = 0$ .

возникает благодаря тому, что некоторые волны, распространяющиеся в разных направлениях кольцевой структуры, должны иметь совпадающие частоты. Колебания с  $l = 0$  и в случае четного числа  $N$  с  $l = N/2$  не вырождены. По этой причине для каждого кластера из  $N$  частиц нужно исследовать собственные значения матрицы  $\mathbf{F}_l$  для  $l = 0, \dots, [N/2]$ . Смещения частиц в кластере для каждой моды колебаний определяются собственными векторами  $\mathbf{F}_l$  и рассчитываются при помощи соотношений (6).

Возможны два различных сценария потери устойчивости при изменении внешних параметров. Во-первых, один из корней характеристического полинома может изменить знак, что соответствует развитию аperiodической неустойчивости. Во-вторых, два действительных корня  $P_l^N(\omega^2)$  могут слиться и образовать пару комплексно-сопряженных корней. В этом случае мы имеем дело с осцилляционной неустойчивостью, аналогичной неустойчивости связанных волн в бесконечном плазменном кристалле.

#### 4. СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ

Отметим, прежде всего, некоторые общие свойства матрицы (8). При  $l = 0$  собственные частоты можно получить в явном виде для произвольного числа  $N$ . Во-первых, существует нейтрально устойчивая мода с  $\omega(N, 0, 1) = 0$ , соответствующая повороту кластера как целого без изменения формы ( $\rho_0 = 0, \phi_0 \neq 0, \zeta_0 = 0$ ). Другое колебание с  $\omega(N, 0, 2) = \pm\Omega_0$  ( $\rho_0 = 0, \phi_0 = 0, \zeta_0 \neq 0$ ) отвечает вертикальным колебаниям центра масс кластера без изменения формы. Наконец, третья мода имеет частоту

$$\omega(N, 0, 3)^2 = \sum_{j=1}^{N-1} \left[ 2u_j^{2,0} \sin^2(j\pi/N) - \frac{u_j^{1,0}}{R} \sin(j\pi/N) \right]. \quad (10)$$

Для этой моды колебаний частицы смещаются вдоль прямых линий (рис. 2), причем горизонтальные компоненты смещений параллельны векторам  $\mathbf{r}_j^0$  (2), а все вертикальные компоненты

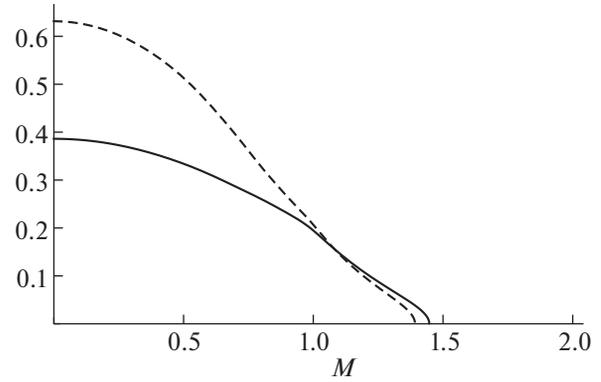


Рис. 3. Критическая частота для  $N = 2$  (сплошная линия) и  $N = 3$  (штриховая линия),  $\Omega_1 = 0.1$ .

равны. Хотя частота (10) от  $\Omega_0$  не зависит, угол наклона смещений определяется  $\Omega_0$ . Во всех исследованных случаях квадрат частоты (10) оказывается положительным, и каких-либо неустойчивостей, связанных с возбуждением симметричных колебаний, не возникает. В дальнейшем колебания с  $l = 0$  специально не обсуждаются.

В случае колебаний с  $l = 1$  одна из частот кластера, состоящего из  $N$  частиц, совпадает с частотой ловушки  $\omega(N, 1, 3)^2 = \Omega_1^2$ , т.е. характеристический полином записывается в виде произведения  $P_1^N(\omega^2) = (\omega^2 - \Omega_1^2)P_1^{N-1}(\omega^2)$ . При этом форма кластера не меняется, все частицы лежат в плоскости  $xu$ , а центр масс колеблется в произвольном направлении с частотой  $\Omega_1$ . Частоты и поляризации остальных двух мод колебаний с  $l = 1$  зависят от числа частиц в кластере.

