

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОАКСИАЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ УСИЛЕНИЯ ВОЛН СВЧ-ДИАПАЗОНА ПРИ РАЗВИТИИ ПУЧКОВО-ПЛАЗМЕННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

© 2021 г. И. Н. Карташов<sup>a,\*</sup>, М. В. Кузелев<sup>a,\*\*</sup>

<sup>a</sup> МГУ им. М.В. Ломоносова, Физический факультет, Москва, Россия

\*e-mail: igorkartashov@mail.ru

\*\*e-mail: kuzelev@mail.ru

Поступила в редакцию 20.11.2020 г.

После доработки 05.01.2021 г.

Принята к публикации 20.01.2021 г.

Проведено теоретическое исследование коаксиальной электродинамической системы с плазменным заполнением, сквозь которую движется релятивистский электронный пучок, для усиления волн СВЧ-диапазона. Получены зависимости инкрементов пространственного усиления пучково-плазменной неустойчивости от частоты внешнего сигнала и параметров усилителя. Промоделирована нелинейная динамика развития неустойчивости и определена эффективность преобразования энергии электронного пучка в энергию СВЧ-колебаний. Использование коаксиальной электродинамической системы позволяет повысить значение тока электронного пучка, транспортируемого через систему, при этом инкремент неустойчивости и эффективность преобразования энергии направленного движения электронов также возрастают.

**Ключевые слова:** коаксиальный волновод, плазменный СВЧ-усилитель, эффект Черенкова, пучково-плазменные неустойчивости

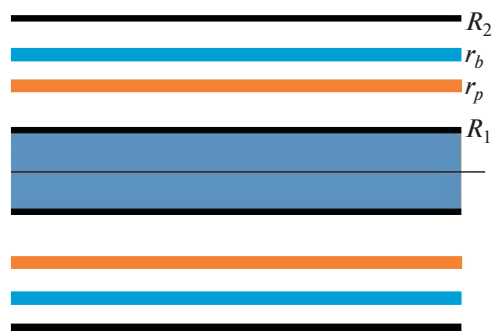
**DOI:** 10.31857/S0367292121060093

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время реализованы мощные импульсные плазменные источники СВЧ-диапазона длин волн (плазменные мазеры) субгигаваттной мощности с диапазоном перестройки рабочей частоты в пределах октавы [1–5]. Принципиальная схема такого устройства изображена на рисунке 1. В волноводе радиуса  $R_2$  расположена тонкая трубчатая плазма толщиной  $\Delta_p$  и средним радиусом  $r_p$  с концентрацией электронов  $n_p$ . Тонкий трубчатый электронный пучок с концентрацией частиц  $n_b$ , толщиной  $\Delta_b$  и средним радиусом  $r_b$  движется со скоростью  $u$  вдоль оси волновода. Вся система помещается в достаточно сильное внешнее магнитное поле, замагничивающее поперечное движение, как электронов пучка, так и плазмы. За счет развития пучково-плазменной неустойчивости возбуждаются плазменные волны и возможно усиление сигнала, подаваемого на вход системы. Традиционно в плазменных мазерах электронный пучок инжектировался вовнутрь трубчатой плазмы. При определенных технических сложностях реализации, некоторыми преимуществами обладает инверсная конфигурация плазменных мазеров [1], когда электрон-

ный пучок распространяется снаружи плазмы, как показано на рис. 1.

В реализованных к настоящему моменту времени плазменных мазерах используются волноводы с односвязной формой поперечного сечения: полые волноводы круглого сечения. В настоящей работе предлагается форма электро-



**Рис. 1.** Принципиальная схема плазменного мазера: отрезок волновода радиуса  $R_2$  с коаксиальным стержнем радиуса  $R_1$  и тонкими трубчатыми электронным пучком и плазмой со средними радиусами  $r_b$  и  $r_p$ .

динамической системы в виде коаксиального волновода и исследуется влияние на усиление внешнего сигнала, которое оказывает металлический стержень радиуса  $R_1$  на оси волновода. Интерес к модификации электродинамической системы продиктован не только техническими соображениями, позволяющими реализовать импульсно-периодический мазер с инверсной конфигурацией, где металлический стержень осуществляет проводящее крепление ограничителя трубчатой плазмы в продольном направлении, без нарушения целостности электронного потока. Имеются и физические предпосылки для модификации электродинамической системы. С одной стороны, следует ожидать, что внесение в систему дополнительных эквипотенциальных поверхностей (металлический стержень на оси системы) приведет к уменьшению инкремента пучково-плазменного взаимодействия. С другой стороны, это приведет к подавлению тормозящего действия объемного заряда электронного пучка, и как следствие, к повышению предельного вакуумного тока, транспортируемого через электродинамическую систему. Повышение предельного вакуумного тока открывает возможность использования более сильноточных электронных пучков, что повысит мощность излучения. Заметим, что коаксиальные волноводы используют в качестве вакуумных электродинамических систем в источниках СВЧ-излучения, основанных на возбуждении релятивистским электронным пучком электромагнитной волны в замедляющей структуре [6–9], в качестве резонаторов для СВЧ-разряда [10, 11] и т.д.

В работе мы исследуем развитие пучково-плазменной неустойчивости в коаксиальной электродинамической системе с тонкостенными замагниченными трубчатыми электронным пучком и плазмой (см. рис. 1). В рамках линейной теории будет получено дисперсионное уравнение, которое будет сведено к кубическому уравнению для комплексных инкрементов пространственного усиления. Далее будут учтены нелинейные эффекты в электронном пучке и получена система из уравнения для медленно меняющейся амплитуды плазменной волны и уравнений движения электронов пучка. Это позволит промоделировать пространственную динамику усиления на стадии насыщения неустойчивости и определить эффективность преобразования направленной энергии электронного пучка в энергию электромагнитных колебаний.

