

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО КОРОННОГО РАЗРЯДА
ОТ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ
ЗАЗЕМЛЕННЫХ ПРОВОДОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ
ГРОЗОВОГО ОБЛАКА© 2021 г. М. С. Мокров^{a,*}, Ю. П. Райзер^a^a Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: mmokrov@gmail.com

Поступила в редакцию 23.12.2020 г.

После доработки 21.01.2021 г.

Принята к публикации 23.01.2021 г.

Теоретически рассматривается нестационарная положительная корона, развивающаяся в свободном пространстве от системы заземленных проводов, подвешенных на одинаковой высоте и находящихся в нарастающем однородном электрическом поле грозового облака. Для расчета характеристик короны разработана двумерная компьютерная модель, в которой разряд описывается уравнением для плотности положительных ионов одного сорта и уравнением Пуассона для электрического поля. Для простоты предполагается, что провода многоэлектродной системы тождественны и расстояния между любыми двумя соседними проводами одинаковы. Рассмотрен случай, когда число проводов в системе бесконечно и задача сводится к изучению короны от одного провода и случай системы из восьми коронирующих проводов. На основе численного решения уравнений двумерной модели, рассчитаны коронный ток, распределение объемного заряда, генерируемого короной, и электрического поля в окружающем провода пространство. В случае короны от бесконечного числа проводов рассчитан режим, когда коронный ток выходит на насыщение и зависит только от скорости роста грозового поля и расстояния между проводами. Результаты могут представлять интерес для последующих оценок влияния коронного разряда на эффективность многотросовой молниезащиты.

Ключевые слова: коронный разряд, многоэлектродная система, численное моделирование, ионный слой, электрическое поле грозового облака

DOI: 10.31857/S0367292121060123

1. ВВЕДЕНИЕ

Нестационарная корона, возникающая в грозовую погоду у острых выступов заземленных объектов, подробно изучалась в последние 20 лет. Особенность этого явления состоит в том, что заряды, генерируемые короной вблизи коронирующего острия, устремляются вверх к грозовому облаку, заполняя свободное пространство, поэтому стационарное состояние установиться не может. Поэтому характеристики нестационарной короны в естественных условиях существенно отличаются от характеристик лабораторной короны, когда стационарное состояние устанавливается сравнительно быстро. В частности, ток нестационарной короны определяется скоростью роста напряжения на промежутке, а не самой величиной напряжения [1].

В грозовых условиях роль приложенного напряжения играет разность потенциалов между заземленным объектом и потенциалом внешнего

поля в месте расположения объекта, $E_0(t)h$, где $E_0(t)$ – медленно нарастающее во времени электрическое поле грозового облака, направленное вертикально вверх, h – высота объекта. Корона возникает от объекта с радиусом закругления $r_0 \ll h$, когда электрическое поле на его поверхности превысит поле зажигания короны E_{cor} . Пространственный заряд, внедряемый в окружающее пространство коронным разрядом, приводит к перераспределению электрического поля вблизи объекта. Как оказалось, такое действие заряда позволяет подавлять возбуждение восходящих молний от высоких заземленных сооружений [1–4]. В недавней статье [5] высказано предположение, что присутствие заряда, внедренного короной, может объяснять снижение вероятности удара молнии в статический ветрогенератор электрической энергии по сравнению с вращающимся ветрогенератором, около которого облако про-

пространственного заряда короны не успевает сформироваться.

Эффект пространственного заряда короны приводит к уменьшению электрического поля у земли, как это следует из наблюдений [6–8] в условиях, когда поверхность земли покрыта густой растительностью. Растительный покров (ветки деревьев, кустов, траву) можно уподобить заземленным проводникам, острия которых находятся достаточно высоко над земной поверхностью. Индивидуальные короны от таких электродов перекрываются в единый плоский ионный слой, верхняя граница которого достигает высот в несколько сотен метров [6–8]. Пространственный ионный заряд, сосредоточенный в области между земной поверхностью и верхней границей ионного слоя, создает свое собственное поле, направленное вдоль вертикали противоположно внешнему грозовому полю E_0 . В результате измеренные значения грозового поля на земной поверхности оказались существенно ниже, чем поле E_0 над верхней границей ионного слоя [6–8].

С практической точки зрения, многоэлектродные системы могут быть использованы для повышения надежности молниезащиты объектов [2, 9–11]. Для защиты не слишком высоких сооружений, занимающих значительную площадь, предложено разместить над ними плоскопараллельную решетку заземленных проводов (грозотросов), подвешенных на опорах, которые вынесены за пределы защищаемой территории [12]. Предполагается, что экранирующий эффект объемного заряда короны от проводов усилит их защитное действие. Поэтому представляет интерес информация о характеристиках короны, ее тока, распределении и величине заряда, внедренного коронирующими проводами. Одной из задач является выяснение условий, при которых можно создать однородный плоский слой объемного заряда над защищаемой территорией благодаря эффекту короны от проводов. В настоящей работе эти вопросы рассматриваются теоретически, на основе численного моделирования.

Моделирование нестационарной короны даже от одиночных заземленных электродов в грозовых условиях сталкивается с большими вычислительными трудностями. Строго говоря, процесс коронирования, как минимум, двумерен, а расчетная область охватывает масштабы от малого радиуса закругления электрода $r_0 \sim 1$ см до расстояний в сотни метров, которые сравнимы с длиной промежутка облако–земля. В серии работ [1, 4, 13–16] на основе приближенной квазиодномерной (1D) модели короны впервые были рассчитаны характеристики короны от заземленных сферических электродов и стержней с полусферической головкой, которые являются прототипами молниеотводов, и сделаны оценки влияния коро-

ны на притяжение молний к высоким заземленным объектам. Позднее те же вопросы исследовались более детально в статьях [17, 18] на основе двумерной (2D) модели нестационарной короны и моделей [19, 20] возбуждения встречного лидера от объекта.

Надо сказать, что в статьях [17, 18] опровергаются выводы [4, 15] о заметном подавлении молнии эффектом короны, и говорится, что неверные оценки получились в результате использования чрезмерно упрощенной одномерной модели. В статье [21], суммирующей результаты многолетних исследований [1, 4, 13–16], показано, что это утверждение не справедливо, а отличия приближенной 1D и строгой 2D-моделей короны не столь радикальны, чтобы сильно повлиять на условие возникновения встречного лидера. Возможно, расхождение результатов [17, 18] и [21] объясняется использованием разных критериев возбуждения стримеров и лидеров от объекта. Поэтому вопрос о влиянии короны на молнию остается открытым.

В двумерной цилиндрической геометрии характеристики нестационарной короны от уединенного заземленного провода (молниезащитного троса) изучались в работе [22] на основе приближенной квазиодномерной квазистационарной аналитической модели, подобной примененной в [1, 4]. Также в [22] рассматривался вопрос о влиянии короны на притяжение молний к тросу. В двумерной постановке задача о нестационарной короне от уединенного заземленного провода рассматривалась в [23].

Нестационарная корона от многоэлектродной системы, состоящей из одинаковых сферических проводников, заземленных тонкими проволоками, и находящихся на одинаковой высоте h над плоской земной поверхностью в однородном грозовом поле впервые теоретически рассмотрена в [24, 25] (расчеты также выполнены для родственной системы из вертикальных тонких заземленных стержней с полусферической головкой). На плоскости земли проводники размещались вдоль концентрических окружностей с радиусами $r_k = kD$ ($k = 1, 2, \dots, N$) вокруг одного проводника. Предполагалось, что вдоль окружности с номером k равномерно размещено $6k$ проводников. Краевыми эффектами пренебрегалось и считалось, что заряды всех электродов одинаковы. Для расчета короны от такой системы использовалась усовершенствованная 1D модель [1, 4, 13–16, 21], а в предельном случае бесконечного числа проводников, – аналитическая теория. Путем варьирования входных параметров задачи: числа окружностей с проводниками N , высот проводников h , характерного расстояния между соседними проводниками D , характерного времени нарастания грозового поля $E_0(t)$, получено множе-

ство данных о динамике коронного тока во времени [24] и временной эволюции вертикального электрического поля на земле и разных высотах [25]. Найдены условия, при которых характеристики короны от названной многоэлектродной системы оказываются такими же, как от плоской поверхности, эмитирующей ионы. В этом случае индивидуальные короны от проводников объединяются, над электродами формируется плоский ионный слой, а плотность тока нестационарной короны определяется только скоростью нарастания со временем грозового поля E_0 .

Целью данной работы является расчет характеристик нестационарной положительной короны, развивающейся от многоэлектродной системы плоскопараллельных одинаковых заземленных проводов (молниезащитных тросов), коронирующих во внешнем медленно нарастающем электрическом поле грозового облака. Расчет короны от многоэлектродной системы проводится на основе 2D компьютерной модели [23], развитой ранее для расчета короны от одиночного провода в грозовых условиях.

Отметим, что рассматриваемая здесь задача о нестационарной короне имеет общие черты с электростатическими задачами о стационарной короне. Стационарная корона от многоэлектродной системы электрофильтров была рассчитана для 2D системы длинных параллельных проводов [26, 27] и для трехмерной системы с заостренными электродами [26, 28]. Множество статей посвящено короне от линий электропередач с постоянным напряжением. Рассматривалась, например, задача о короне от одного горизонтального провода [29–31]; от двухполюсной нерасщепленной линии [32] и линии с полюсами, расщепленными на несколько проводов [33]; при этом в [30–33] учитывалось еще действие бокового ветра. В [34] на основе 2D численной модели описаны результаты проведенного в той же работе эксперимента, в котором продемонстрирована возможность использования стационарного коронного разряда от длинной тонкой проволоки в потоке воздуха (ветра) для управляемой электризации изолированного проводящего тела. Однако, во всех этих работах, в отличие от рассматриваемого нами случая, стационарное состояние устанавливается быстро, а короткая нестационарная стадия коронного разряда интереса не представляет.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И УРАВНЕНИЯ

Рассматриваем положительную корону от плоскопараллельной системы длинных одинаковых заземленных проводов радиуса r_0 , подвешенных на высоте h и коронирующих в медленно на-

растающем вертикальном электрическом поле грозового облака $E_0(t)$. Как обычно, предполагаем, что рост поля $E_0(t)$ описывается двумя простыми законами. В первом случае поле $E_0(t)$ растет линейно в течение времени τ , достигает максимума и затем поддерживается постоянным:

$$\begin{aligned} E_0(t) &= E_{0\max} t / \tau, & t < \tau; \\ E_0(t) &= E_{0\max}, & t \geq \tau \end{aligned} \quad (1)$$

Во втором случае поле растет по релаксационному закону:

$$E_0(t) = E_{0\max} [1 - \exp(-t/\tau)] \quad (2)$$

Расстояние между соседними проводами D считаем одинаковым. В первом случае расчет короны проведем для многоэлектродной периодической системы, состоящей из бесконечного числа проводов. В силу периодичности системы достаточно рассмотреть корону от одного провода, а действие остальных проводов заменить периодическими граничными условиями. Во втором случае принимаем, что система состоит из восьми параллельных проводов. Такое число выбрано в результате компромисса между затратами труда, машинным временем и полезной информацией, которую можно ожидать от расчета.

Схемы расположения проводов для названных случаев показаны на рис. 1. Координаты центров проводов, составляющих периодическую систему, равны $x_k = D/2 + kD$, $y_k = h$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2$, и т.д., см. рис. 1(а). Центры восьми проводов расположены в точках $x_k = -7D/2 + (k - 1)D$, $y_k = h$, $k = 1, \dots, 8$, рис. 1(б).

Коронный процесс описываем уравнением непрерывности для плотности ионов n_{ion} одного сорта и уравнением Пуассона для потенциала электростатического поля $\mathbf{E}' = -\nabla\phi'$, созданного зарядами проводов и пространственным зарядом ионов. Изменениями n_{ion} и ϕ' вдоль направления, параллельного осям проводов, координату вдоль которого обозначим z , пренебрегаем, т.е. имеем дело с плоской электростатической задачей. Тогда система уравнений для n_{ion} и ϕ' имеет вид:

$$\frac{\partial n_{\text{ion}}}{\partial t} + \text{div} [n_{\text{ion}} \mu_{\text{ion}} (\mathbf{E}' + \mathbf{E}_0)] = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y^2} = -\frac{en_{\text{ion}}}{\epsilon_0}, \quad (4)$$

где μ_{ion} – подвижность ионов, ϵ_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума. Принимаем, что подвижность положительных ионов в воздухе при нормальных условиях равна $\mu_{\text{ion}} = 1.5 \text{ см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ [35]. Потенциал грозового поля ϕ'' отсчитываем от земли, где $y = 0$, так что $\phi'' = -E_0 y$.