##### 4.1. Две частицы

В случае кластера, состоящего из двух частиц, колебание  $l = 1$  с частотой  $\Omega_1$  оказывается двукратно вырожденным. Частота оставшегося колебания равна  $\omega(2, 1, 1)^2 = \Omega_0^2 + 2u_1^{0,2}$ , смещения частиц при этом пропорциональны  $\mathbf{r}_1 = (x, 0, z)$ ,  $\mathbf{r}_2 = (x, 0, -z)$ . Условие положительности величины  $\omega(2, 1, 1)^2 > 0$  определяет область устойчивости кластера  $\Omega_0 > \Omega_{cr}$ . Пример зависимости  $\Omega_{cr}$  от  $M$ , построенной при помощи потенциала (1), показан на рис. 3 сплошной линией. При уменьшении  $\Omega_0$  до уровня  $\Omega_{cr}$  наблюдается тенденция к формированию вертикальной цепочки частиц, при этом, благодаря невзаимности межчастичных сил, обе частицы смещаются в одном направлении вдоль оси  $x$ .

4.2. Три частицы

Единственная нетривиальная мода для случая трех частиц характеризуется числом  $l = 1$ . Корни квадратного уравнения  $P_1^3(\omega^2) = 0$  равны

$$\omega^2 = \frac{1}{4} \left( 2\Omega_0^2 + \Omega_1^2 + 6u_1^{0,2} \pm \sqrt{D} \right), \quad (11)$$

где  $D = (2\Omega_0^2 - \Omega_1^2 + 6u_1^{0,2} + 3u_1^{2,0})^2 + 24(u_1^{1,1})^2$ . Поскольку величина  $D > 0$  положительна, оба решения (11) действительны, однако одно из них может стать отрицательным при уменьшении  $\Omega_0$ . Соответствующее критическое значение  $\Omega_0$  показано штриховой кривой на рис. 3. При развитии апериодической неустойчивости вертикальные смещения двух произвольных частиц направлены противоположно смещению третьей, например,  $\mathbf{r}_1 = (x_1, 0, z_1)$ ,  $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, -z_1/2)$ ,  $\mathbf{r}_3 = (x_2, -y_2, -z_1/2)$ . Горизонтальные смещения  $x_{1,2}$  при этом имеют одинаковый знак. Таким образом, при развитии апериодической неустойчивости трехчастичного кластера наблюдается тенденция к формированию трехмерной структуры.

4.3. Четыре частицы

В отличие от рассмотренных ранее примеров, динамика четырехчастичного кластера определяется производными потенциала для двух расстояний  $d_1 = \sqrt{2}R$  и  $d_2 = 2R$ . По этой причине явные формулы для частот оказываются более громоздкими и в дальнейшем мы ограничиваемся качественным обсуждением областей устойчивости кластера.

В случае  $l = 1$  оставшиеся после отделения решения с  $\omega(4, 1, 3)^2 = \Omega_1^2$  собственные частоты колебаний определяются корнями квадратного уравнения  $P_1^4(\omega^2) = 0$ . Эти корни оказываются комплексными при выполнении двух условий

$$v = -u_1^{1,1} u_2^{1,1} > 0, \quad (12)$$

и

$$\Omega_{cr,2}^2 < \Omega_0^2 < \Omega_{cr,1}^2, \quad (13)$$

где

$$\Omega_{cr,1,2}^2 = 2u_1^{2,0} - 2u_1^{0,2} - 2u_2^{0,2} - \frac{u_2^{1,0}}{R} \pm 2^{7/4} \sqrt{v}. \quad (14)$$

На границе области, определяемой неравенствами (12), (13), два действительных корня сливаются, и частоты связанных колебаний определяются соотношениями

$$\omega(4, 1, 1)^2 = \omega(4, 1, 2)^2 = 2u_1^{2,0} - \frac{u_2^{1,0}}{R} - 2^{3/4} \sqrt{v}. \quad (15)$$

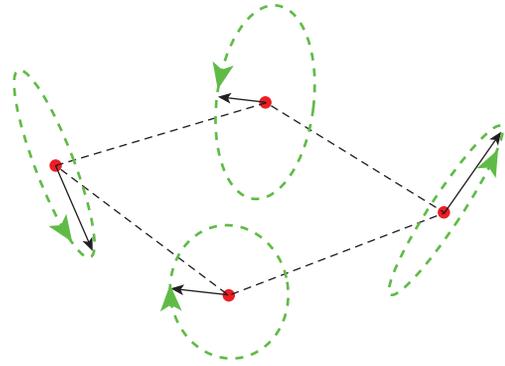


Рис. 4. Осцилляционная неустойчивость четырехчастичного кластера. Сплошные стрелки – мгновенные смещения частиц, штриховые эллипсы – траектории частиц на одном периоде колебаний;  $l = 1$ ,  $M = 1.1$ ,  $\Omega_0 \approx 0.21$ ,  $\Omega_1 = 0.1$ .