## 2. ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ

В пределе бесконечно сильного внешнего магнитного поля, направленного вдоль оси плазмонаполненного волновода, волновые решения можно представить в виде суперпозиции волн  $E$ -

и  $B$ -типов. Волны  $E$ -типа имеют ненулевую продольную составляющую электрического поля и могут иметь фазовую скорость меньше скорости света  $c$ . Только для этих волн возможно резонансное взаимодействие с электронным пучком и поэтому далее рассматриваются только волны  $E$ -типа. Из системы уравнений Максвелла можно получить уравнение для  $z$ -компоненты электрического вектора Герца (поляризационного потенциала) [12]

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi = -4\pi j_p \Delta_p \delta(r - r_p) - 4\pi j_b \Delta_b \delta(r - r_b). \quad (1)$$

В правую часть (1) входят  $z$ -компоненты плотности тока плазмы и пучка  $j_p$  и  $j_b$ , поперечное движение электронов в которых замагничено сильным внешним магнитным полем. Электронный пучок и плазма рассматриваются как бесконечно тонкие, что учтено дельта-функциями Дирака  $\delta(r - r_{p,b})$ . Приближения сильного продольного магнитного поля и малой толщины трубчатых пучка и плазмы являются традиционными в плазменной СВЧ-электронике [12]. Предположение о сильном магнитном поле становится оправданным, когда электронная циклотронная частота превосходит ленгмюровскую частоту электронной компоненты плазмы, при этом частота возбуждаемой волны меньше, но одного порядка с ленгмюровской. Для рассматриваемых в настоящей работе плотностей плазмы порядка  $10^{13} \text{ см}^{-3}$ , приближение замагниченной плазмы и пучка реализуется при индукции внешнего магнитного поля порядка нескольких Тесла. Представление плазмы (и пучка) в качестве тонкостенной трубки приводит к пренебрежению возможности возбуждения электронным пучком высших радиальных мод ленгмюровских волн, запертых внутри плазменного слоя. Однако, при используемых в экспериментах релятивистских электронных пучках, возбуждение этих мод не происходит из-за их малой фазовой скорости.

Из вектора Герца можно определить все компоненты электрического и магнитного полей, в частности

$$E_z = \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi. \quad (2)$$

Ток в плазме связан с напряженностью электрического поля уравнением

$$\frac{\partial j_p}{\partial t} = \frac{\omega_p^2}{4\pi} E_z(r_p), \quad (3)$$

которое представляет собой уравнение движения электронов в приближении холодной гидродинамики [13]. Для зависимостей вида  $\sim \exp(-i\omega t +$

+  $ik_z z + il\phi$ ), где  $\omega$  – частота сигнала,  $k_z$  – продольное волновое число,  $l$  – номер азимутальной моды, из (3) можно получить диэлектрическую проницаемость холодной плазмы  $\epsilon_p = 1 - \omega_p^2/\omega^2$  с ленгмюровской частотой  $\omega_p^2 = 4\pi n_p e^2/m$ , где  $e$  и  $m$  – заряд и масса электрона. При этом ток в плазме связан с поляризационным потенциалом соотношением

$$\tilde{j}_p = -\frac{\omega}{4\pi i}(\epsilon_p - 1)\chi^2\tilde{\Psi}(r_p), \quad (4)$$

где  $\chi^2 = k_z^2 - \omega^2/c^2$ , а знак тильда используется для обозначения амплитуды соответствующей величины. Аналогичное соотношение в линейном приближении можно записать и для электронного пучка, который имеет диэлектрическую проницаемость  $\epsilon_b = 1 - \omega_b^2\gamma^{-3}/(\omega - k_z u)^2$ , где  $\omega_b$  – ленгмюровская частота пучка,  $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$  – релятивистский фактор, так что уравнение (1) сведется к виду

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial \phi^2} - \epsilon(r)\chi^2\tilde{\Psi} = 0 \quad (5)$$

с

$$\epsilon(r) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \Delta_p \delta(r - r_p) - \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{(\omega - k_z u)^2} \Delta_b \delta(r - r_b). \quad (6)$$

Плазма и электронный пучок делят интервал  $R_1 < r < R_2$  на три вакуумные области:  $R_1 < r < r_p$  (область I),  $r_p < r < r_b$  (область II) и  $r_b < r < R_2$  (область III). Для определенности рассмотрен случай, когда  $r_p < r_b$ . Противоположный случай может быть рассмотрен по аналогии и окончательные выражения для него будут также сформулированы ниже. В каждой из вакуумных областей справедливо уравнение (5), в котором  $\epsilon(r) = 1$ . Его решения в цилиндрических координатах записываются как суперпозиция модифицированных функций Бесселя

$$\tilde{\Psi} = A_{1,2,3} I_l(\chi r) + B_{1,2,3} K_l(\chi r). \quad (7)$$

Здесь индексы у коэффициентов относятся к вакуумным областям I, II и III. По виду решений (7) ясно, что поперечная структура поля имеет поверхностный характер (убывающая зависимость близкая к экспоненциальной) в вакуумной области при удалении от плазмы или пучка.

Решения (7) для разных вакуумных областей необходимо “сшить” в точках, разделяющих эти области. Условия сшивания можно получить непосредственно из уравнения (5) с выражением для диэлектрической проницаемости (6) интегрированием по бесконечно малому отрезку в

окрестности точек  $r_p$  и  $r_b$ . При этом сама продольная компонента электрического поля в виду непрерывности на двух близко расположенных границах раздела остается непрерывной. Таким образом, имеют место следующие условия сшивания:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(r_p + 0) - \tilde{\Psi}(r_p - 0) &= 0, \\ \frac{d\tilde{\Psi}(r_p + 0)}{dr} - \frac{d\tilde{\Psi}(r_p - 0)}{dr} &= -\chi^2 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \Delta_p \tilde{\Psi}(r_p), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(r_b + 0) - \tilde{\Psi}(r_b - 0) &= 0, \\ \frac{d\tilde{\Psi}(r_b + 0)}{dr} - \frac{d\tilde{\Psi}(r_b - 0)}{dr} &= -\chi^2 \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{(\omega - k_z u)^2} \Delta_b \tilde{\Psi}(r_b). \end{aligned} \quad (9)$$