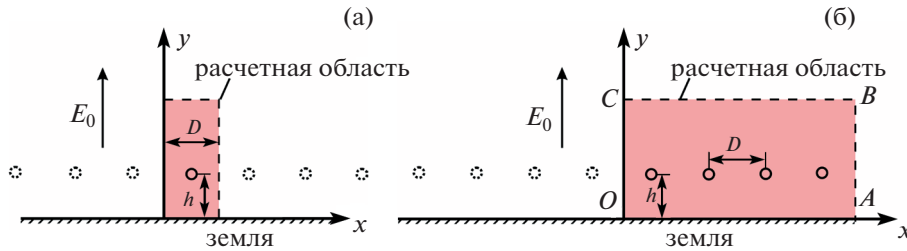


Рис. 1. Схематическое изображение плоскопараллельных многоэлектродных систем из одинаковых заземленных проводов в однородном грозовом поле E_0 : (а) бесконечная решетка проводов; (б) система из восьми проводов.

Граничные условия к системе (3), (4) таковы. Полагаем, что потенциал $\varphi' = 0$ на поверхности земли. Поскольку провода заземлены, то суммарный потенциал в центрах проводов равен нулю, $\varphi' + \varphi'' = 0$, т.е. $\varphi' = E_0(t)h$. Задача о короне от бесконечной системы проводов симметрична относительно прямых $x = 0$ и $x = D$ (см. рис. 1а), а о короне от восьми проводов симметрична относительно прямой $x = 0$ (см. рис. 1б). На этих линиях задаются граничные условия симметрии $d\varphi'/dx = 0$ и $\partial n_{ion}/\partial x = 0$.

Поскольку коронный разряд возникает в свободном пространстве, а в численном счете расчетная область неизбежно ограничена, особого внимания требует постановка граничных условий для потенциала φ' на свободных границах расчетных областей. Этими границами являются верхняя граница прямоугольной расчетной области в случае короны от бесконечной системы проводов и линии AB и BC на рис. 1б в случае короны от восьми проводов. Когда система проводов и зарядов бесконечна вдоль направления x , потенциал φ' не убывает на бесконечности при $y \rightarrow \infty$ [36]. В этом случае условие для φ' на верхней границе может быть выведено в предположении, что над верхней границей объемный заряд ионов равен нулю [37] или, другими словами, что ионный фронт не достигает этой границы за все время моделирования. Когда система проводов и зарядов конечна, то граничным условием для потенциала в свободном пространстве служит условие, что на бесконечности потенциал равен нулю $\varphi' = 0$. Используя это условие, и снова полагая, что весь объемный заряд ионов сосредоточен внутри расчетной области (см. рис. 1б), мы найдем потенциал φ' на линиях AB и BC . Подробно эти вопросы обсуждаются в следующем разделе.

В тонком слое вблизи коронирующих проводов идут процессы фотоионизации, электронного прилипания, электрон-ионной рекомбинации, ионной конверсии и др., которые обычно учитывают, когда моделируют корону из первых принципов в промежутках сантиметровой длины

[38–41]. Нашей целью является расчет характеристик короны на расстояниях от проводов в десятки, сотню метров, что несопоставимо больше толщины ионизационного слоя вблизи электрода, которая при атмосферных условиях порядка радиуса закругления электрода [42]. Во всех расчетах этой статьи мы принимаем, что радиус проводов равен $r_0 = 1$ см. Поэтому можно исключить рассмотрение слоя. С этой целью, как и в работах [1, 4, 11, 13–18, 21–25], предполагаем, что поле на коронирующем проводе равно пороговому полю для зажигания короны E_{cor}

$$E(r_0) = E_{cor}, \quad (5)$$

где E_{cor} дается формулой Пика

$$E_{cor}(r_0) = 31(1 + 0.308r_0^{-1/2}) \text{ кВ см}^{-1}, \quad r_0 [\text{см}]. \quad (6)$$

Условие (5) для поля на проводе хорошо обосновано, когда внешнее электрическое поле нарастает медленно, с характерным временем не меньше $\tau \sim 10^{-2}$ с, как это следует из результатов лабораторных экспериментов [43, 44] и численного моделирования [45]. По данным [46], грозовое поле нарастает за времена $\tau \sim 10\text{--}100$ с. Следовательно, формула (5) справедлива для случая короны в грозовом поле.

По мере накопления зарядов грозовой ячейки, внешнее поле E_0 сначала растет со временем, а затем выходит на насыщение. Согласно электростатике, внешнее грозовое поле усиливается у заземленных проводов. Когда поле на проводе достигает порога E_{cor} , у провода зажигается корона.

До момента зажигания короны предполагается, что плотность ионов n_{ion} в окружающем пространстве равна нулю, и ток короны на этой стадии равен нулю. После зажигания короны, принимая во внимание эволюцию грозового поля $E_0(t)$, мы внедряем ионы в первую расчетную ячейку у поверхности провода, чтобы компенсировать превышение поля на проводе $E(r_0)$ над E_{cor} и удовлетворить условию (5).

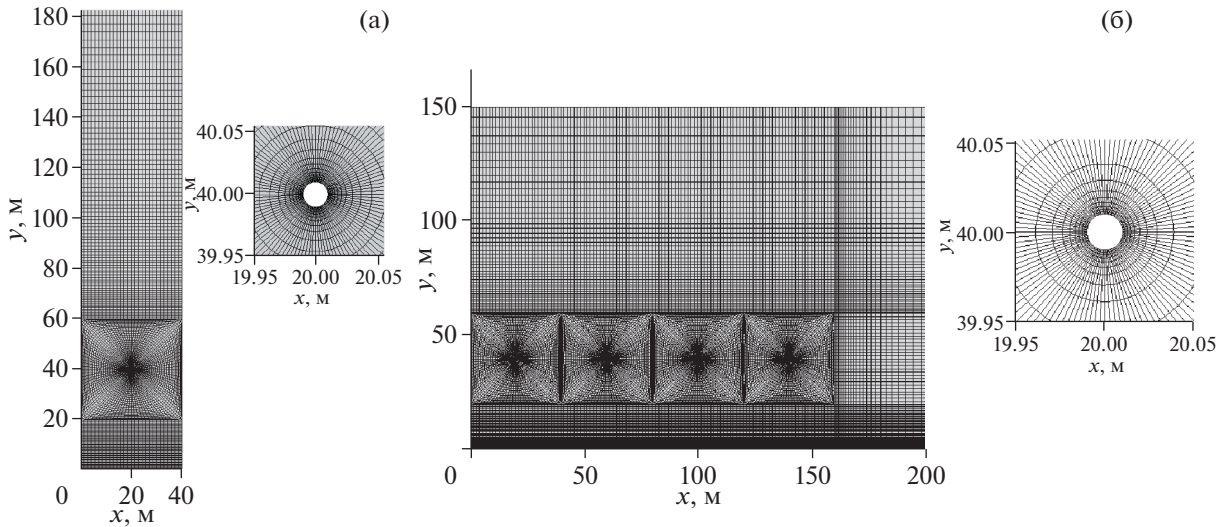


Рис. 2. Пример расчетных сеток: (а) для расчета периодической системы проводов; (б) для расчета системы из 8 проводов с условием симметрии при $x = 0$. Высота подвеса проводов $h = 40$ м, расстояние между соседними проводами $D = 20$ м. На вставках показана в крупном масштабе сетка около проводов.

После зажигания короны ток на единицу длины каждого провода можно представить в виде

$$I(t) = 2\pi r_0 e n_{ion}(r_0, t) \mu_{ion} E_{cor}, \quad (7)$$

где $n_{ion}(r_0, t)$ – плотность ионов на проводе. Алгоритм расчета коронного тока рассматривается в следующем разделе.

3. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

В расчетных областях, показанных на рис. 1, вводилась блочная сетка. Каждый провод помещался в квадратный блок сетки, а длину стороны этого квадрата принимали равной расстоянию между соседними проводами D . Такой выбор оправдан в том случае, когда высота подвеса проводов h сравнима с расстоянием D , что мы и будем предполагать в дальнейшем. В квадратных блоках строилась криволинейная неортогональная сетка О-типа, для координат узлов которой, x и y , решались уравнения эллиптического типа [47]. Вне квадратных блоков сетки с проводами вводились 2 либо 3 прямоугольных блока с прямоугольной сеткой.

Примеры построенных сеток даны на рис. 2: на рис. 2а – для расчета периодической системы проводов, а на рис. 2б – для расчета системы из восьми проводов. В силу принятого условия симметрии при $x = 0$, в последнем случае индивидуально рассматривается только половина от общего числа проводов.

Каждый шаг по времени начинается с решения уравнения Пуассона для потенциала φ' (4). Уравнение (4) приводится к конечно-разностному виду методом конечного объема [48, 49]. В

блоках с прямоугольной сеткой использовалась стандартная пятиточечная аппроксимация. В блоках с криволинейной сеткой после интегрирования по контрольному “объему” ячейки, градиенты потенциала в центрах граней ячеек рассчитывались “методом интегрирования по траекториям” [50]. Решение задачи во всей расчетной области находилось путем сшивания решений на границах блоков. Для этого использовался итерационный метод Шварца–Неймана [51]. Итерационный процесс начинается с того, что задаются пробные значения φ' на стыках блоков сетки. Принимая их в качестве граничных условий для φ' , находится приближенное распределение φ' в каждом блоке сетки. Затем граничные значения φ' на стыках блоков уточняются. Полагая производные φ' по координатам равными по обе стороны от межблочной границы, мы находим граничные значения φ' через известные с предыдущей итерации значения φ' во внутренних, приграничных узлах сетки.

В случае бесконечной периодической системы проводов, решение уравнения Пуассона в прямоугольных блоках сетки (см. рис. 2а) находилось методом Фурье, а сетка по x бралась равномерной с центрами ячеек $x_i = (i + 1/2)\Delta x$, $i = 0, M$, Δx – шаг сетки, $x_M = x_0 + D$. В самом деле, для фиксированного y , представим $\varphi'_i = \varphi'(x_i, y)$ и $n_{ioni} = n_{ioni}(x_i, y)$ в виде разложения по косинусам:

$$\begin{aligned} \varphi'(x_i, y) = & \\ = \frac{1}{M} \hat{\varphi}'_0(y) + \frac{2}{M} \sum_{m=1}^{M-1} \hat{\varphi}'_m(y) \cos \left[\frac{\pi m}{M} \left(i + \frac{1}{2} \right) \right], & \quad (8) \\ & i = 0, M - 1. \end{aligned}$$

Функция (8) автоматически удовлетворяет граничным условиям $\partial\varphi'/\partial x = 0$ при $x = 0$ и $x = D$. В аналогичный (8) ряд для n_{ioni} входят коэффициенты \hat{n}_{ion0} и \hat{n}_{ionm} . Раскроем в уравнении Пуассона (4) производную по x в конечно-разностном виде:

$$\frac{\varphi'_{i+1} - 2\varphi'_i + \varphi'_{i-1}}{(\Delta x)^2} + \frac{\partial^2 \varphi'_i}{\partial y^2} = -\frac{e}{\epsilon_0} n_{ioni}, \quad (9)$$

$$i = 1, M - 1,$$

и подставим в него разложения φ'_i и n_{ioni} по (8). Используя тождество:

$$\begin{aligned} \cos \left[\frac{\pi m}{M} \left(i + 1 + \frac{1}{2} \right) \right] - 2 \cos \left[\frac{\pi m}{M} \left(i + \frac{1}{2} \right) \right] + \\ + \cos \left[\frac{\pi m}{M} \left(i - \frac{1}{2} \right) \right] = -4 \sin^2 \left(\frac{\pi m}{2M} \right) \cos \left[\frac{\pi m}{M} \left(i + \frac{1}{2} \right) \right], \end{aligned}$$

выражение (9) преобразуем к виду:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \left(\frac{d^2 \hat{\varphi}'_0}{dy^2} + \frac{e}{\epsilon_0} \hat{n}_{ion0} \right) + \\ & + \frac{2}{M} \sum_{m=1}^{M-1} \left(-\lambda_m \hat{\varphi}'_m + \frac{d^2 \hat{\varphi}'_m}{dy^2} + \frac{e}{\epsilon_0} \hat{n}_{ionm} \right) \times \\ & \times \cos \left[\frac{\pi m}{M} \left(i + \frac{1}{2} \right) \right] = 0, \quad i = 0, M - 1, \end{aligned} \quad (10)$$

где введено обозначение $\lambda_m = \frac{4}{(\Delta x)^2} \sin^2 \left(\frac{\pi m}{2M} \right)$.