Траектории частиц для связанных колебаний на границе неустойчивости показаны на рис. 4. Частицы совершают круговые движения вокруг положения равновесия под некоторым углом к плоскости  $xu$ . Как уже отмечалось, частоты колебаний с  $l = 1$  и  $l = 3$  совпадают, но в последнем случае направление движения частиц меняется на противоположное.

Аналогичное поведение наблюдается для колебаний с  $l = 2$ . Существует устойчивое колебание с частотой  $\omega(4, 2, 3)^2 = 2u_1^{2,0} - \sqrt{2}u_1^{1,0}/R$ , для которого смещения частиц, показанные на рис. 5а, лежат в горизонтальной плоскости и не зависят от внешних управляющих параметров. Два оставшихся связанных колебания могут стать неустойчивыми при выполнении неравенств (12), (13), где критические значения параметра  $\Omega_0$  изменяются

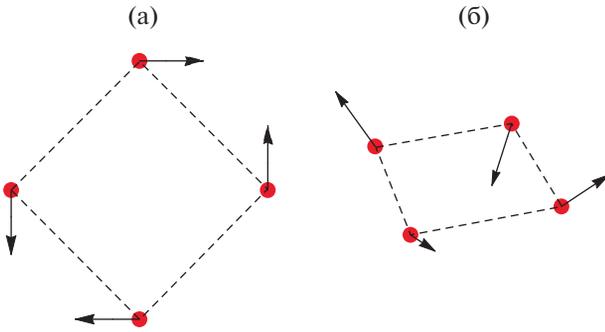
$$\Omega_{cr,1,2}^2 = 2u_2^{2,0} - 4u_1^{0,2} - \frac{u_2^{1,0}}{R} \pm 2^{9/4} \sqrt{v}. \quad (16)$$

Частоты связанных колебаний на границе осцилляционной неустойчивости равны

$$\omega(4, 2, 1)^2 = \omega(4, 2, 2)^2 = 2u_1^{2,0} - \frac{u_2^{1,0}}{R} + 2^{5/4} \sqrt{v}, \quad (17)$$

а смещения частиц направлены вдоль прямых линий, расположенных под одинаковыми углами к плоскости  $xu$  (рис. 5б).

Если одно из неравенств (12), (13) нарушается, корни характеристического уравнения действительны. Однако как для  $l = 1$ , так и для  $l = 2$  квадрат одной из частот может стать отрицательным, что приводит к развитию апериодической неустойчивости. Итоговая диаграмма устойчивости четырехчастичного кластера показана на рис. 6. На границе области  $A_2$  развивается апериодиче-



**Рис. 5.** Колебания четырехчастичного кластера с  $l = 2$ : устойчивые горизонтальные колебания (а); колебания на границе осцилляционной неустойчивости (б);  $M = 1.07$ ,  $\Omega_0 \approx 0.23$ ,  $\Omega_1 = 0.1$ .

ская неустойчивость моды с  $l = 2$ , пример смещений частиц показан на рис. 7. Область аperiodической неустойчивости моды с  $l = 1$  ( $A_1$  на рис. 6) лежит целиком в  $A_2$ .

Области осцилляционной неустойчивости  $O_{1,2}$  невелики и показаны в увеличенном масштабе на рис. 6 справа. Эти области лежат в одном интервале изменений параметра  $M$ , определяемом первым неравенством (12), и частично перекрываются.

4.4. Пять частиц

В случае пяти частиц динамика кластера определяется производными потенциала взаимодействия на двух расстояниях  $d_1 = R\sqrt{(5 - \sqrt{5})/2}$ ,  $d_2 = R\sqrt{(5 + \sqrt{5})/2}$ . Явные выражения для частот оказываются весьма громоздкими, но легко рассчитываются численными методами.

Так же, как и в случае четырехчастичного кластера, необходимо исследовать моды с  $l = 1$  и  $l = 2$ . Диаграмма устойчивости кластера показана на рис. 8. На границе области  $A_2$  развивается аperiodическая неустойчивость моды с  $l = 2$ , при

этом две произвольные соседние частицы смещаются, выходя из плоскости  $xu$ , а остальные три смещаются в противоположном направлении. Область аperiodической неустойчивости  $A_1$  моды с  $l = 1$  лежит целиком в  $A_2$ .