Кроме условий сшивания (8) и (9) на решения (7) необходимо наложить обычные условия обращения в нуль тангенциальной компоненты электрического поля на металлических поверхностях, что приводит к граничным условиям

$$\tilde{\Psi}(R_2) = 0, \quad \tilde{\Psi}(R_1) = 0. \quad (10)$$

В итоге, для определения 6 постоянных в (7) имеется 6 дополнительных условий (8)–(10), что приводит к однородной системе уравнений. Условие ее разрешимости представляет собой дисперсионное уравнение, которое может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \left[ \omega^2 - \omega_p^2 \frac{\chi^2}{k_{\perp p}^2} \right] \left[ (\omega - k_z u)^2 - \omega_b^2 \gamma^{-3} \frac{\chi^2}{k_{\perp b}^2} \right] &= \\ = \theta \omega_p^2 \frac{\chi^2}{k_{\perp p}^2} \omega_b^2 \gamma^{-3} \frac{\chi^2}{k_{\perp b}^2}, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} k_{\perp p,b}^{-2} &= \Delta_{p,b} r_{p,b} E_1(r_{p,b}) E_2(r_{p,b}) \times \\ &\times \left[ \frac{I_l(\chi r_b) K_l(\chi r_p) - I_l(\chi r_p) K_l(\chi r_b)}{E_1(r_b) E_2(r_p) - E_1(r_p) E_2(r_b)} \right], \end{aligned} \quad (12)$$

$$\theta = \frac{E_1(r_p) E_2(r_b)}{E_1(r_b) E_2(r_p)}, \quad (13)$$

$$E_{1,2}(r) = I_l(\chi r) - \frac{I_l(\chi R_{1,2})}{K_l(\chi R_{1,2})} K_l(\chi r). \quad (14)$$

Дисперсионное уравнение (11) записано в форме, позволяющей придать физический смысл каждому из его элементов. Первое выражение в квадратных скобках есть дисперсионная функция плазменной волны, то есть волны в электродинамической системе в отсутствие электронного пучка [14]. Аналогично, второе выражение в квадратных скобках есть дисперсионная функция пучковых волн (быстрой и медленной), то есть волн в электродинамической системе в отсутствие плазмы. Правая часть с коэффициентом

связи  $\theta$  описывает взаимодействие этих волн. Если коэффициент связи равен нулю, то дисперсионное уравнение распадается на два уравнения, которые описывают отдельно плазменную и пучковые волны. Случай волновода с односвязной формой сечения [12] можно получить из формул (12)–(14) для коаксиального волновода, если устремить  $R_1 \rightarrow 0$ . Легко сообразить и как модифицируется дисперсионное уравнение если  $r_p > r_b$ : в выражении (13) следует сделать замену  $r_p \leftrightarrow r_b$ .

Дисперсионное уравнение (11) содержит сложную зависимость от продольного волнового числа  $k_z$ , в том числе и через аргументы цилиндрических функций. Развитию пучковой неустойчивости и усилению волны соответствуют комплексные значения  $k_z$ , причем экспоненциальный рост сигнала в направлении положительных значений координаты  $z$ , который:  $\sim e^{|\text{Im } k_z| z}$ , определяется мнимой частью продольного волнового числа. Известно [12, 13], что черенковская пучковая неустойчивость развивается в условиях черенковского резонанса  $k_z \approx \omega/u$ . Поэтому представим решение дисперсионного уравнения (11) в виде

$$k_z = \frac{\omega}{u}(1 + \delta), \quad (15)$$

где  $\delta$  – комплексный безразмерный инкремент пространственного усиления, причем  $|\delta| \ll 1$ . Подставляя (15) в (11), проведем разложение величины

$$\chi^2 = k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \approx \frac{\omega^2}{u^2 \gamma^2} (1 + 2\gamma^2 \delta) \quad (16)$$

по малому параметру  $\delta$ , ограничиваясь линейным приближением. Заметим, что учитывать поправку пропорциональную  $\delta$  в аргументах цилиндрических функций нецелесообразно. Действительно, дисперсионное уравнение (11) получено в приближении достаточно тонких электронного пучка и плазмы, что заведомо не выполняется при достаточно больших значениях  $k_z$ . При малых же значениях  $k_z$  и  $\omega$  величины  $k_{\perp p}^{-2}$ ,  $k_{\perp b}^{-2}$  и  $\theta$  почти постоянны и в азимутально симметричном случае  $l = 0$ , которым в дальнейшем и ограничимся, приближенно равны

$$k_{\perp p,b}^{-2} = \Delta_{p,b} r_{p,b} \frac{\ln r_{p,b}/R_1 \ln R_2/r_{p,b}}{\ln R_2/R_1}, \quad (17)$$

$$\theta = \begin{cases} \frac{\ln r_p/R_1 \ln R_2/r_b}{\ln r_b/R_1 \ln R_2/r_p} & \text{при } r_p < r_b, \\ \frac{\ln r_b/R_1 \ln R_2/r_p}{\ln r_p/R_1 \ln R_2/r_b} & \text{при } r_b < r_p. \end{cases} \quad (18)$$

В итоге имеем кубическое уравнение относительно комплексного безразмерного инкремента пространственного усиления  $\delta$

$$\begin{aligned} [1 - \alpha_p (1 + 2\gamma^2 \delta)] [\delta^2 - \alpha_b (1 + 2\gamma^2 \delta)] &= \\ &= \theta \alpha_p \alpha_b (1 + 2\gamma^2 \delta)^2, \end{aligned} \quad (19)$$

где

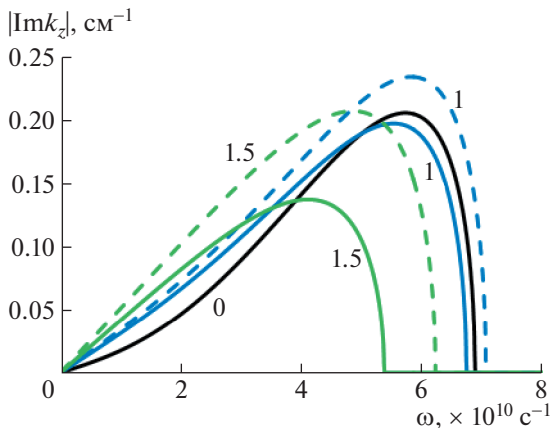
$$\alpha_p = \frac{\omega_p^2}{k_{\perp p}^2 u^2 \gamma^2}, \quad \alpha_b = \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{k_{\perp b}^2 u^2 \gamma^2}. \quad (20)$$

Величины  $\alpha_p$  и  $\alpha_b$  представляют собой безразмерные параметры плотности электронов плазмы и пучка. Различная зависимость от релятивистского фактора обусловлена эффективным увеличением массы релятивистского электрона пучка в уравнениях движения (см. диэлектрическую (22)). Классификация различных режимов неустойчивости, содержащихся в дисперсионном уравнении (19), дана в [15]. Кроме рассмотренных выше медленных волн  $E$ -типа, в коаксиальных волноводах в конечном магнитном поле возможны медленные волны квази- $TEM$ -типа [16], имеющие почти поперечную структуру.