Из (10) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \hat{\varphi}'_0}{dy^2} = -\frac{e}{\epsilon_0} \hat{n}_{ion0}, \\ \frac{d^2 \hat{\varphi}'_m}{dy^2} - \lambda_m \hat{\varphi}'_m = -\frac{e}{\epsilon_0} \hat{n}_{ionm}, \quad m = 1, M - 1. \end{aligned} \quad (11)$$

Граничные условия для каждой гармоники (11) ставятся следующим образом. Если значение потенциала на границе приближенно известно, как в случае потенциала на стыке прямоугольного и квадратного блоков сетки, где оно берется с предыдущей “межблочной” итерации, то граничными условиями для (11) служат коэффициенты разложения этого потенциала в ряд (8). Они находятся по формулам:

$$\hat{\varphi}'_m = \sum_{i=0}^{M-1} \varphi'_i \cos \left[\frac{\pi m}{M} \left(i + \frac{1}{2} \right) \right], \quad m = 0, M - 1.$$

На земле, ясно, что все $\hat{\varphi}'_m = 0, m = 0, M - 1$.

Особого рассмотрения требует условие на верхней границе расчетной области $y = y_{\max}$. Оно получается из шивки решения уравнения Пуассона с решением уравнения Лапласа [37]. При $y \geq y_{\max}$ объемного заряда нет, $n_{ion} = 0$. Отсюда и из первого уравнения (11) находим зависимость от высоты компоненты $\hat{\varphi}'_0$ потенциала: $\hat{\varphi}'_0(y) = c_1 + c_2 y$, где $c_1, c_2 = \text{const}$. Но поскольку из электростатики известно, что бесконечный, однородный вдоль x , заряженный плоский слой над проводящей поверхностью не создает над собой вертикального электрического поля (см. также [24, 25]), имеем $c_2 = 0$, и находим граничное условие:

$d\hat{\varphi}'_0/dy = 0$. При $m = 1, M-1$, из (11) получим: $\hat{\varphi}'_m(y) = c_3 e^{-\sqrt{\lambda_m} y} + c_4 e^{\sqrt{\lambda_m} y}$. Потенциал не может экспоненциально стремиться к бесконечности при $y \rightarrow \infty$ в пустом пространстве, поэтому $c_4 = 0$ и $\hat{\varphi}'_m(y) = c_3 e^{-\sqrt{\lambda_m} y}$. Дифференцируя последнее равенство по y , получим граничное условие $d\hat{\varphi}'_m/dy = -\sqrt{\lambda_m} \hat{\varphi}'_m(y), m = 1, M-1$.

С описанными граничными условиями уравнения (11) приводятся к конечно-разностному виду на сетке вдоль оси y и решаются методом прогонки. Искомое решение затем получается из выражения (8):

$$\varphi'_{i,j} = \frac{1}{M} \hat{\varphi}'_{0,j} + \frac{2}{M} \sum_{m=1}^{M-1} \hat{\varphi}'_{m,j} \cos \left[\frac{\pi m}{M} \left(i + \frac{1}{2} \right) \right], \quad (12)$$

$$i = 0, M - 1.$$

где j – индекс ячеек сетки вдоль направления y . Переход от сеточных функций φ'_i к гармоникам $\hat{\varphi}'_m$ и обратно осуществлялся с помощью доступных стандартных программ дискретного преобразования Фурье.

В случае системы из восьми проводов, для расчета потенциала φ' на внешней границе, т.е. отрезках AB и BC на рис. 1б, исходим из теоремы Грина [36, 52, 53], примененной в четверти плоскости, $x > 0, y > 0$, где содержится половина от общего числа проводов. Пусть Ω – четверть плоскости с исключенными из нее четырьмя кругами проводов. Внешняя граница $\partial\Omega$ области Ω состоит из полупрямых $x = 0, y \geq 0$ и $y = 0, x \geq 0$ и дуги четверти окружности бесконечного радиуса, проведенной из начала координат.

Потенциал в произвольной точке с радиус-вектором \mathbf{r} , проведенным из начала координат O , дается формулой [36, 52]:

$$\begin{aligned} \varphi'(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d\Omega' + \\ + \epsilon_0 \oint_{\partial\Omega + \partial\Omega_1} \left(G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \varphi'}{\partial n'} - \varphi' \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \right) dl', \end{aligned} \quad (13)$$

где \mathbf{r}' – радиус-вектор точек, по которым ведется интегрирование; индекс $\partial\Omega + \partial\Omega_1$ у интеграла по замкнутому контуру означает, что интегрирование проводится по контуру $\partial\Omega$, и к этому интегралу добавляются интегралы по четырем окружностям $\partial\Omega_1$ проводов, лежащим в области $x \geq 0, y \geq 0$; $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ – функция Грина двумерного оператора Лапласа в области $x \geq 0, y \geq 0$; $\rho = en_{ion}$ – плотность объемного заряда; $d\Omega'$ – элемент площади Ω ; \mathbf{n}' – внешняя нормаль к границе $\partial\Omega + \partial\Omega_1$ области Ω , dl' – элемент длины контура этой границы.

Функция Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, т.е. потенциал, создаваемый в точке $\mathbf{r} = (x, y)$ нитью, проходящей через точку $\mathbf{r}' = (x', y')$ и несущей единичный погонный заряд, при условии симметрии на полупрямой $x' = 0$ $\partial G(\mathbf{r}, x', y')/\partial x' = 0$ и равенства $G(\mathbf{r}, x', 0) = 0$ на земле, выражается формулой [53]¹

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \ln \left\{ \frac{[(x-x')^2 + (y+y')^2][(x+x')^2 + (y+y')^2]}{[(x-x')^2 + (y-y')^2][(x+x')^2 + (y-y')^2]} \right\}. \quad (14)$$

Применим теперь формулу (13) для расчета искомого потенциала на отрезках на AB и BC . Поскольку мы считаем, что $\rho \equiv 0$ вне $OABC$ (см. рис. 1б), первый интеграл по Ω в (13) сводится к интегралу по $OABC$. Вычислим интеграл по контуру $\partial\Omega$. На полупрямой $x' = 0, y' \geq 0$ (ось симметрии) имеем, $\partial\phi'/\partial x'|_{x'=0} = \partial G(\mathbf{r}, x', y')/\partial x'|_{x'=0} = 0$, а на полупрямой $y' = 0, x' \geq 0$ (поверхность земли) – $\phi' = G(\mathbf{r}, x', 0) = 0$. Поэтому вклад этих участков в контурный интеграл дает нуль. В силу граничного условия на бесконечности $\phi' = 0$, полагаем, что интеграл по бесконечно удаленной дуге окружности также равен нулю². Таким образом, интеграл по контуру $\partial\Omega$ равен нулю, и выражение (13) дает

$$\phi'(\mathbf{r}) = \int_{OABC} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')dS' + \epsilon_0 \oint_{\partial\Omega_1} \left(G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial\phi'}{\partial n'} - \phi' \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \right) dl', \quad (15)$$

где dS' – элемент площади прямоугольника $OABC$ (рис. 1б), а $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ находится по (14).

¹ По сравнению с [53] мы изменили знак у функции Грина, чтобы привести формулу в соответствие с принятой в [52].

² Интересно отметить, что, как показано в [53], для стремления к нулю интеграла по удаленной окружности радиуса R потенциал ϕ' в бесконечности может даже возрастать с R , но не быстрее, чем R^α , где $\alpha < 1$.

Во второй интеграл в (15) входит поле на проводах $E_n = -\partial\phi'/\partial n = \partial\phi'/\partial n'$. Здесь \mathbf{n} – внешняя нормаль к проводу, антипараллельная внешней нормали \mathbf{n}' к границе $\partial\Omega_1$. После зажигания короны, согласно условию (5), поле на проводе равно порогу зажигания короны E_{cor} . Поэтому, если корона горит на всех проводах, граничный потенциал на отрезках AB и BC может быть найден из (15) путем простого однократного интегрирования.

В том случае, когда короны нет, поле на проводе $\partial\phi'/\partial n'$ неизвестно и само зависит от распределения потенциала во всем пространстве. Поэтому для расчета ϕ' используем итерации, как в [54]. Сначала, используя начальное приближение для E_n , по (15) вычисляется пробный потенциал на отрезках AB и BC . Этот потенциал служит приближенным граничным условием задачи на многоблочной сетке. После сходимости “межблочных” итераций, о которых говорилось выше, рассчитываются значения поля $\partial\phi'/\partial n'$ на проводах. Эти поля подставляются во второе слагаемое в (15), и в результате находится уточненное значение потенциала на отрезках AB и BC . С этими новыми значениями ϕ' начинается следующий цикл внешних итераций, и процедура повторяется до сходимости. К счастью, этот трудоемкий итерационный процесс нужен только на первом временном шаге. В дальнейшем начальное приближение для потенциала берется с предыдущего шага, что резко снижает число и трудоемкость всего итерационного процесса. Заметим, что интегралы от обоих членов в (15) численно находятся нами по правилу средней точки.

Отметим, что в статье [54], где ищется решение трехмерного уравнения Пуассона для поля, создаваемого в свободном пространстве пространственным зарядом и зарядами проводников, интеграл, аналогичный нашему первому интегралу в правой части (15), вычисляется не путем суммирования, как у нас. Этот интеграл, трудоемкий для вычисления в трехмерном случае, выражается через решение вспомогательной задачи для уравнения Пуассона, как это было впервые предложено в [55, 56] для расчета потенциала, создаваемого пространственным зарядом. Если имеется в распоряжении “быстрый” метод решения уравнения Пуассона, то удастся значительно сэкономить вычислительные ресурсы. Такой оптимизацией алгоритма мы здесь не занимаемся.

На каждом шаге по времени, после того как распределение потенциала и поля в расчетной области найдены, рассчитывается плотность коронного тока j на проводе. Плотность заряда элемента dl провода равна $\sigma = \epsilon_0 E_n$, а плотность

тока $-j = \epsilon_0 dE_n/dt$. Раскрывая это выражение на одном временном шаге Δt , получим:

$$j = \epsilon_0 \left[E_n(t^p + \Delta t) - E_n(t^p) \right] / \Delta t, \quad (16)$$

где $E_n(t^p + \Delta t)$, $E_n(t^p)$ – локальные поля на проводе в текущий и предыдущий моменты времени. В момент времени, близкий к моменту зажигания короны, $E_n(t^p + \Delta t) > E_{cor}$, а $E_n(t^p) < E_{cor}$, так что плотность тока короны (16) пропорциональна скорости роста грозового поля у провода. В последующие моменты времени, поле $E_n(t^p + \Delta t)$ рассчитываем численно, а в качестве $E_n(t^p)$ в (16) подставляем E_{cor} . Тем самым на каждом шаге Δt в промежуток мы внедряем заряд, который компенсирует превышение $E_n(t^p + \Delta t)$ над E_{cor} . Поскольку условие (5) игнорирует малые неоднородности поля у провода, в формулу (16) в качестве $E_n(t^p + \Delta t)$ мы подставляли не локальное, а усредненное по окружности провода значение поля на проводе. Это позволяет избежать нефизических выбросов в распределении плотности ионов вблизи провода. Полный ток с каждого провода получается умножением (16) на длину окружности провода $2\pi r_0$. Отметим, что в случае системы из восьми проводов при расчете потенциала ϕ' по формуле (15) в качестве поля на коронирующем проводе подставляется локальное поле $E_n(t^p + \Delta t)$, а не E_{cor} .

После расчета коронного тока на данном временном шаге решалось уравнение непрерывности для ионов (3). Также как и уравнение Пуассона, оно приводилось к конечно-разностному виду методом конечного объема. Использовалась смешанная неявная схема первого-второго порядка точности по пространству [48, 49] с коррекцией потоков [26, 49]. Для интегрирования по времени использовались схема Эйлера, либо Кранка–Николсона первого и второго порядка точности, соответственно. Тестовые расчеты не показали заметной разницы в результатах по обеим схемам, поэтому предпочтение было отдано более простой схеме Эйлера.

Поток ионов, втекающий в первые ячейки сетки, граничащие с проводом, одинаков для всех ячеек и равен j/e , где j дается формулой (16). Этот поток служит граничным условием для ионного уравнения (3). При решении ионного уравнения на многооблочной сетке, на стыке блоков сетки закон сохранения ионного потока выполнялся. После расчета распределения ионов, решение системы (3)–(5) на данном временном шаге считалось завершенным. Принятый временной шаг составлял $\Delta t = 10^{-2} - 10^{-1}$ с.

4. ЗАЖИГАНИЕ КОРОНЫ ОТ МНОГОЭЛЕКТРОДНОЙ СИСТЕМЫ ПРОВОДОВ

Грозовое поле E_{0cor} достаточное для возбуждения короны от проводов, в принципе, находится в двумерной программе, путем сравнения рассчитанного поля вблизи проводов $E(r_0)$ с порогом возбуждения короны E_{cor} (6). Однако, для удобства анализа, ниже рассчитаем E_{0cor} для двух рассматриваемых многоэлектродных систем также аналитическими методами, пользуясь тем, что радиусы проводов r_0 очень малы по сравнению с расстоянием между проводами D и высотой их подвеса h , $r_0 \ll D$ и $r_0 \ll h$. В таком случае, при расчете потенциала данного провода можно считать, что заряды соседних проводов и отражений всех проводов в земле сосредоточены в их центрах.