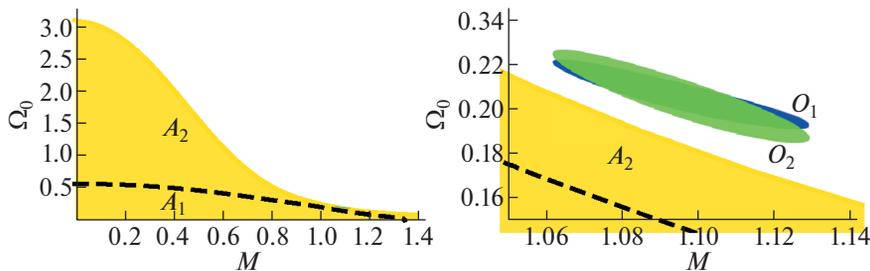
В отличие от четырехчастичного кластера (рис. 6) области  $O_{1,2}$  с осцилляционной неустойчивостью занимают значительную часть диаграммы устойчивости. Для обоих типов связанных колебаний с  $l = 1, 2$  (области  $O_{1,2}$  на рис. 8) частицы движутся по круговым орбитам в окрестности положений равновесия (рис. 9, 10), отличия заключаются в амплитудах и фазах смещений различных частиц. Обе области  $O_{1,2}$  оказываются двухкомпонентными. Две части области  $O_2$  отделены узкой щелью в диапазоне  $1.16 < M < 1.2$ , поэтому при плохо контролируемом изменении управляющих параметров достичь областей  $O_1$  достаточно трудно.

4.5. Кластеры со свободной границей

Как уже отмечалось, в дозвуковом или чисто ионном потоке  $M < 1$  потенциал взаимодействия (1) в горизонтальном направлении оказывается притягивающим для достаточно больших межчастичных расстояний и отталкивающим на малых расстояниях. В этом случае кластеры могут существовать даже в отсутствие радиального удержания  $\Omega_1 = 0$ . Структура и динамика подобных кластеров имеют некоторые особенности.

Дно потенциальной ямы расположено на расстоянии  $R_0$ , определяемым как решение уравнения  $U_{,p}(p, 0) = 0$ . Зависимость этой величины от  $M$  показана кривой 1 на рис. 1.

В соответствии с (4) при  $\Omega_1 = 0$  для случая двухчастичного кластера максимальный радиус  $R = R_0/2$ , а для трехчастичного  $R = R_0/\sqrt{3}$ . Формулы для частот колебаний, приведенные в разделах 4.1, 4.2, пригодны и в случае  $\Omega_1 = 0$ . При уменьшении параметра  $\Omega_0$  до определенного



**Рис. 6.** Диаграмма устойчивости четырехчастичного кластера:  $A_{1,2}$  – области аperiodической неустойчивости,  $O_{1,2}$  – области осцилляционной неустойчивости при  $l = 1, 2$ ;  $\Omega_1 = 0.1$ .

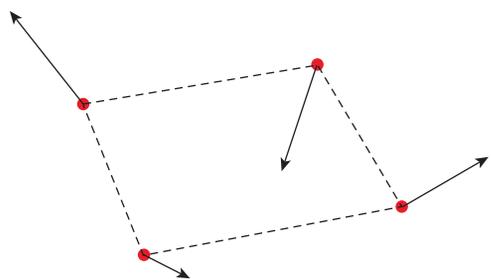


Рис. 7. Смещения частиц на границе области  $A_2$  на рис. 6;  $M = 0.8$ ,  $\Omega_0 \approx 0.54$ ,  $\Omega_1 = 0.1$ .

критического значения (рис. 11) развивается аperiodическая неустойчивость. Интересной особенностью этой неустойчивости является то, что, в отличие от случая  $\Omega_1 \neq 0$ , при  $\Omega_0 = \Omega_{cr}$  вертикальные смещения частиц обращаются в нуль. При этом на границе аperiodической неустойчивости двух- и трехчастичные кластеры начинают ускоряться в горизонтальном направлении без изменения формы, то есть ведут себя как молекулярные моторы.

В силу условия равновесия (4) для случая четырех частиц, расположенных по вершинам квадрата, при  $\Omega_1 = 0$  выполняются неравенства  $\sqrt{2}R < R_0 < 2R$ , т.е. ближайшие частицы отталкиваются, а противоположные притягиваются. Очевидно, что такая конфигурация неустойчива даже в случае двумерного движения ( $\Omega_0 \rightarrow \infty$ ), и квадрат стремится превратиться в ромб. Аналогичная ситуация возникает и для кластера в форме правильного пятиугольника.

Таким образом, в отсутствие радиального удержания кластеры в форме правильного многоугольника существуют только для случая двух или трех частиц.