Для работы плазменных мазеров существенное ограничение накладывает невозможность стационарно транспортировать через электродинамическую систему токи, превышающие предельный вакуумный ток. В случае коаксиальной электродинамической системы его значение для тонкого трубчатого электронного пучка определяется формулой [17]

$$I_{lim} = \frac{mc^3}{2e} (\gamma^{2/3} - 1)^{3/2} \frac{\ln R_2/R_1}{\ln r_b/R_1 \ln R_2/r_b}. \quad (21)$$

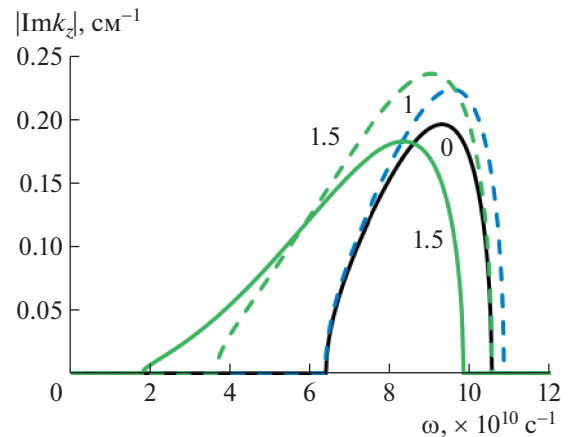
В зависимости от параметров, значение предельного вакуумного тока для коаксиальной электродинамической системы может в несколько раз превосходить его значение для волновода с односвязной формой сечения. Более того, в экспериментах обычно используются токи электронного пучка, не превосходящие значение  $I_{lim}/2$ . Использование коаксиальной электродинамической системы позволяет в значительной степени избавиться от ограничений, связанных с предельным вакуумным током. Заметим, что даже в случае нейтрализации электронного пучка по заряду за счет ионизации газа и ухода избыточных электронов образовавшейся плазмы, транспортируемый ток будет ограничен током Пирса. Его значение будет в  $\gamma^2$  раз выше предельного вакуумного тока и для случая слабoreлятивистских пучков с энергией 270 кэВ и  $\gamma = 1.5$  предельный ток Пирса будет примерно в 2 раза превосходить предельный вакуумный ток.



**Рис. 2.** Частотная зависимость инкрементов пространственного усиления ( $n_p = 5 \times 10^{12} \text{ см}^{-3}$ ,  $R_1 = 0 \text{ см}, 1 \text{ см}, 1.5 \text{ см}$ , штриховые линии – увеличенный ток пучка, значение  $R_1$  указано около кривой).

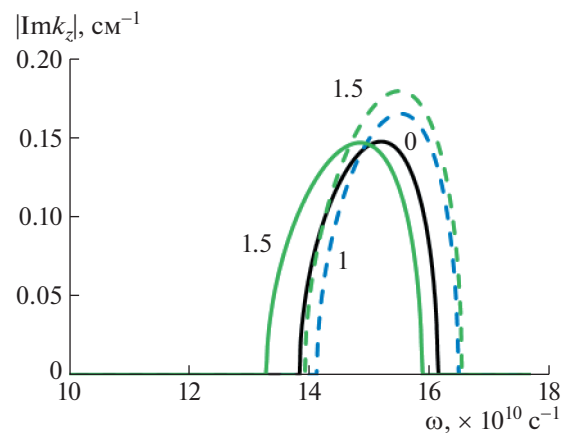
При численном анализе будем ориентироваться на следующие параметры плазменных мазеров, используемых в экспериментах: кинетическая энергия электронов пучка 270 кэВ, ток пучка от 2 кА,  $R_2 = 3 \text{ см}$ ,  $r_p = 1.85 \text{ см}$ ,  $r_b = 2.2 \text{ см}$ ,  $\Delta_p = 0.2 \text{ см}$ ,  $\Delta_b = 0.1 \text{ см}$ . На рис. 2–4 представлены зависимости инкрементов пространственного усиления  $|\text{Im} k_z|$  азимутально симметричной волны от частоты усиливаемого сигнала. Варьируется от рис. 2 к рис. 4 плотность электронов плазмы ( $n_p = 5 \times 10^{12}$ ,  $10^{13}$  и  $2 \times 10^{13} \text{ см}^{-3}$ , соответственно). На каждом из рисунков представлено несколько дисперсионных кривых для различных значений радиуса стержня  $R_1$  и тока пучка. Сплошные кривые построены для тока 2 кА, а штрихованные соответствуют току  $I$ , в котором отношение  $I/I_{lim}$  такое же, как в волноводе с односвязным поперечным сечением.

При  $n_p < 5 \times 10^{12} \text{ см}^{-3}$  инкременты относительно малы, но с ростом концентрации электронов плазмы их значения возрастают. Это соответствует ситуации, что пучковая неустойчивость имеет пороговый характер по плотности плазмы и возникает при  $\omega_p^2 > k_{\perp}^2 u^2 \gamma^2$  [12]. При достаточно больших значениях концентрации электронов плазмы инкременты снова начинают плавно уменьшаться. Кроме того, при увеличении концентрации электронов плазмы увеличивается и плазменная (ленгмюровская) частота. Это приводит к увеличению резонансной частоты черенковской пучковой неустойчивости и смещению максимумов инкрементов в более высокочастотную область.

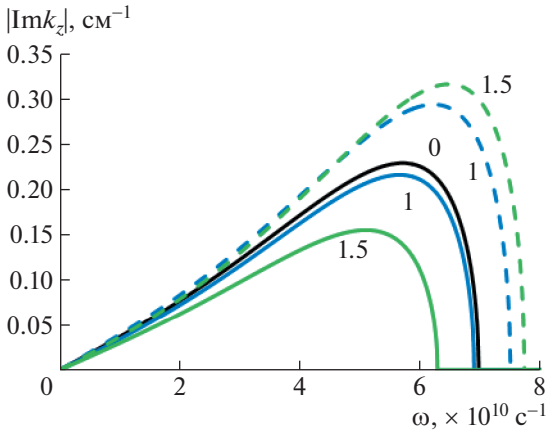


**Рис. 3.** Частотная зависимость инкрементов пространственного усиления ( $n_p = 10^{13} \text{ см}^{-3}$ ,  $R_1 = 0 \text{ см}, 1 \text{ см}, 1.5 \text{ см}$ , штриховые линии – увеличенный ток пучка, значение  $R_1$  указано около кривой).