4.1. Периодическая бесконечная система проводов

Исходная формула для потенциала провода, создаваемого собственным зарядом провода и зарядами всех остальных проводов бесконечной системы, имеет вид:

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{dz}{\sqrt{z^2 + r_0^2}} - \frac{dz}{\sqrt{z^2 + (2h)^2}} \right) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \times \times 2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{dz}{\sqrt{z^2 + (kD)^2}} - \frac{dz}{\sqrt{z^2 + (2h)^2 + (kD)^2}} \right), \quad (17)$$

где $q = 2\pi r_0 \epsilon_0 E(r_0)$ – погонный заряд провода, $E(r_0)$ – напряженность поля на его поверхности; z – координата вдоль провода, k – номер провода, отсчитываемый от рассматриваемого. Первый интеграл в (17) описывает вклад в потенциал от собственного заряда провода, а второе слагаемое – от всех остальных проводов бесконечной системы с двух сторон.

Вычисляя интегралы в (17), получаем

$$U = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left(\ln \frac{2h}{r_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left[1 + \left(\frac{2h}{kD} \right)^2 \right] \right) \quad (18)$$

Бесконечный ряд в (18) сводится к бесконечному произведению под знаком логарифма. Применяя к произведению формулу Эйлера [57]

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{x}{k\pi} \right)^2 \right] = \frac{\text{sh } x}{x}, \text{ найдем, что}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln \left[1 + \left(\frac{2h}{kD} \right)^2 \right] = \ln \prod_{k=1}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{2h}{kD} \right)^2 \right] = = \ln \left[\frac{\text{sh}(\pi 2h/D)}{\pi 2h/D} \right] \quad (19)$$

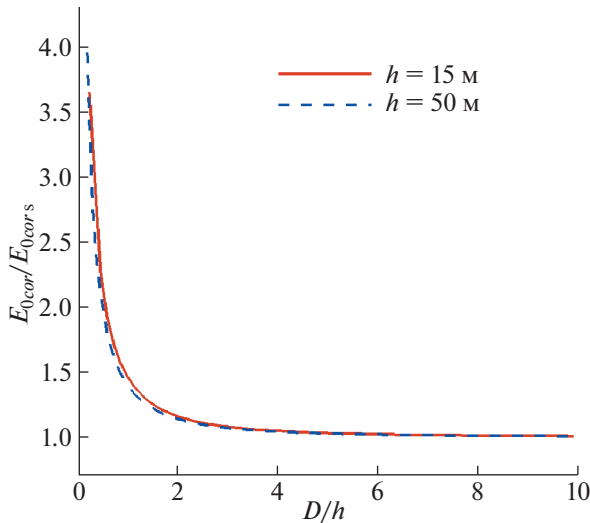


Рис. 3. Пороговое грозовое поле E_{0cor} для зажигания короны от провода бесконечной периодической системы заземленных проводов, нормированное на порог зажигания короны от одиночного провода E_{0cor_s} , в зависимости от отношения расстояния между соседними проводами к высоте их подвеса над землей D/h . Радиусы проводов $r_0 = 1$ см. $E_{0cor_s} = 216.4$ и 74.7 В/см при $h = 15$ и 50 м, соответственно.

Подставляя (19) в (18) и переходя от погонного заряда q к полю $E(r_0)$, получим:

$$U = E(r_0)r_0 \left(\ln \frac{2h}{r_0} + \ln \left[\frac{\text{sh}(\pi 2h/D)}{\pi 2h/D} \right] \right) \quad (20)$$

Отсюда пороговое грозовое поле E_{0cor} для зажигания короны от бесконечной системы проводов равно:

$$E_{0cor}h = E_{cor}(r_0)r_0 \left(\ln \frac{2h}{r_0} + \ln \left[\frac{\text{sh}(\pi 2h/D)}{\pi 2h/D} \right] \right), \quad (21)$$

где $E_{cor}(r_0)$ дается выражением (6).

Величины E_{0cor} , рассчитанные по формуле (21) и нормированные на пороговое грозовое поле для зажигания короны от одиночного провода E_{0cor_s} , для двух высот подвеса проводов h даны на рис. 3. Видно, что для данной высоты подвеса h при уменьшении расстояния между проводами D пороговое поле E_{0cor} резко возрастает.

4.2. Плоскопараллельная система из восьми одинаковых проводов

Поскольку теперь положение каждого провода по отношению к другим различно, поля на проводах $E(r_0)$, индуцированные зарядами проводов и их отражениями в земле, не одинаковы. Ясно, что при заданном потенциале провода заряды и поля у срединных проводов меньше, чем у крайних,

т.к. срединные провода подвергается действию ближних зарядов с двух сторон, а крайние — только с одной. Поэтому за порог зажигания короны в такой системе следует принять порог возбуждения короны от крайних проводов.

Составим систему для погонных зарядов проводов q_k . Потенциал ϕ' в центре каждого провода, $\phi' = E_0(t)h \equiv U$ складывается из потенциала, создаваемого собственным зарядом провода и зарядами соседних проводов. Например, для крайнего левого провода системы с зарядом q_1 , расположенного в точке с координатой $x = -7/2D$ (рис. 1б), по аналогии с (17) мы находим

$$U = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{dz}{\sqrt{z^2 + r_0^2}} - \frac{dz}{\sqrt{z^2 + (2h)^2}} \right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=2}^8 q_k \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{dz}{\sqrt{z^2 + [(k-1)D]^2}} - \frac{dz}{\sqrt{z^2 + (2h)^2 + [(k-1)D]^2}} \right), \quad (22)$$

где z — координата вдоль проводов, k — номер провода с зарядом q_k . Вычисляя интегралы в (22), получаем:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ q_1 \ln \left(\frac{2h}{r_0} \right)^2 + \sum_{k=2}^8 q_k \ln \left[1 + \left(\frac{2h}{kD} \right)^2 \right] \right\} \quad (23)$$

Принимая в качестве избранного провода поочередно все провода системы, и записывая выражения для потенциала, аналогичные (23), получим линейную систему уравнений для зарядов q_k . Поскольку заряды на проводах, расположенных симметрично относительно прямой $x = 0$ одинаковы, число неизвестных зарядов равно четырем. Решая систему для q_k при заданном $E_0(t)$ находим такое внешнее поле E_{0cor} , при котором поле на крайних проводах $E_1(r_0) = q_1/(2\pi\epsilon_0 r_0)$ (либо E_8) достигает порога (6). Величина E_{0cor} , нормированная на порог зажигания короны от одиночного провода, приведена на рис. 4.

5. РАСЧЕТ ПОТЕНЦИАЛА, ИНДУЦИРОВАННОГО ЗАРЯДАМИ ПРОВОДОВ В ПУСТОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Простой проверкой численного метода решения уравнения электростатики в свободном пространстве, является расчет распределения поля, создаваемого зарядами системы проводов в отсутствие короны и сравнение с аналитическим решением, которое можно легко получить, если $D \gg r_0$ и $h \gg r_0$, и которое справедливо на расстояниях от проводов $r_1 \gg r_0$. Для периодической системы проводов эта задача полностью эквива-

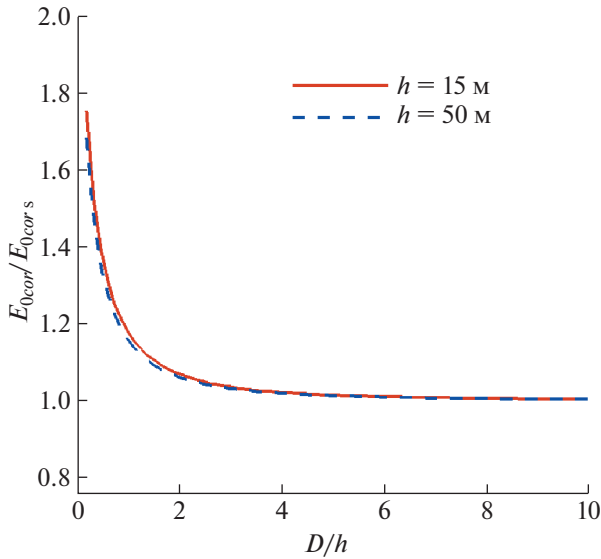


Рис. 4. Пороговое грозовое поле E_{0cor} для зажигания короны от крайнего провода плоскопараллельной системы, состоящей из восьми заземленных проводов, нормированное на порог зажигания короны от одиночного провода E_{0cor_s} в зависимости от отношения расстояния между соседними проводами D к высоте их подвеса h для двух высот подвеса проводов. Радиус проводов $r_0 = 1$ см. $E_{0cor_s} = 216.4$ и 74.7 В/см при $h = 15$ и 50 м, соответственно.

лентна давно вошедшей в учебники [58, 59] задаче о поле бесконечной периодической плоскопараллельной решетки одинаковых проводов, которая имеет потенциал U и находится на некотором расстоянии от параллельной ей заземленной плоскости.

При аналитическом расчете потенциала в произвольной точке плоскости $\varphi'(x, y)$ будем считать, что погонный заряд каждого провода q и его отражения в земле сосредоточен в его центре. Тогда в случае бесконечной периодической системы проводов над проводящей плоскостью, суммируя вклады в потенциал $\varphi'(x, y)$ от каждого провода и от всех отражений в земле, получим (см. Приложение)

$$\varphi'(x, y) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \times \ln \left\{ \frac{\text{ch} [2\pi(h + y)/D] + \cos(2\pi x/D)}{\text{ch} [2\pi(h - y)/D] + \cos(2\pi x/D)} \right\}, \quad (24)$$

$$q = 2\pi r_0 \epsilon_0 E(r_0) = \frac{2\pi\epsilon_0 U}{\ln \left[\frac{\text{sh}(\pi 2h/D)}{\pi r_0/D} \right]}$$

Перепишем это выражение в виде ряда. Пусть $y > h$. Вынося за скобки под знаком логарифма $\exp[2\pi(y + h)/D] > 1$ в числителе и $\exp[2\pi(y - h)/D] >$

> 1 в знаменателе и преобразуя логарифм отношения этих экспонент, получим:

$$\varphi'(x, y) = \frac{qh}{\epsilon_0 D} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \ln \left\{ \frac{1 + 2a_1 \cos(2\pi x/D) + a_1^2}{1 + 2a_2 \cos(2\pi x/D) + a_2^2} \right\}, \quad (25)$$

где $a_1 = \exp[-2\pi(y + h)/D] < 1$, $a_2 = \exp[-2\pi(y - h)/D] < 1$, если $y > h$.

Пользуясь известной формулой [57]:

$$\ln(1 + 2a \cos \theta + a^2) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} a^m}{m} \cos(m\theta), \quad (26)$$

$$|a| < 1,$$

из (25) получаем

$$\varphi'(x, y) = \frac{qh}{\epsilon_0 D} + \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \left\{ \exp \left[-\frac{2\pi m(y + h)}{D} \right] - \exp \left[-\frac{2\pi m(y - h)}{D} \right] \right\} \cos \left(\frac{2\pi m x}{D} \right), \quad y > h \quad (27)$$

Из выражения (27) видно, что над проводами, т.е. при $y \gg h$, потенциал φ' быстро стремится к постоянной величине, $\varphi'(x, y) = qh/(\epsilon_0 D)$. Поэтому при удалении от проводов вверх на расстояния в несколько длин $\Delta y \approx D/(2\pi)$, электрическое поле $E' = -\nabla\varphi'$, индуцированное зарядами системы проводов, практически исчезает.