В заключение настоящего раздела отметим, что кластеры с большим числом частиц ( $N \geq 6$ ) всегда оказываются неустойчивыми. Видимо, в этом проявляется общая закономерность – во всех известных примерах двумерные кластеры в форме правильного многоугольника существуют лишь при  $N \leq 5$ . Например, в случае кулоновского взаимодействия и двумерного движения ( $\Omega_0 \rightarrow \infty$ ) для шести частиц устойчивой является конфигурация в виде правильного пятиугольника с дополнительной частицей в центре [5].

### 5. НЕЛИНЕЙНАЯ СТАДИЯ ОСЦИЛЛЯЦИОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Как видно из рис. 6 и 8, при изменении внешних управляющих параметров ( $\Omega_0, \Omega_1, M$ ) проще всего достичь границы осцилляционной неустойчивости для моды  $l = 2$  кластера, состоящего из

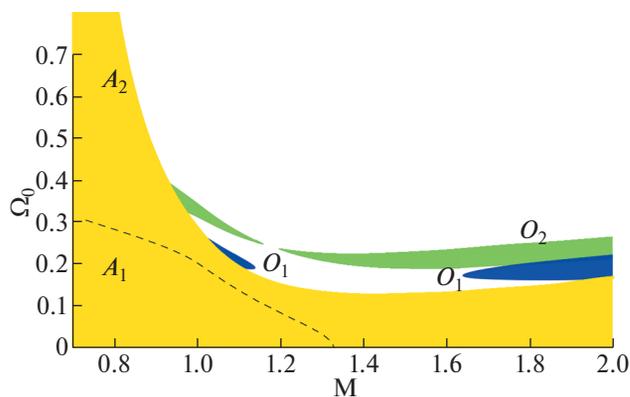


Рис. 8. Диаграмма устойчивости кластера из пяти частиц:  $A_{1,2}$  – области аperiodической неустойчивости,  $O_{1,2}$  – области осцилляционной неустойчивости при  $l = 1, 2$ ;  $\Omega_1 = 0.1$ .

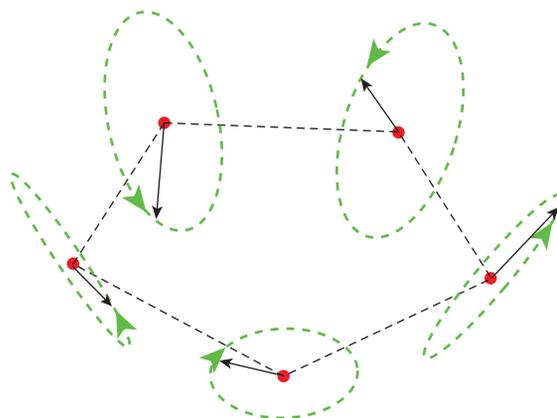


Рис. 9. Траектории частиц на границе осцилляционной неустойчивости;  $l = 1$ ,  $M = 1.1$ ,  $\Omega_0 \approx 0.22$ ,  $\Omega_1 = 0.1$ ,  $\omega \approx 0.03$ .

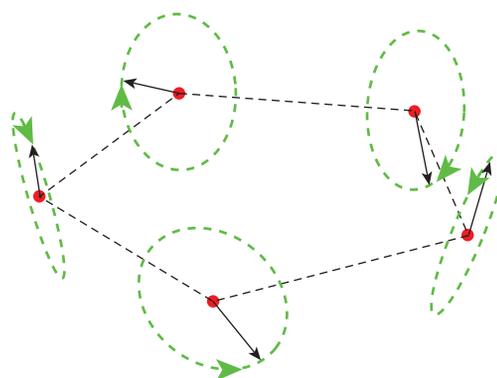
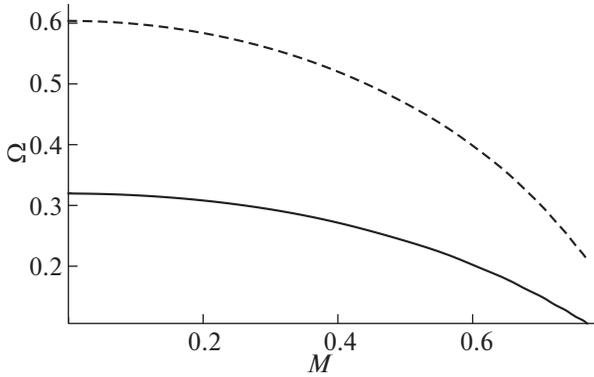


Рис. 10. Траектории частиц на границе осцилляционной неустойчивости;  $l = 2$ ,  $M = 1.5$ ,  $\Omega_0 \approx 0.23$ ,  $\Omega_1 = 0.1$ ,  $\omega \approx 0.07$ .