Увеличивая радиус внутреннего металлического стержня волновода  $R_1$  (или, другими словами, приближая эквипотенциальную поверхность к области, занимаемой плазмой) инкремент уменьшается, а оптимальная частота (соответствующая максимуму инкремента пространственного усиления) сдвигается в область более низких частот. Физически это связано с тем, что металлическая поверхность вблизи плазмы “нейтрализует” ее, и взаимодействие с электронным пучком ослабевает. При  $n_p = 5 \times 10^{12} \text{ см}^{-3}$  (рис. 2) использование металлического стержня с радиусом  $R_1 < 1 \text{ см}$  практически не изменяет инкре-



**Рис. 4.** Частотная зависимость инкрементов пространственного усиления ( $n_p = 2 \times 10^{13} \text{ см}^{-3}$ ,  $R_1 = 0 \text{ см}, 1 \text{ см}, 1.5 \text{ см}$ , штриховые линии – увеличенный ток пучка, значение  $R_1$  указано около кривой).



**Рис. 5.** Частотная зависимость инкрементов пространственного усиления (пучок внутри,  $n_p = 5 \times 10^{12} \text{ см}^{-3}$ ,  $R_1 = 0 \text{ см}$ ,  $1 \text{ см}$ ,  $1.5 \text{ см}$ , штриховые линии – увеличенный ток пучка, значение  $R_1$  указано около кривой).

мент. При дальнейшем увеличении концентрации электронов плазмы до значения  $10^{13} \text{ см}^{-3}$  (рис. 3) в случае односвязного поперечного сечения волновода область неустойчивости располагается не от нулевых значений частоты, как при меньшей концентрации плазмы. Эта ситуация известна [12] как коллективный эффект Черенкова, в противоположность одночастичному эффекту Черенкова как в случае  $n_p = 5 \times 10^{12} \text{ см}^{-3}$ . Различие между этими эффектами состоит в том, что, успеют ли проявиться колебательные свойства электронного пучка за время развития неустойчивости. Когда инкремент велик по сравнению с частотой собственных колебаний электронного пучка реализуется одночастичный эффект Черенкова, в противоположном случае – коллективный. С увеличением внутреннего радиуса коаксиального волновода, начиная со значений  $R_1 = 1.6 \text{ см}$  коллективный эффект Черенкова трансформируется в одночастичный. Уменьшение инкремента неустойчивости с трансформацией коллективного механизма в одночастичный означает еще более сильное уменьшение собственной частоты колебаний пучка. При концентрации электронов плазмы  $n_p = 2 \times 10^{13} \text{ см}^{-3}$  (рис. 4) инкремент уже начинает уменьшаться. При значениях внутреннего радиуса коаксиального волновода  $R_1$  от нуля и вплоть до области занимаемой плазмой инкремент изменяется слабо. Однако, области неустойчивости становятся достаточно узкими, что не очень удобно при экспериментальной реализации.

Использование коаксиальной электродинамической системы при одном и том же значении

тока электронного пучка не приводит к улучшению усилительных свойств плазменного мазера. Однако, такая модификация увеличивает предельный вакуумный ток, что позволяет реализовать большие значения тока электронного пучка. На рассмотренных выше рис. 2–4 штриховыми линиями показаны инкременты неустойчивости пучково-плазменной системы, в которой ток пучка увеличен до значения  $2.8 \text{ кА}$  при  $R_1 = 1 \text{ см}$  и  $3.6 \text{ кА}$  при  $R_1 = 1.5 \text{ см}$ , то есть отношение  $I/I_{lim}$  такое же, как в волноводе с односвязным поперечным сечением. Увеличение пространственного инкремента усиления при этом составляет  $10 \dots 15\%$ .

Приведем еще те же результаты для случая, когда плазма и пучок меняются местами, то есть  $r_p = 2.2 \text{ см}$ ,  $r_b = 1.85 \text{ см}$  (пучок внутри плазменной трубки), остальные же параметры остаются неизменными. Эти результаты представлены на рис. 5–7. Отличие от уже представленных результатов состоит в том, что при изменении радиуса внутреннего металлического стержня при неизменном токе электронного пучка частота, соответствующая максимуму пространственного инкремента неустойчивости, смещается существенно меньше. Малое смещение частоты, соответствующей максимуму пространственного инкремента неустойчивости, можно объяснить удаленностью плазменной трубки от внутреннего металлического стержня, что слабо сказывается на изменении дисперсионных свойств поверхностной плазменной волны при изменении  $R_1$ . Штриховыми линиями на рис. 5–7 показаны инкременты неустойчивости пучково-плазменной системы, в которой ток пучка увеличен до значения  $3.6 \text{ кА}$  при  $R_1 = 1 \text{ см}$  и  $6.6 \text{ кА}$  при  $R_1 = 1.5 \text{ см}$ . Увеличение пространственного инкремента усиления при этом составляет  $20 \dots 30\%$ .

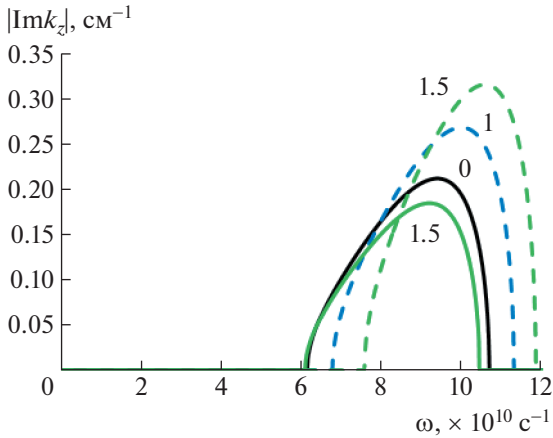
### 3. НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ И НАСЫЩЕНИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Для описания насыщения пучково-плазменной неустойчивости учтем нелинейность в пучке. Для этого запишем уравнения движения электронов, где в качестве независимой переменной выбрана координата  $z$ ,