При $y < h$ представим (24) в виде аналогичном (25). В (24) под знаком логарифма в числителе снова выносим за скобки множитель $\exp[2\pi(y + h)/D] > 1$, тогда как в знаменателе теперь выделяем множитель $\exp[2\pi(h - y)/D] > 1$. Преобразуя логарифм отношения последних экспонент, перепишем (24) в виде

$$\varphi'(x, y) = \frac{qy}{\epsilon_0 D} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \ln \left\{ \frac{1 + 2a_1 \cos(2\pi x/D) + a_1^2}{1 + 2\tilde{a}_2 \cos(2\pi x/D) + \tilde{a}_2^2} \right\}, \quad (28)$$

где $a_1 = \exp[-2\pi(y + h)/D] < 1$, $\tilde{a}_2 = \exp[2\pi(y - h)/D] < 1$, если $y < h$. С помощью (26) из (28) находим разложение потенциала в ряд

$$\varphi'(x, y) = \frac{qy}{\epsilon_0 D} + \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \left\{ \exp \left[-\frac{2\pi m(y + h)}{D} \right] - \exp \left[\frac{2\pi m(y - h)}{D} \right] \right\} \cos \left(\frac{2\pi m x}{D} \right), \quad y < h \quad (29)$$

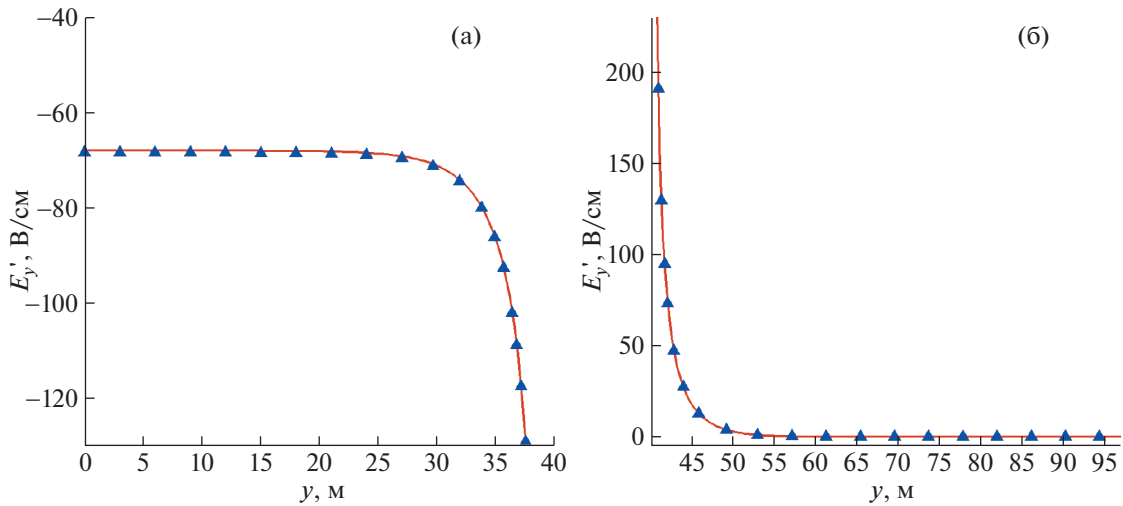


Рис. 5. Распределение поля E_y' , индуцированного периодической системой заземленных проводов, подвешенных над землей, вдоль вертикальной прямой, проходящей через центр провода. (а) под проводом, (б) над проводом. Непрерывная кривая – двумерное моделирование, \blacktriangle – расчет по формуле (31), $h = 40$ м, $D = 20$ м. Провода помещены во внешнее грозовое поле $E_0 = 100$ В/см, которое ниже порога зажигания короны $E_{0cor} = 185.8$ В/см.

Из (29) следует, что если высота подвеса проводов достаточно велика, $h \gg D$, то при смещении от проводов вертикально вниз на расстояния в несколько длин $D/(2\pi)$, потенциал ϕ' фактически перестает зависеть от x и растет линейно с высотой y . Это соответствует однородному, направленному вниз электрическому полю, $E_y' = -q/(\epsilon_0 D)$.

В общем случае для компонент электрического поля $\mathbf{E}' = -\nabla\phi'$ из (24) получаем

$$E_x' = \frac{q}{2\epsilon_0 D} \left\{ \frac{\sin(2\pi x/D)}{\text{ch}[2\pi(h+y)/D] + \cos(2\pi x/D)} - \frac{\sin(2\pi x/D)}{\text{ch}[2\pi(h-y)/D] + \cos(2\pi x/D)} \right\} \quad (30)$$

$$E_y' = -\frac{q}{2\epsilon_0 D} \left\{ \frac{\text{sh}[2\pi(h+y)/D]}{\text{ch}[2\pi(h+y)/D] + \cos(2\pi x/D)} + \frac{\text{sh}[2\pi(h-y)/D]}{\text{ch}[2\pi(h-y)/D] + \cos(2\pi x/D)} \right\} \quad (31)$$

Сравнение полей E_y' , полученных аналитическим расчетом и двумерным численным расчетом по методике раздела 3, дано на рис. 5 для расстояний от проводов больше 1 м. Видно, что согласие результатов очень хорошее. Также хорошо согласуются и соответствующие распределения потенциала $\phi'(x, y)$. Анализ показывает, что в масштабе рис. 6, где построены эквипотенциальные кривые, рассчитанные численно, различие с аналитическим выражением (24) заметить трудно.

В случае системы, состоящей из восьми параллельных заземленных проводов, подвешенных над землей, выражение для потенциала $\phi'(x, y)$, индуцированного зарядами проводов и их отражений в земле, имеет вид

$$\phi'(x, y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^8 q_k \ln \left[\frac{(x - x_k)^2 + (y + h)^2}{(x - x_k)^2 + (y - h)^2} \right], \quad (32)$$

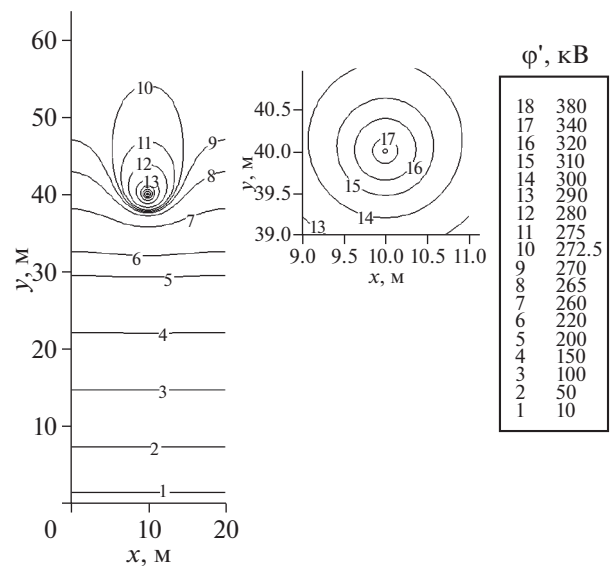


Рис. 6. Линии равного потенциала ϕ' , индуцированного периодической системой заземленных проводов для условий рис. 5.

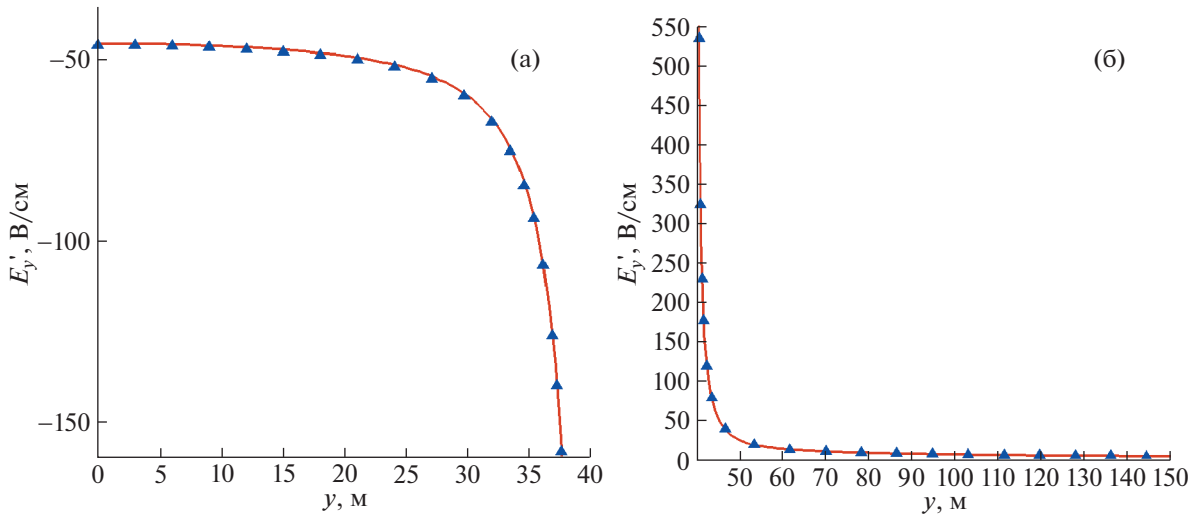


Рис. 7. Зависимость от высоты вертикального поля E'_y , индуцированного зарядами плоскопараллельной системы восьми одинаковых заземленных проводов, подвешенных над землей, вдоль прямой, проходящей через центр крайнего провода с координатами $(x, y) = (7/2D, h)$: (а) под проводом, (б) над проводом. Непрерывная кривая – двумерное численное решение, \blacktriangle – расчет по формуле (34). $D = 20$ м, $h = 40$ м, внешнее грозное поле $E_0 = 100$ В/см. Порог зажигания короны от крайнего провода системы $E_{0\text{cor}} = 122.1$ В/см.

где $x_k = -7D/2 + (k - 1)D$, $y_k = h$, $k = 1, \dots, 8$, – координаты центров проводов, несущих погонные заряды $q_k = 2\pi r_0 \epsilon_0 E_k(r_0)$, которые находятся, как описано в предыдущем разделе.

Компоненты электрического поля $\mathbf{E}' = -\nabla\phi'$ от названной системы проводов даются формулами:

$$E'_x = \frac{2}{\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^8 \frac{q_k y h}{(x - x_k)^3} \times \frac{1}{[1 + (y - h)^2 / (x - x_k)^2][1 + (y + h)^2 / (x - x_k)^2]} \quad (33)$$

$$E'_y = -\frac{1}{\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^8 \frac{q_k h}{(x - x_k)^2} \times \frac{1}{[1 + (h^2 - y^2) / (x - x_k)^2][1 + (y - h)^2 / (x - x_k)^2][1 + (y + h)^2 / (x - x_k)^2]} \quad (34)$$

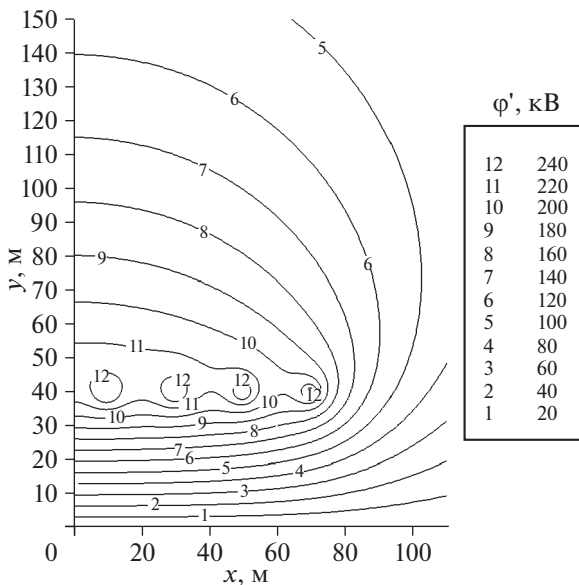


Рис. 8. Линии равного потенциала ϕ' , индуцированного зарядами плоскопараллельной системы из восьми одинаковых заземленных проводов, подвешенных над землей и помещенных в грозное поле $E_0 = 100$ В/см. Остальные параметры – те же, что на рис. 7.

Поле, полученное двумерным расчетом, хорошо согласуется с формулой (34) (см. рис. 7). Распределение потенциала $\phi'(x, y)$, рассчитанное по двумерной программе, также очень близко $\phi'(x, y)$ по формуле (32) во всем пространстве за исключением малой области вблизи проводов. Опуская детали этого сравнения, на рис. 8 мы приводим распределение потенциала, полученное двумерным расчетом.