**Рис. 11.** Критическая частота для  $N = 2$  (сплошная линия) и  $N = 3$  (штриховая линия);  $\Omega_1 = 0$ .

пяти частиц (область  $O_2$  на рис. 8). По этой причине мы ограничимся обсуждением нелинейной динамики кластера с  $N = 5$ .

Для вывода нелинейных уравнений используется стандартный метод Крылова–Боголюбова.

Положим  $\Omega_0 = \Omega_{cr} + \varepsilon^2 \delta$ , где  $\varepsilon \ll 1$  – малый параметр. При приближении к границе области  $O_2$  на рис. 8 сверху величина  $\delta$  обращается в нуль и при  $\delta < 0$  развивается неустойчивость. На нижнем крае области  $O_2$  ситуация обратная – неустойчивости соответствуют значения  $\delta > 0$ .

После подстановки  $\mathbf{r}_j \rightarrow \mathbf{r}_j^{(0)} + \varepsilon \mathbf{r}_j$  исходные уравнения движения (3) разлагаются по степеням  $\varepsilon$  до третьей степени и затем используются преобразования (6), (7). В результате получаются уравнения вида

$$\ddot{\tilde{\mathbf{r}}}_l = \mathbf{F}_l \cdot \tilde{\mathbf{r}}_l + \varepsilon \mathbf{F}_l^2 + \varepsilon^2 \mathbf{F}_l^3, \tag{18}$$

где матрицы  $\mathbf{F}_l$  задаются соотношением (8). Матрицы  $\mathbf{F}_l^2$  квадратично зависят от  $\tilde{\mathbf{r}}_l$ , а матрицы  $\mathbf{F}_l^3$  помимо кубических членов разложения содержат линейный член, пропорциональный  $\delta$ .

Решение уравнений (18) ищется в виде разложения

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{r}}_l = & \delta_{l,0} A_0(\tau) \mathbf{P}_0 + \delta_{l,2} \left[ e^{-i\omega_0 \tau} A_1(\tau) + e^{i\omega_0 \tau} A_2(\tau) \right] \mathbf{P} + \\ & + \delta_{l,3} \left[ e^{-i\omega_0 \tau} A_2^*(\tau) + e^{i\omega_0 \tau} A_1^*(\tau) \right] \mathbf{P}^* + \\ & + \sum_{s=-2}^2 e^{is\omega_0 \tau} [\varepsilon \mathbf{B}_{s,l}(\tau) + \varepsilon^2 \mathbf{C}_{s,l}(\tau)], \end{aligned} \tag{19}$$

где  $\tau = \varepsilon t$  – медленное время. В разложении (19) вектор  $\mathbf{P}_0 = (0, 1, 0)$  и  $A_0(\tau)$  – действительная медленно меняющаяся амплитуда, т.е. первый член разложения описывает медленное вращение кластера вокруг оси  $z$ . Комплексные амплитуды  $A_{1,2}(\tau)$  отвечают возмущениям, распростра-

няющимся в разных направлениях кольцевой структуры. Частота  $\omega_0$  является двукратно вырожденным корнем дисперсионного уравнения  $\det(\omega_0^2 \mathbf{I} + \mathbf{F}_2) = 0$  при  $\Omega_0 = \Omega_{cr}$ , а  $\mathbf{P}$  – соответствующим собственным вектором, т.е.  $(\omega_0^2 \mathbf{I} + \mathbf{F}_2) \cdot \mathbf{P} = 0$ . Подлежащие определению поправки  $\mathbf{B}_{s,l}(\tau)$  и  $\mathbf{C}_{s,l}(\tau)$  удовлетворяют условиям действительности, вытекающим из соотношений  $\tilde{\mathbf{r}}_{5-l} = \tilde{\mathbf{r}}_l^*$ .

После подстановки соотношения (19) в уравнения (18) в нулевом члене разложения по  $\varepsilon$  получается нуль. Следующий член разложения позволяет выразить поправки  $\mathbf{B}_{s,l}(\tau)$  через производные амплитуд  $A_{0,1,2}(\tau)$  и их квадратичные комбинации. Условие существования решения для поправок  $\mathbf{C}_{s,l}(\tau)$  приводит к системе уравнений для амплитуд

$$\ddot{A}_1 = -\beta \delta A_1 - \gamma_1 A_1 |A_1|^2 - \gamma_2 A_1 |A_2|^2 - \gamma_3 A_1 \dot{A}_0, \tag{20}$$

$$\ddot{A}_2 = -\beta \delta A_2 - \gamma_1 A_2 |A_2|^2 - \gamma_2 A_2 |A_1|^2 + \gamma_3 A_2 \dot{A}_0,$$

$$\ddot{A}_0 = \alpha \frac{d}{d\tau} (|A_1|^2 - |A_2|^2). \tag{21}$$

Явные выражения для коэффициентов  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma_i$  практически необозримы, однако они могут быть рассчитаны численными методами. Заметим, что коэффициент  $\beta$  на верхней границе области  $O_2$  на рис. 8 всегда положителен, а на нижней отрицателен. Остальные коэффициенты могут менять знак при изменении параметров  $M$  и  $\Omega_1$ .