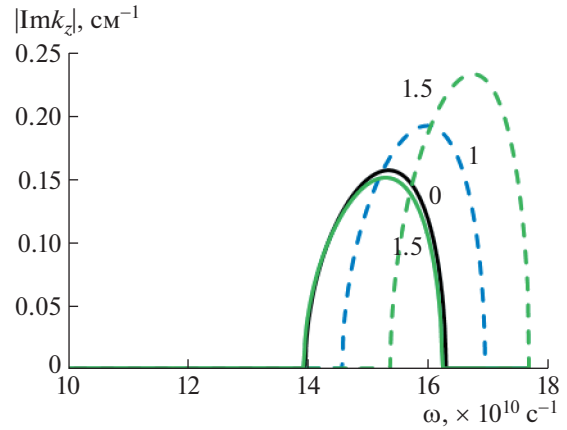
$$\frac{dt}{dz} = \frac{1}{v_z}, \quad \frac{dv_z}{dz} = \left(1 - \frac{v_z^2}{c^2}\right)^{3/2} \frac{eE_z(r_b)}{mv_z}. \quad (22)$$

В условиях, когда скорость электронов пучка  $v_z$  при взаимодействии с возбуждаемой волной меняется незначительно, то есть  $\eta = (u - v_z)/u \ll 1$





**Рис. 6.** Частотная зависимость инкрементов пространственного усиления (пучок внутри,  $n_p = 10^{13} \text{ см}^{-3}$ ,  $R_1 = 0 \text{ см}$ , 1 см, 1.5 см, штриховые линии – увеличенный ток пучка, значение  $R_1$  указано около кривой).



**Рис. 7.** Частотная зависимость инкрементов пространственного усиления ( $n_p = 2 \times 10^{13} \text{ см}^{-3}$ ,  $R_1 = 0 \text{ см}$ , 1 см, 1.5 см, штриховые линии – увеличенный ток пучка, значение  $R_1$  указано около кривой).

и, вводя локальное время  $\tau = t - z/u$ , уравнения движения (22) можно записать в виде

$$\frac{d\tau}{dz} = \frac{\eta}{u}, \quad \frac{d\eta}{dz} = -\frac{\left(1 + 2\frac{u^2}{c^2}\gamma^2\eta\right)^{3/2}}{mu^2\gamma^3} eE_z(r_b). \quad (23)$$

Плотность тока пучка представим как сумму вкладов от каждого отдельного электрона

$$j_b = en_b u \int \delta(\tau - \tau(z, \tau_0)) d\tau_0, \quad (24)$$

где  $\tau_0$  – время влета электрона в область взаимодействия через плоскость  $z = 0$ ,  $\tau(z, \tau_0)$  – решение уравнений (23), т.е. локальное время, когда электрон, влетевший в момент времени  $\tau_0$ , окажется в точке  $z$ . Уравнения (23) дополняются условиями влета частиц

$$\tau(z = 0) = \tau_0, \quad \eta(z = 0) = 0. \quad (25)$$

В выражениях для вектора Герца и тока в плазме выделим амплитуду и экспоненциальный множитель  $\exp(-i\omega t + ik_z z)$ , а вектор Герца дополнительно разложим в ряд по мембранным функциям [18], т.е. представим

$$\Psi = \frac{1}{2} \sum_n \varphi_n(r) \left[ A_n(z) e^{-i\omega t + ik_z z} + c.c. \right], \quad (26)$$

$$j_p = \frac{1}{2} \left[ \tilde{J}_p e^{-i\omega t + ik_z z} + c.c. \right], \quad (27)$$

Символы *c.c.* означают комплексное сопряжение, а мембранные функции цилиндрического коаксиального волновода есть

$$\varphi_n(r) = J_0(k_n r) - \frac{J_0(k_n R_1)}{N_0(k_n R_1)} N_0(k_n r), \quad (28)$$

где  $J_0$  и  $N_0$  – функции Бесселя и Неймана нулевого порядка, а  $k_n$  определяется решением следующего уравнения:

$$J_0(k_n R_2) N_0(k_n R_1) - J_0(k_n R_1) N_0(k_n R_2) = 0. \quad (29)$$

Волновой вектор волны в условиях черенковского резонанса равен  $k_z = \omega/u$ . При слабой нелинейности  $A_n(z)$  будет медленной (на масштабах длины волны) функцией  $z$ . Продольная компонента электрического поля волны определяется из (2) и (26) с учетом медленности изменения  $A_n(z)$

$$E_z = \frac{1}{2} \sum_n \varphi_n(r) \left[ \hat{A}_n(z) e^{-i\omega t + ik_z z} + c.c. \right], \quad (30)$$

где  $\hat{A}_n(z) = -\frac{\omega^2}{u^2 \gamma^2} \hat{L} A_n(z) = -\frac{\omega^2}{u^2 \gamma^2} \left( 1 - 2i\gamma^2 \frac{u}{\omega} \frac{d}{dz} \right) A_n(z)$ . Подставляя (26) и (27) в (1) и выражая коэффициенты  $A_n(z)$ , находим

$$A_n(z) = \frac{4\pi i}{\omega} \frac{1}{k_n^2 + \omega^2 / (u^2 \gamma^2)} \times \frac{S_p \varphi_n(r_p) \tilde{J}_p + S_b \varphi_n(r_b) \tilde{J}_b}{\|\varphi_n\|^2}, \quad (31)$$

где  $S_{p,b} = 2\pi r_{p,b} \Delta_{p,b}$ ,  $\|\Phi_n\|^2$  – квадраты нормы мембранных функций. Амплитуда плотности тока пучка определяется соотношением

$$\tilde{j}_b = en_b u \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} e^{i\omega\tau(z,\tau_0)} d\tau_0. \quad (32)$$

Подставляя (27) и (30) в (3), получим уравнение

$$\left(1 - \frac{\omega_p^2}{k_{\perp p}^2 u^2 \gamma^2} \hat{L}\right) \tilde{j}_p = \frac{\omega_p^2}{k_{pb}^2 u^2 \gamma^2} \hat{L} \tilde{j}_b, \quad (33)$$

где

$$k_{\perp p,b}^{-2} = \sum_n \frac{1}{k_n^2 + \omega^2 / (u^2 \gamma^2)} \frac{S_{p,b} \Phi_n^2(r_{p,b})}{\|\Phi_n\|^2}, \quad (34)$$

$$k_{pb}^{-2} = \frac{S_b}{S_p} k_{bp}^{-2} = \sum_n \frac{1}{k_n^2 + \omega^2 / (u^2 \gamma^2)} \frac{S_b \Phi_n(r_p) \Phi_n(r_b)}{\|\Phi_n\|^2}. \quad (35)$$