6. РЕЗУЛЬТАТЫ ДВУМЕРНЫХ РАСЧЕТОВ НЕСТАЦИОНАРНОЙ КОРОНЫ

6.1. Бесконечная периодическая система проводов

Уравнения (3) и (4) численно решались методом, описанным в разд. 3. На рис. 9 представлены

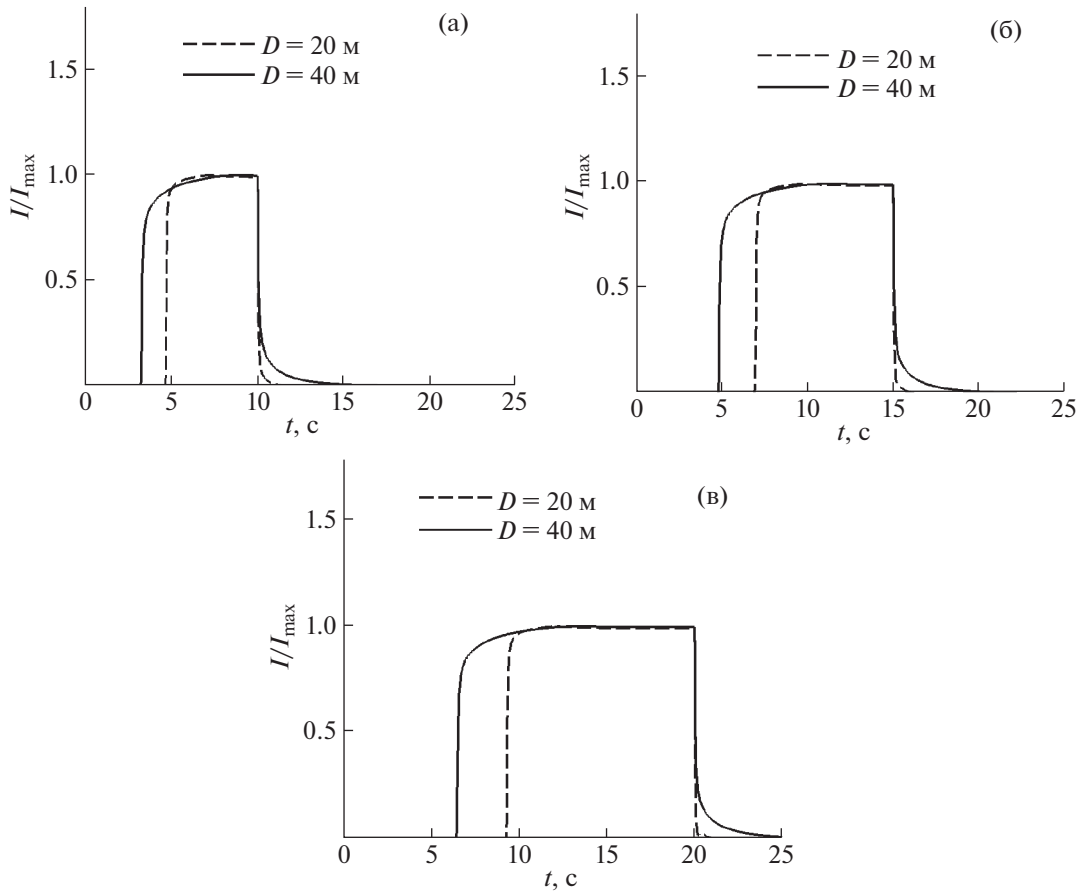


Рис. 9. Зависимость от времени нормированного тока короны $I(t)/I_{\max}$ от бесконечной периодической системы заземленных проводов, подвешенных на высоте $h = 40$ м, для различных характерных времен нарастания грозового поля τ в линейном законе (1) с $E_{0\max} = 400$ В/см и для двух расстояний между соседними проводами D . (а) $\tau = 10$ с, $I_{\max} = 0.71$ $\mu\text{А/м}$ при $D = 20$ м, $I_{\max} = 1.417$ $\mu\text{А/м}$ при $D = 40$ м; (б) $\tau = 15$ с, $I_{\max} = 0.473$ $\mu\text{А/м}$ при $D = 20$ м, $I_{\max} = 0.944$ $\mu\text{А/м}$ при $D = 40$ м; (в) $\tau = 20$ с, $I_{\max} = 0.355$ $\mu\text{А/м}$ при $D = 20$ м, $I_{\max} = 0.707$ $\mu\text{А/м}$ при $D = 40$ м.

рассчитанные зависимости тока короны на единицу длины провода, нормированные на максимальное значение тока в каждом расчете. Для удобства анализа результатов принимается “линейный” закон роста грозового поля (1). В расчетах варьировались два входных параметра: расстояние между проводами D и постоянная времени τ в формуле (1). Рис. 9а построен для самого малого из принятых τ , $\tau = 10$ с; рис. 9в – для самого большого, $\tau = 20$ с. В системе проводов, в которой соседние провода расположены ближе друг к другу, пороговое поле $E_{0\text{cor}}$ выше (рис. 3), поэтому для любого τ при $D = 20$ м корона зажигается несколько позднее, чем при $D = 40$ м.

После зажигания короны ток на единицу длины провода сначала растет, а потом выходит на насыщение до тех пор, пока рост грозового поля не прекращается. Рассчитанная величина погон-

ного коронного тока на плато хорошо согласуется с теоретической формулой

$$I = jD, \quad j = \epsilon_0 \frac{dE_0(t)}{dt}, \quad (35)$$

где j – предельная плотность коронного тока от идеальной плоской поверхности, эмитирующей ионы. Формула для j выведена в [15] (см. также [24, 25]). Например, при $E_{0\max} = 400$ В/см, $\tau = 15$ с, $D = 20$ м, ток по формуле (35) равен $I = 0.471$ $\mu\text{А/м}$, тогда как в двумерном расчете получилось 0.473 $\mu\text{А/м}$.

Как видно из рис. 9, время выхода коронного тока на насыщение, отсчитанное от момента зажигания короны, при $D = 20$ м меньше, чем при $D = 40$ м. Когда грозовое поле перестает расти, ток коронного разряда резко падает и быстро стремится к нулю (см. рис. 9). Согласно формуле (35), для плоского ионного слоя ток должен был бы прекратиться мгновенно. Как видно из рис. 9,

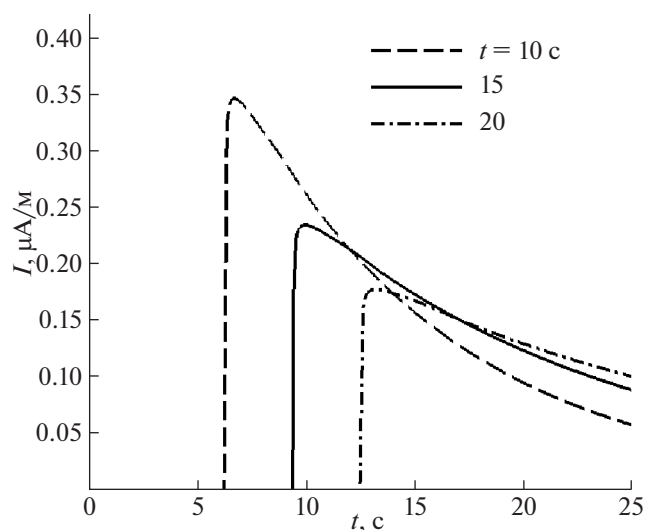


Рис. 10. Зависимость от времени тока короны от бесконечной периодической системы заземленных проводов для различных характерных времен нарастания грозового поля τ в релаксационном законе (2) с $E_{0\max} = 400$ В/см, $D = 20$ м. Высота подвеса проводов $h = 40$ м.

при меньшем расстоянии между проводами, ток с проводов спадает быстрее. Аналогичные эффекты проявились в 1D-модели короны от сферических проводников [24].

Эволюция во времени тока короны от бесконечной периодической системы проводов в случае, когда грозовое поле нарастает по релаксационному закону (2) дана на рис. 10. Рассчитанное значение тока через некоторое время после зажигания короны также хорошо согласуется с формулой (35) для тока плоского слоя. Например, при $\tau = 10$ с в момент $t = 15$ с ток короны, согласно численному расчету равный $I = 0.158$ $\mu\text{A}/\text{м}$, практически не отличается от тока по (35).

На рис. 11 показаны двумерные распределения плотности ионов n_{ion} около проводов в заданный момент времени $t = 15$ с для двух случаев: при расчете рис. 11а задавалось, что грозовое поле $E_0(t)$ растет по “линейному” закону (1), а при расчете рис. 11б – по релаксационному (2) и прочих равных условиях. Эволюции во времени погонного тока короны для условий рис. 11(а) и рис. 11б показаны пунктирными кривыми на рис. 9а и на рис. 10, соответственно.

Когда грозовое поле нарастает по “линейному” закону, к моменту $t = 15$ с ток короны уже прекратился. С этим связан резкий спад концентрации ионов вблизи провода, который можно видеть из рис. 11а.

Интересно отметить, что рассчитанные на рис. 11 распределения $n_{\text{ion}}(x, y)$ для обоих законов нарастания поля двумерны: на данной высоте у концентрация ионов зависит от координаты x ,

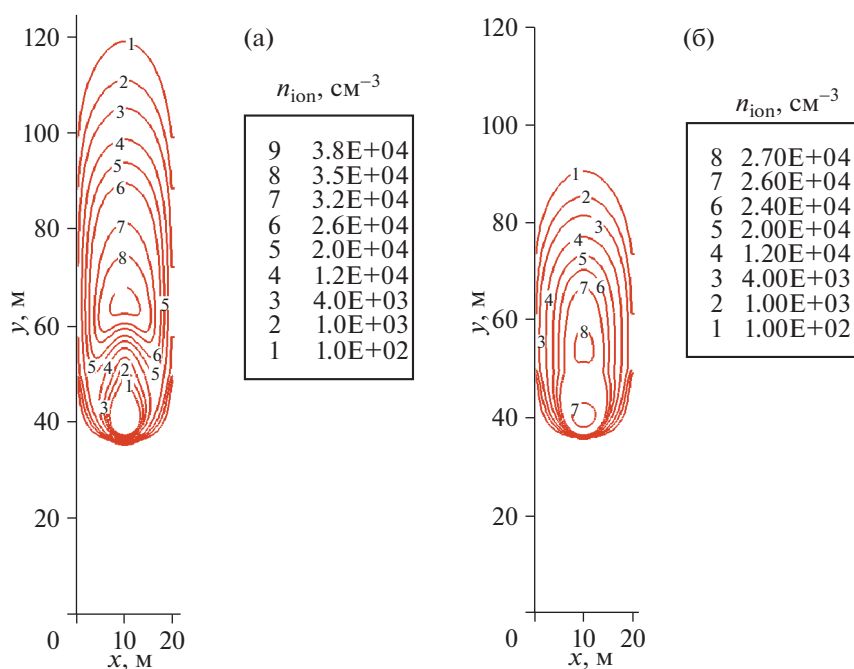


Рис. 11. Линии равных плотностей ионов, внедренных коронным разрядом от бесконечной периодической системы проводов в момент времени $t = 15$ с от начала роста грозового поля (а) по линейному закону (1), (б) по релаксационному закону (2). Высота подвеса проводов $h = 40$ м, расстояние между соседними проводами $D = 20$ м, $E_{0\max} = 400$ В/см, $\tau = 10$ с.

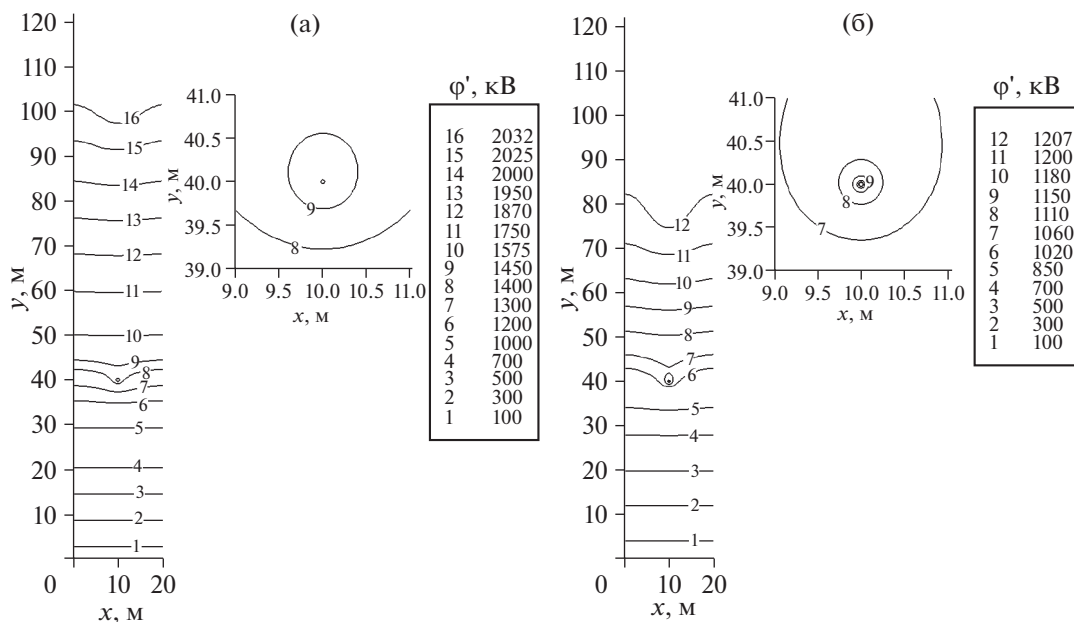


Рис. 12. Линии равного потенциала ϕ' , индуцированного объемным зарядом короны и зарядами бесконечной периодической системы проводов. Рисунки (а) и (б) сделаны для условий рис. 11 (а) и (б), соответственно.

будучи симметричной относительно вертикальной плоскости $x = D/2$, проходящей через центр провода. Такая картина отличается от однородного вдоль x распределения, которое получилось бы в случае короны от идеальной плоской поверхности, эмитирующей ионы.

С другой стороны, в двумерном ионном облаке электрическое поле, созданное объемным зарядом, перераспределяется так, что его горизонтальная составляющая становится малой. Это видно из рассчитанного двумерного распределения потенциала ϕ' (см. рис. 12). На высотах 50–70 м, где поле зарядов проводов уже очень мало, эквипотенциали идут практически параллельно оси x , а электрическое поле, созданное объемным зарядом, направлено вниз. Под действием суммарного поля, грозового и поля объемного заряда, заряды движутся в основном вверх. Вблизи верхней границы ионного облака появляются небольшие горизонтальные составляющие поля объемного заряда.