Физический смысл уравнений (20), (21) достаточно прозрачен. Члены, пропорциональные  $\beta$ , на линейной стадии приводят в зависимости от знака  $\delta$  либо к экспоненциальному росту амплитуд, либо к медленным осцилляциям. Остальные члены описывают параметрическое взаимодействие колебаний с амплитудами  $A_{1,2}$  и их связь с вращением кластера в горизонтальной плоскости, описываемым амплитудой  $A_0$ . В соответствии с уравнением (21), вращение кластера возникает благодаря неравенству амплитуд  $|A_1| \neq |A_2|$ .

Полагая, что в начальный момент времени вращение отсутствует, проинтегрируем уравнение (21)

$$\dot{A}_0 = \alpha (|A_1|^2 - |A_2|^2). \tag{22}$$

Тогда уравнения (20) переписываются в виде

$$\ddot{A}_i = -\frac{\partial U}{\partial A_i^*}, \quad (i = 1, 2), \tag{23}$$

где

$$U = \beta\delta(|A_1|^2 + |A_2|^2) + \frac{\gamma'_1}{2}(|A_1|^4 + |A_2|^4) + \gamma'_2|A_1|^2|A_2|^2, \quad (24)$$

$$\text{и } \gamma'_1 = \gamma_1 + \alpha\gamma_3, \quad \gamma'_2 = \gamma_2 - \alpha\gamma_3.$$

Для достаточно больших амплитуд  $A_{1,2}$  эффективный потенциал (24) положителен при выполнении двух условий

$$\gamma'_1 > 0, \quad \gamma'_1 + \gamma'_2 > 0. \quad (25)$$

Если одно из этих неравенств нарушается, то решение уравнений (23) за конечное время стремится к бесконечности, т.е. неустойчивость приобретает взрывной характер.

Представляют интерес стационарные решения (23) в области неустойчивости  $\beta\delta < 0$ . При выполнении неравенств (25) существует несколько ненулевых решений уравнений  $\partial U / \partial A_i^* = 0$ . Во-первых, есть решение с равными амплитудами

$$|A_1^0| = |A_2^0| = -\frac{\beta\delta}{\gamma'_1 + \gamma'_2}. \quad (26)$$

Подставляя в уравнения (23)  $A_i(\tau) = A_i^0 + \delta A_i(\tau)$  и удерживая линейные члены разложения по  $\delta A_i$ , легко убедиться, что стационарное решение (26) устойчиво при условии

$$|\gamma'_2| < \gamma'_1. \quad (27)$$

Заметим, что для решения (26) угловая скорость вращения кластера (22) обращается в нуль.

Во-вторых, существуют стационарные решения, для которых одна из амплитуд равна нулю, например,

$$|A_1^0|^2 = -\frac{\beta\delta}{\gamma'_1}, \quad |A_2^0| = 0. \quad (28)$$

Это решение устойчиво, если

$$\gamma'_2 > \gamma'_1. \quad (29)$$

Разумеется, амплитуды  $A_1$  и  $A_2$  в (28) можно поменять местами. Угловая скорость (22) для решений (28) в нуль не обращается, а направление вращения зависит от знака  $\alpha$  и от того, какая из амплитуд равна нулю.

Таким образом, при развитии осцилляционной неустойчивости кластера возникают различные стационарные состояния. Параметрическое взаимодействие может приводить к тому, что амплитуды возмущений равны и кластер как целое не вращается. Частицы кластера при этом периодически движутся вдоль прямых линий подобно тому, как показано на рис. 2, однако направления траекторий зависят от внешних параметров.