В уравнениях (32), (33) рационально сделать обезразмеривание величин  $\tilde{j}_{p,b}$  на  $en_{p,b}u$ . Обезразмерим далее время  $\tau$  с помощью частоты  $\omega$ , то есть  $y = \omega\tau$ , координату  $z$  с помощью волнового числа  $k_z = \omega/u$ , то есть  $\xi = z\omega/u$ . Введем еще величины

$$\theta = \frac{k_{pb}^{-2} k_{bp}^{-2}}{k_{\perp p}^{-2} k_{\perp b}^{-2}}, \quad \alpha_p = \frac{\omega_p^2}{k_{\perp p}^2 u^2 \gamma^2}, \quad \alpha_b = \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{k_{\perp b}^2 u^2 \gamma^2}, \quad (36)$$

а также переобозначим

$$\frac{\omega_p^2}{u^2 \gamma^5} \sqrt{\frac{S_p}{S_b}} \theta k_{\perp p}^{-1} k_{\perp b}^{-1} \tilde{j}_p \rightarrow \tilde{j}_p$$

и окончательно запишем систему (23), (25) и (32), (33) в виде

$$(1 - \alpha_p \hat{L}) \tilde{j}_p = \alpha_p \alpha_b \theta \hat{L} \tilde{j}_b, \quad \hat{L} = 1 - 2i\gamma^2 \frac{d}{d\xi} \quad (37)$$

$$\tilde{j}_b = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{iy} dy_0, \quad (38)$$

$$\frac{dy}{d\xi} = \eta,$$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = i \frac{\left(1 + \frac{2u^2}{c^2} \gamma^2 \eta\right)^{3/2}}{2} \left[ \hat{L} (\tilde{j}_p + \alpha_b \tilde{j}_b) e^{-iy} - c.c. \right], \quad (39)$$

$$y(\xi = 0) = y_0, \quad \eta(\xi = 0) = 0. \quad (40)$$

Параметры  $\theta$ ,  $\alpha_p$ ,  $\alpha_b$ , а также входящие в них величины  $k_{\perp p}^{-2}$ ,  $k_{\perp b}^{-2}$ ,  $k_{pb}^{-2}$ ,  $k_{bp}^{-2}$ , с одной стороны определены формулами нелинейной теории (34)–(36), а с другой стороны формулами линейной теории (12), (13), (20). Линеаризуя (38), (39), можно показать, что, несмотря на разную форму за-

писи, выражения для  $\theta$ ,  $\alpha_p$ ,  $\alpha_b$  в линейной и нелинейной теориях совпадают.

Ниже приведены результаты расчетов для тех же параметров, которые использовались при построении рисунков 2–4. Согласно результатам линейной теории, при варьировании радиуса внутреннего стержня коаксиального волновода область неустойчивости трансформируется, и, в частности, частота, соответствующая максимуму коэффициента усиления, изменяется. Будем в расчетах предполагать, что усилитель используется в оптимальном режиме, то есть частота сигнала и параметры плазмы подобраны таким образом, что для данной частоты инкремент пространственного усиления максимален. Это наиболее естественный режим работы усилителя. Амплитуду сигнала от внешнего генератора на входе будем задавать, с одной стороны, достаточно малой, чтобы усиление имело как участок с линейным режимом (экспоненциальный рост), так и участок, в котором пучковая неустойчивость насыщается и дальнейшего усиления сигнала не происходит. С другой стороны, амплитуду сигнала будем брать достаточной, чтобы на расстояниях порядка длины плазменного мазера (до 1 метра) пучковая неустойчивость успевала развиваться и успели проявиться нелинейные эффекты, приводящие к ее насыщению.

Величина

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{2u^2}{c^2} \gamma^2 \eta\right)^{-1/2} dy_0 \quad (41)$$

характеризует относительную долю энергии частиц пучка в точке  $\xi$ . На рис. 8–10 представлены зависимости величины  $1 - P$ , которая пропорци-

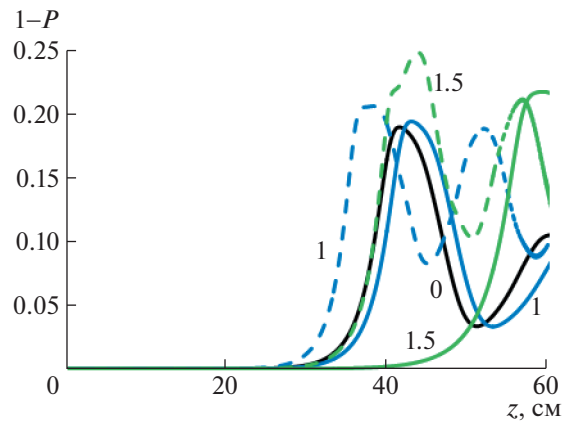
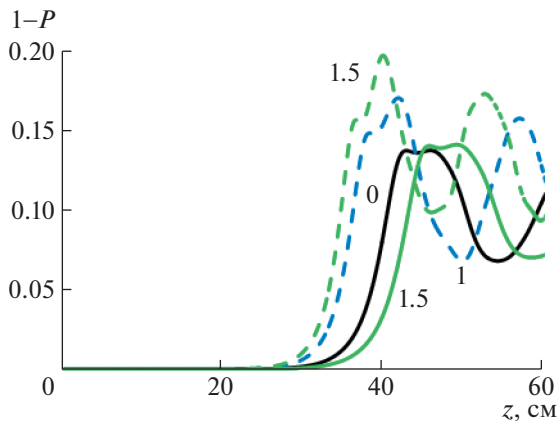
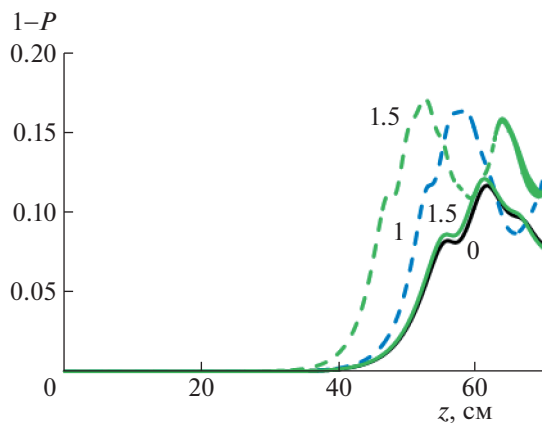


Рис. 8. Пространственная зависимость эффективности ( $n_p = 5 \times 10^{12} \text{ см}^{-3}$ ,  $R_1 = 0 \text{ см}, 1 \text{ см}, 1.5 \text{ см}$ , штриховые линии – увеличенный ток пучка, значение  $R_1$  указано около кривой).