Поскольку вопрос о динамике электрического поля в разных точках важен, ниже мы приводим рассчитанные зависимости от времени суммарного вертикального электрического поля, складывающегося из грозового поля E_0 и поля E'_y , индуцированного объемным зарядом и зарядами проводов, на разных высотах над проводами (рис. 13).

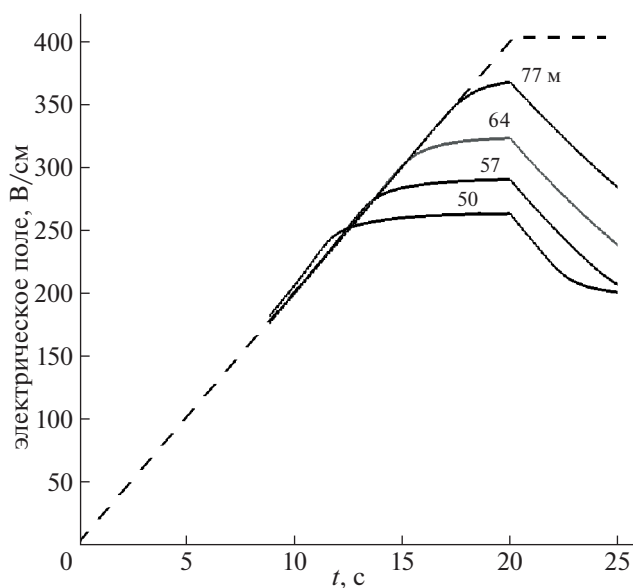


Рис. 13. Зависимость от времени суммарного вертикального электрического поля на разных высотах, указанных на рисунке, над проводом коронирующей бесконечной периодической системы проводов. Высота подвеса проводов $h = 40$ м, расстояние между проводами $D = 20$ м. Порог зажигания короны в этих условиях $E_{0\text{кор}} = 185.8$ В/см. Пунктирной кривой показана эволюция внешнего грозового поля: оно растет линейно от нуля до $E_{0\text{max}} = 400$ В/см в течение $\tau = 20$ с, а затем поддерживается постоянным.

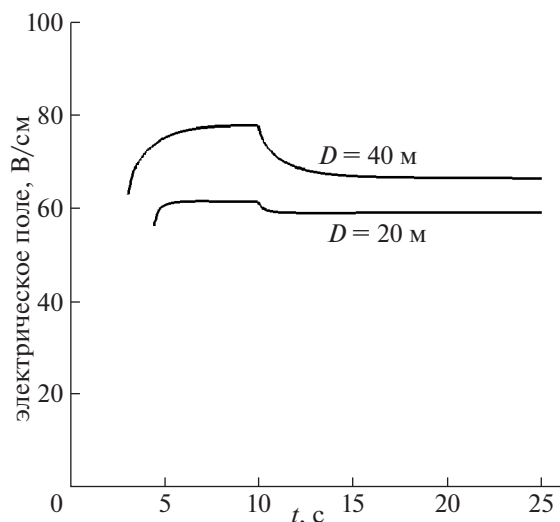


Рис. 14. Зависимость от времени электрического поля на земле под проводом бесконечной периодической системы коронирующих заземленных проводов для двух расстояний D между соседними проводами. Грозовое поле растет по линейному закону (1) с $E_{0\max} = 400$ В/см и $\tau = 10$ с; $h = 40$ м.

Как видно из рис. 13, суммарное поле на данной высоте сначала практически совпадает с внешним полем E_0 и растет линейно, затем его рост резко замедляется и оно стремится к постоянной величине, зависящей от высоты. После того как внешнее грозовое поле перестает расти, суммарное поле на данной высоте начинает падать. Такое поведение поля качественно согласуется как с теорией, так и с расчетами [25]. Отметим, что, как показано в [25], в случае идеальной плоской поверхности, эмитирующей ионы, в поле E_0 , растущем линейно, электрическое поле над коронирующей плоскостью становится постоянным во времени, как только плоский ионный фронт достигает высоты рассматриваемого места. В нашем случае ионный фронт не является плоским. У нас фронт также размыт счетной диффузией. Поэтому мы не приводим здесь сравнения результатов с теорией.

Суммарное электрическое поле на земле под проводом коронирующей бесконечной периодической системы дано на рис. 14. При линейном законе роста внешнего поля E_0 , поле на земле после зажигания короны немного возрастает, выходит на насыщение, а после прекращения роста E_0 слегка спадает. Когда соседние провода системы находились на расстоянии $D = 20$ м, вариации поля на земле за все время расчета короны при выбранных входных параметрах не превышали 10%.

6.2. Плоскопараллельная система из восьми одинаковых проводов

Приведем характеристики коронного разряда для системы из восьми заземленных проводов. На рис. 15 дан приведенный ток $I(t)/I_{\max}$ на единицу длины провода для четырех пар проводов, расположенных симметрично относительно срединной плоскости $x = 0$, где I_{\max} — это максимальный достигнутый ток в каждом расчете. Из рис. 15 видно, что крайние провода системы, расположенные в точках $x = \pm 7D/2$, коронируют более интенсивно. Динамика тока от остальных трех пар проводов приблизительно одинакова. Тем не менее, ток от проводов, ближайших к центру системы, получился меньше, чем от проводов в точках $x = \pm 5D/2$: на 17% и 11% при $D = 20$ и 40 м, соответственно. Масштабом плотности тока короны служит величина $j = I_{\max}/D$. Для проводов, расположенных в точках $x = \pm D/2$, плотность тока равна $j = 0.047$ $\mu\text{A}/\text{m}^2$ и $j = 0.043$ $\mu\text{A}/\text{m}^2$ при $D = 20$ и 40 м, соответственно. В рассматриваемых условиях эти величины на 34% и 22% выше, чем предельная плотность тока $j = 0.035$ $\mu\text{A}/\text{m}^2$ (35) от идеальной плоской поверхности, эмитирующей ионы. Поэтому следует ожидать, что концентрация ионов, генерируемых срединными проводами, будет выше той, которая получилась при моделировании короны от бесконечной системы проводов, при прочих равных условиях.

На рис. 16 дано распределение плотности ионов n_{ion} , внедренных в окружающее пространство коронным разрядом от системы из восьми заземленных проводов. Грозовое поле, расстояние между проводами, и момент окончания расчета были выбраны такими же, что и на рис. 1а, где рассчитывалась периодическая система проводов. Сравнивая плотность ионов над тремя проводами, ближайшими к срединной плоскости $x = 0$ на рис. 16, и величину n_{ion} на рис. 1а, мы видим, что на рис. 16 плотность ионов на данной высоте на десятки процентов выше. При этом ионное облако более вытянуто вверх (на 10–20 м) по сравнению с рис. 1а.

Более существенно отличается распределение плотности ионов n_{ion} у крайнего провода. Из рис. 16 видно, что плотность ионов над крайним проводом оказывается в несколько раз выше по сравнению с величиной n_{ion} над остальными проводами. Из-за краевых эффектов заряды в ионном облаке у крайнего провода, двигаясь под действием грозового поля E_0 вверх, также смещаются вправо.

На рис. 17 приведены линии потенциала ϕ' , индуцированного объемным зарядом ионов и зарядами проводов. Рисунок 17 сделан для тех же условий и того же момента времени, что рис. 16. Видно, что на высотах 50–70 м над первой, вто-

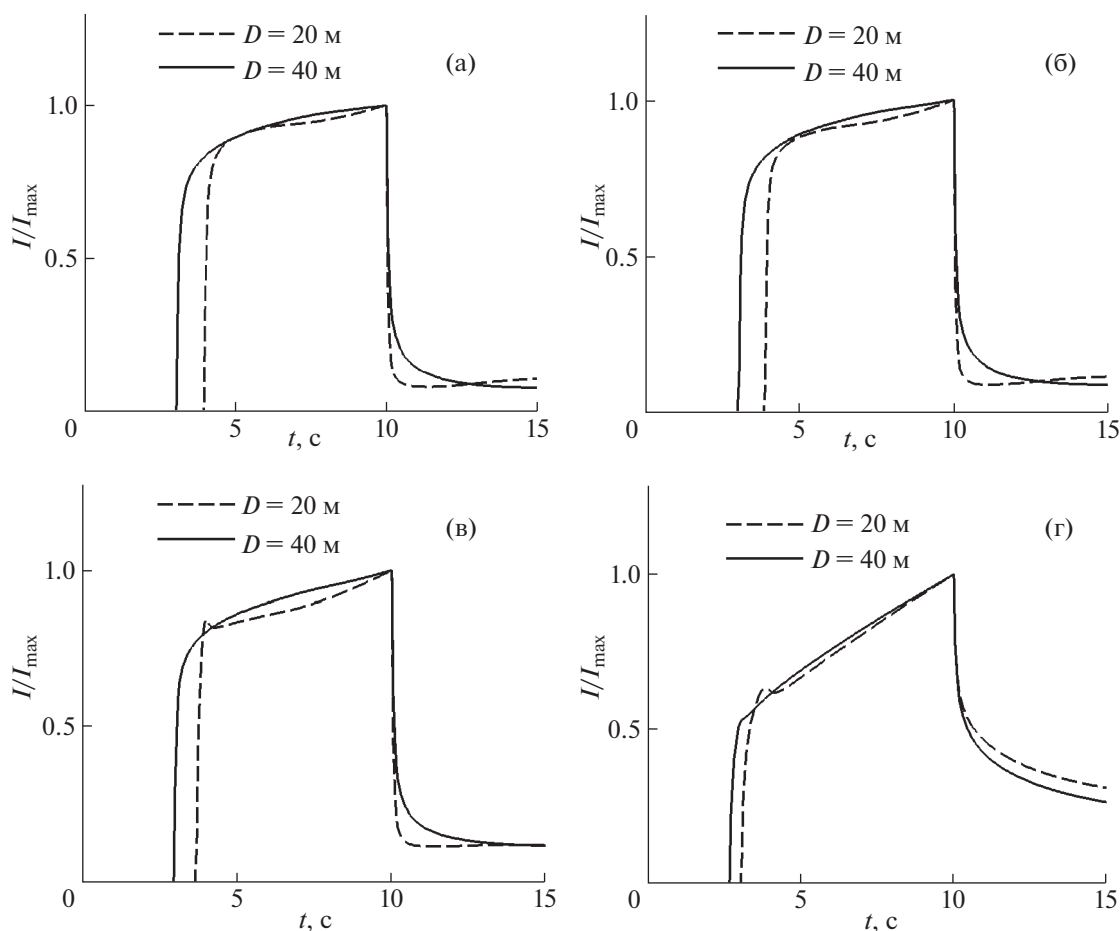


Рис. 15. Зависимость от времени нормированного коронного тока от плоскопараллельной системы восьми одинаковых заземленных проводов, подвешенных над землей, для двух расстояний между соседними проводами D . Высота всех проводов $h = 40$ м. Каждый рисунок соответствует одной паре проводов, помещенных в точки x , симметричные относительно прямой $x = 0$, (а) $x = \pm D/2$, $I_{\max} = 0.94 \mu\text{A}/\text{м}$ при $D = 20$ м, $I_{\max} = 1.71 \mu\text{A}/\text{м}$ при $D = 40$ м; (б) $x = \pm 3D/2$, $I_{\max} = 0.98 \mu\text{A}/\text{м}$ при $D = 20$ м, $I_{\max} = 1.76 \mu\text{A}/\text{м}$ при $D = 40$ м; (в) $x = \pm 5D/2$, $I_{\max} = 1.13 \mu\text{A}/\text{м}$ при $D = 20$ м, $I_{\max} = 1.92 \mu\text{A}/\text{м}$ при $D = 40$ м; (г) $x = \pm 7D/2$, $I_{\max} = 3.15 \mu\text{A}/\text{м}$ при $D = 20$ м, $I_{\max} = 3.64 \mu\text{A}/\text{м}$ при $D = 40$ м. Грозовое поле растет по закону (1) $E_{0\max} = 400$ В/см, $\tau = 10$ с.

рой и третьей парами проводов, которым соответствуют точки с координатами $x = 10, 30$ и 50 м, эквипотенциали идут практически параллельно оси x . На расстояниях 10 м от проводов вверх и вплоть до высот 110 м, горизонтальная составляющая поля E' над этими проводами не превышает 15 В/см. Отмеченное выше движение вправо ионов у крайнего провода связано с горизонтальной составляющей поля $E'_x \approx 200$ В/см, которая сравнима с масштабом заданного вертикального грозового поля $E_{0\max}$.

Заметим, что из результатов, представленных на рис. 17, следует, что потенциал ϕ' на верхней BC и боковой AB границах расчетной области (см. рис. 16) создается в основном объемным зарядом. Действительно вклад первого члена от объемного заряда в потенциал (15) на отрезках AB

и BC составляет почти 90% от суммарного потенциала.