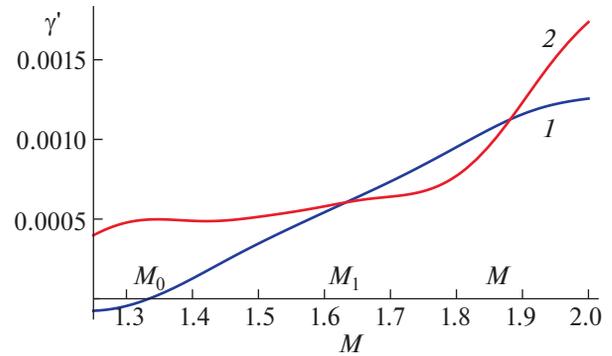


Рис. 12. Зависимость коэффициентов  $\gamma'_1$  (кривая 1) и  $\gamma'_2$  (кривая 2) от  $M$  на верхней границе области  $O_2$  (рис. 8);  $\Omega_1 = 0.1$ .

Возможна также ситуация, когда только одна из амплитуд возмущений не равна нулю, частицы движутся по окружностям вокруг положений равновесия (рис. 10), а кластер как целое вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси  $z$ . Какая из двух амплитуд  $A_{1,2}$  отлична от нуля и направление вращения определяется случайными факторами. Кластер в этом случае становится хиральным.

Зависимость коэффициентов  $\gamma'_1$  и  $\gamma'_2$  от  $M$  на верхней границе области  $O_2$  (рис. 8), рассчитанная численно при помощи потенциала (1), показана на рис. 12. При  $M < M_0 \approx 1.33$  коэффициент  $\gamma'_1 < 0$ , т.е. в соответствии с неравенствами (25) стационарных состояний нет и неустойчивость носит взрывной характер. Сюда, в частности, попадает вся левая часть области  $O_2$  (рис. 8).

В интервалах  $M_0 < M < M_1 \approx 1.63$  и  $M > M_2 \approx 1.88$  выполняется неравенство (29), т.е. неустойчивость насыщается на слабонелинейной стадии. В стационарном состоянии кластеры становятся хиральными, и амплитуда осцилляций определяется соотношениями (28). В интервале  $M_1 < M < M_2$  амплитуды обеих осцилляций равны (26), а хиральность пропадает.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе развита теория устойчивости конечных кластеров пылевых частиц в приэлектродном слое плазмы с учетом невзаимного характера сил. Рассмотрены кластеры в виде правильного многоугольника с числом частиц от двух до пяти. Определены параметры плазмы, при которых развиваются аperiodические неустойчивости, приводящие к формированию трехмерных структур.

Для кластеров, состоящих из четырех или пяти частиц, возможно развитие осцилляционной не-

устойчивости, аналогичной неустойчивости связанных волн в бесконечном кристалле. В результате развития неустойчивости пятичастичного кластера в определенной области параметров плазмы формируется аналог временного кристалла, обладающего хиральностью.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Комплексная и пылевая плазма / Ред. Фортон В.Е., Морфилл Г.Е. М.: Физматлит, 2012.
2. Tsyrovich V.N., Morfill G.E., Vladimirov S.V., Thomas H.M. Elementary Physics of Complex Plasmas. Lect. Notes Phys. 731. Berlin, Heidelberg: Springer, 2008.
3. Кедель Л., Носенко В., Жданов С., Ивлев А.В., Лаут И., Яковлев Е.В., Крючков Н.П., Овчаров П.В., Липаев А.М., Юрченко С.О. // УФН. 2019. Т. 189. С. 1070.
4. Juan W.-T., Huang Z.-H., Hsu J.-W., Lai Y.-J., Lin I. // Phys. Rev. E. 1998. V. 58. P. R6947.
5. Amiranashvili Sh., Gusein-zade N., Ignatov A. // Phys. Rev. A. 1999. V. 59. P. 3098.
6. Amiranashvili Sh.G., Gusein-zade N.G., Tsyrovich V.N. // Phys. Rev. E. 2001. V. 64. P. 016407.
7. D'yachkov L.G., Myasnikov M.I., Petrov O.F., Hyde T.W., Kong J., Matthews L. // Phys. Plasmas. 2014. V. 21. P. 093702.
8. Ваулина О.С. // ЖЭТФ. 2018. Т. 154. С. 588.
9. Ваулина О.С., Саметов Э.А., Лусин Е.А., Лусина И.И. // Физика плазмы. 2020. Т. 46. С. 1125.
10. Игнатов А.М. // Физика плазмы. 2019. Т. 45. С. 825.
11. Игнатов А.М. // Физика плазмы. 2020. Т. 46. С. 213.
12. Игнатов А.М. // Физика плазмы. 2020. Т. 46. С. 358.
13. Игнатов А.М. // Физика плазмы. 2020. Т. 46. С. 847.
14. Игнатов А.М. // Физика плазмы. 2021. Т. 47. С. 139.