**Рис. 9.** Пространственная зависимость эффективности ( $n_p = 10^{13} \text{ см}^{-3}$ ,  $R_1 = 0 \text{ см}, 1 \text{ см}, 1.5 \text{ см}$ , штриховые линии – увеличенный ток пучка, значение  $R_1$  указано около кривой).



**Рис. 10.** Пространственная зависимость эффективности ( $n_p = 2 \times 10^{13} \text{ см}^{-3}$ ,  $R_1 = 0 \text{ см}, 1 \text{ см}, 1.5 \text{ см}$ , штриховые линии – увеличенный ток пучка, значение  $R_1$  указано около кривой).

ональна эффективности преобразования энергии направленного движения электронов в энергию электромагнитных волн. На начальном участке имеется экспоненциальный рост сигнала за счет развития пучково-плазменной неустойчивости в линейном режиме. На некотором расстоянии от входа усилителя эффективность достигает максимума порядка 15...25% (насыщение неустойчивости), а затем снижается (в некоторых случаях имеют место повторные повышения и понижения с уменьшающейся амплитудой). Максимальное значение эффективности преобразования направленной энергии электронного пучка в энергию электромагнитных колебаний ведет себя аналогично величине инкремента простран-

ственного усиления, т.е. с ростом инкремента повышается и эффективность. Такая ситуация характерна для пучковых неустойчивостей и обусловлена тем обстоятельством, что величина замедления электронов определяется  $\text{Re } \delta < 0$  [12]. Таким образом, использование коаксиальной геометрии электродинамической системы позволяет повысить мощность микроволнового излучения не только за счет увеличения тока электронного пучка, но и за счет увеличения эффективности.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе развита теория СВЧ-усилителя на основе пучково-плазменной неустойчивости в волноводе с неодносвязным поперечным сечением (коаксиальном волноводе). В рамках линейного приближения получены пространственные инкременты неустойчивости и их зависимость от частоты сигнала и параметров плазмы. При используемых в экспериментах параметрах, внесение в электродинамическую систему внутреннего металлического стержня радиусом до 1–1.5 см относительно слабо сказывается на самом характере неустойчивости, однако, позволяет существенно повысить транспортируемый через систему ток электронного пучка. А это, в свою очередь, приводит к повышению пространственного инкремента до 30%. Моделирование нелинейной динамики электронов пучка позволило определить возможный уровень выходной мощности и эффективности усилителя. В случае коаксиальной геометрии системы вслед за ростом инкремента неустойчивости при увеличении тока электронного пучка увеличивается эффективность и выходная мощность излучения. Эффективность преобразования направленной энергии электронного пучка в энергию СВЧ-колебаний для использованных параметров составляет 15–25%. Проведенные расчеты могут быть полезны при создании плазменных мазеров с новой, коаксиальной конфигурацией и увеличенной мощностью и эффективностью.

Авторы выражают благодарность О.Т. Лозе, инициировавшему проведенные теоретические исследования, за полезные обсуждения и интерес к работе. Работа выполнена в рамках Договора № 313/1689–Д от 16.09.2019 г. с ГК Росатом.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Buleyko A.B., Gusein-zade N.G., Loza O.T.* // Phys. Wave Phen. 2018. V. 26. P. 317.
2. *Buleyko A.B., Ponomarev A.V., Loza O.T., Ul'yanov D.K.* // Phys. Wave Phen. 2019. V. 27. P. 257.
3. *Litvin V.O., Loza O.T.* // Phys. Plasmas. 2018. V. 25 (1). P. 013105.

4. Стрелков П.С., Тараканов В.П., Диас Михайлова Д.Е., Иванов И.Е., Шумейко Д.В. // Физика плазмы. 2019. Т. 45. С. 335.
5. Карташов И.Н., Кузелев М.В., Стрелков П.С., Тараканов В.П. // Физика плазмы. 2018. Т. 44. С. 250.
6. Ge X., Zhong H., Qian B., Liu L., Liu Y., Shu T., Zhang J. // Phys. Plasmas. 2009. V. 16. P. 063107.
7. Ge X., Zhong H., Qian B., Zhang J., Fan Y., Shu T., Liu J. // Phys. Plasmas. 2009. V. 16. P. 113104.
8. Ge X., Zhong H., Zhang J., Qian B. // Phys. Plasmas. 2013. V. 20. P. 023105.
9. Тотъменинов Е.М., Климов А.И., Конев В.Ю., Пегель И.В., Ростов В.В., Цыганков Р.В., Тараканов В.П. // Письма в ЖТФ. 2014. Т. 40 (4). С. 23.
10. Алисов А.Ф., Артамошкин А.М., Бердин С.А., Голота В.И., Егоров А.М., Загородний А.Г., Загребельный И.А., Засенко В.И., Карась В.И., Карась И.В., Потапенко И.Ф., Старостин А.Н. // Физика плазмы. 2010. Т. 36. С. 786.
11. Загребельный И.А., Марков П.И., Подобинский В.О. // ВАНТ. Сер. Плазменная электроника и новые методы ускорения. 2008. № 4. С. 195.
12. Кузелев М.В., Рухадзе А.А., Стрелков П.С. Плазменная релятивистская СВЧ-электроника. М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002.
13. Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. Основы электродинамики плазмы. М.: Высшая школа, 1988.
14. Карташов И.Н., Кузелев М.В., Хапаева Е.А. // Радиотехника и электроника. 2010. Т. 55. С. 1488.
15. Кузелев М.В., Хапаева Е.А. // Физика плазмы. 2012. Т. 38. С. 603.
16. Карташов И.Н., Кузелев М.В. // Физика плазмы. 2014. Т. 40. С. 1084.
17. Сотников Г.В., Яценко Т.Ю. // ЖТФ. 2002. Т. 72 (5). С. 22.
18. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.