На рис. 18 приведены зависимости от времени суммарного вертикального электрического поля на разных высотах над крайними проводами в случае, когда внешнее грозовое поле сначала растет линейно, а потом стабилизируется. Ход кривых рис. 18 трудно интерпретировать теоретически; качественно он отличается от того, что получилось при расчете временной эволюции суммарного поля в различных точках над проводом периодической системы (рис. 13)..

На рис. 19 приведено суммарное поле на земле под крайними проводами системы после зажигания короны. Это поле сначала растет, достигает максимума в момент прекращения линейного роста грозового поля, а потом начинает падать.

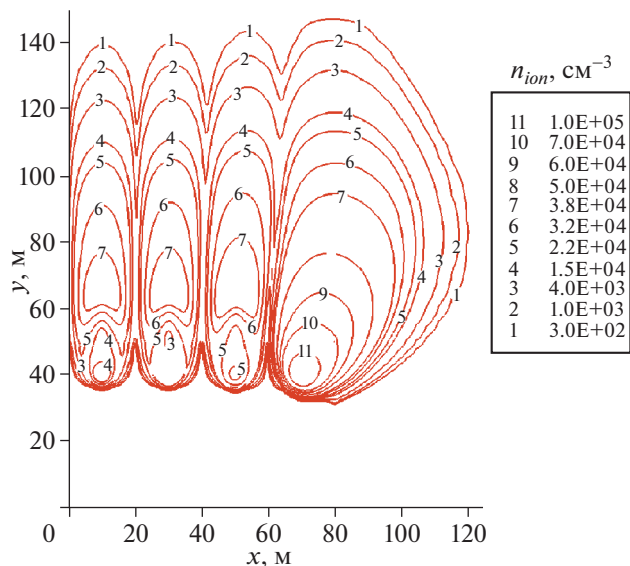


Рис. 16. Линии равных плотностей ионов n_{ion} , внедренных коронным разрядом от системы из восьми заземленных проводов в момент времени $t = 15$ с от начала роста грозового поля по линейному закону (1). Высота подвеса проводов $h = 40$ м, расстояние между соседними проводами $D = 20$ м, $E_{0max} = 400$ В/см, $\tau = 10$ с. Провода, лежащие при $x < 0$, заменялись в расчете граничным условием симметрии при $x = 0$.

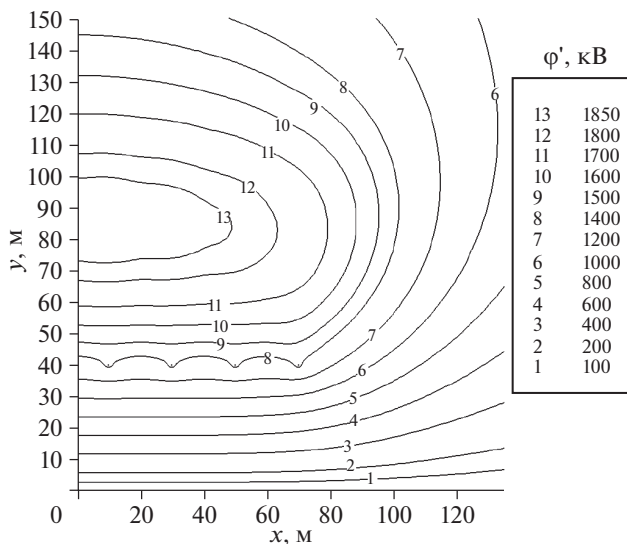


Рис. 17. Линии равного потенциала ϕ' , создаваемого объемным зарядом и зарядами восьми проводов в момент времени $t = 15$ с от начала роста грозового поля. Входные данные те же, что на рис. 16.

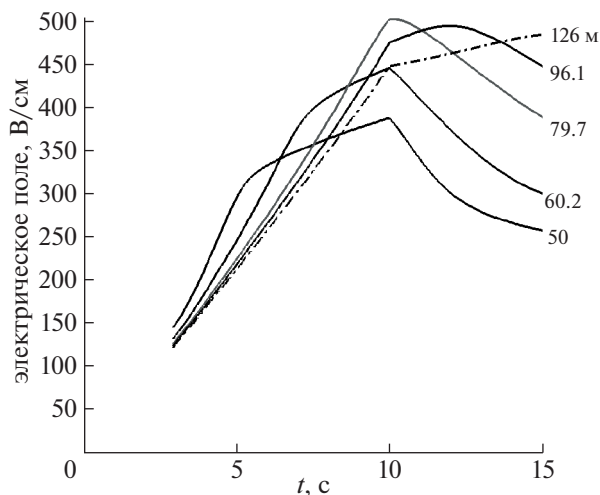


Рис. 18. Зависимость от времени суммарного вертикального электрического поля на разных высотах, указанных на рисунке, над крайними проводами, расположенными в точках $x = \pm 70$ м, системы из восьми коронирующих заземленных проводов. Расстояние между соседними проводами $D = 20$ м, высота подвеса $h = 40$ м. Грозовое поле растет по линейному закону (1) с $E_{0max} = 400$ В/см и $\tau = 10$ с. Порог зажигания короны от крайнего провода $E_{0cor} = 122.1$ В/см.

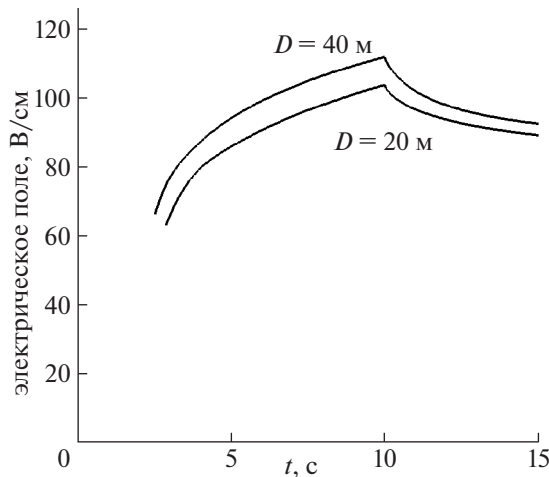


Рис. 19. Зависимость от времени электрического поля на земле под крайними проводами, расположенными в точках $x = \pm 7/2D$, системы из восьми коронирующих проводов для двух расстояний D между соседними проводами. Высота подвеса проводов и внешнее грозовое поле взяты такими же, как при расчете рис. 18.

Для анализа зависимостей рис. 18 и 19 следовало бы провести дополнительные численные эксперименты, варьируя число проводов в системе. Эта работа требует отдельного исследования.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье разработана двумерная компьютерная модель для расчета нестационарного коронного разряда от плоскопараллельных систем заземленных проводов, подвешенных над землей и находящихся во внешнем однородном поле грозового облака.

Рассмотрен случай бесконечной периодической системы проводов, когда теоретический анализ сводится к расчету короны от одного провода с периодическими граничными условиями и случай системы из восьми проводов. В последнем случае вычислительная работа была сокращена путем применения условия симметрии, т.е. сокращения вдвое числа проводов, рассматриваемых непосредственно.

Для проверки метода решения двумерной электростатической задачи, проведено сравнение с аналитическими решениями рассчитанных по двумерной программе распределений потенциала, создаваемого зарядами проводов, в пустом пространстве над землей.

Найдено пороговое внешнее грозовое поле $E_{0\text{сог}}$ для возбуждения короны от провода бесконечной периодической системы и от крайних проводов системы, состоящей из восьми проводов.

Рассчитаны характеристики короны от двух названных систем: тока, распределения объемного заряда и потенциала, индуцированного зарядами проводов и объемным зарядом. Приведены рассчитанные зависимости от времени суммарного электрического поля на разных высотах над проводами и на земле.

Для бесконечной периодической системы проводов расчет сделан для режима, рассмотренного ранее в случае короны от многоэлектродной системы многих стержней, когда ток короны зависит только от расстояния D между соседними коронирующими электродами, а плотность коронного тока $j = \epsilon_0 dE_0(t)/dt$ — только от скорости нарастания внешнего грозового поля.

Работа одного из авторов (М.С. Мокрова) поддержана РФФИ, грант № 18-38-00051-мол-а.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ПОТЕНЦИАЛ В ПУСТОМ ПРОСТРАНСТВЕ, СОЗДАВАЕМЫЙ ЗАРЯДАМИ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРОВОДОВ

Этот потенциал $\phi'(x, y)$ дается формулой

$$\phi'(x, y) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{dz}{\sqrt{(x-x_k)^2 + (y-h)^2 + z^2}} - \frac{dz}{\sqrt{(x-x_k)^2 + (y+h)^2 + z^2}} \right), \quad (П.1)$$

где $x_k = D/2 + kD$ — координаты центров проводов, а $k = 0, \pm 1, \pm 2,$ и т.д (см. рис. 1(а)), $q = 2\pi r_0 \epsilon_0 E(r_0)$ — погонный заряд каждого провода.

Вычисляя интегралы в (П.1), получим

$$\phi'(x, y) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \ln \left[\frac{(x-x_k)^2 + (y+h)^2}{(x-x_k)^2 + (y-h)^2} \right] \quad (П.2)$$

Переходя в (П.2) к суммированию по положительным k , находим

$$\phi'(x, y) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{(x-D/2)^2 + (y+h)^2}{(x-D/2)^2 + (y-h)^2} \right] + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left\{ \left[\frac{(x-D/2+kD)^2 + (y+h)^2}{(x-D/2+kD)^2 + (y-h)^2} \right] \times \left[\frac{(x-D/2-kD)^2 + (y+h)^2}{(x-D/2-kD)^2 + (y-h)^2} \right] \right\} \quad (П.3)$$

Вводя новую переменную $\xi = x - D/2$ и переходя во втором члене в (П.3) от суммирования логарифмов к произведению под знаком логарифма, имеем

$$\phi'(x, y) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{\xi^2 + (y+h)^2}{\xi^2 + (y-h)^2} \right] + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \ln \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{(\xi+kD)^2 + (y+h)^2}{(\xi+kD)^2 + (y-h)^2} \right] \times \left[\frac{(\xi-kD)^2 + (y+h)^2}{(\xi-kD)^2 + (y-h)^2} \right] \right\} \quad (П.4)$$

Вводя комплексные переменные, $z_1 = \frac{\xi}{D} + i \frac{(y+h)}{D}$, $z_2 = \frac{\xi}{D} + i \frac{(y-h)}{D}$ и комплексно-сопряженные им \bar{z}_1 и \bar{z}_2 , перепишем произведение в (П.4) в виде

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(\xi+kD)^2 + (y+h)^2}{(\xi+kD)^2 + (y-h)^2} \right] \left[\frac{(\xi-kD)^2 + (y+h)^2}{(\xi-kD)^2 + (y-h)^2} \right] = \prod_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(1+z_1/k)(1-\bar{z}_1/k)(1+\bar{z}_1/k)(1-\bar{z}_1/k)}{(1+z_2/k)(1-\bar{z}_2/k)(1+\bar{z}_2/k)(1-\bar{z}_2/k)} \right]$$

Используя в последнем выражении известное разложение синуса, $\frac{\sin z}{z} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{k\pi}\right) \left(1 + \frac{z}{k\pi}\right)$ [57], находим, что

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(1 + z_1/k)(1 - z_1/k)(1 + \bar{z}_1/k)(1 - \bar{z}_1/k)}{(1 + z_2/k)(1 - z_2/k)(1 + \bar{z}_2/k)(1 - \bar{z}_2/k)} \right] = \frac{z_2 \bar{z}_2 \sin \pi z_1 \sin \pi \bar{z}_1}{z_1 \bar{z}_1 \sin \pi z_2 \sin \pi \bar{z}_2}$$

Возвращаясь обратно к переменным ξ , y и раскрывая по формулам тригонометрии произведение синусов, получим выражение для бесконечного произведения под знаком логарифма, входящего в (П.4)

$$\frac{z_2 \bar{z}_2 \sin \pi z_1 \sin \pi \bar{z}_1}{z_1 \bar{z}_1 \sin \pi z_2 \sin \pi \bar{z}_2} = \frac{\left[\frac{\xi^2 + (y-h)^2}{\xi^2 + (y+h)^2} \right] \frac{\operatorname{ch}[2\pi(h+y)/D] - \cos(2\pi\xi/D)}{\operatorname{ch}[2\pi(h-y)/D] - \cos(2\pi\xi/D)}}{\quad} \quad (\text{П.5})$$

Заменив бесконечное произведение в (П.4) правой частью (П.5) и объединяя стоящие в (П.4) два логарифма, имеем

$$\varphi'(x, y) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \ln \left\{ \frac{\operatorname{ch}[2\pi(h+y)/D] - \cos(2\pi\xi/D)}{\operatorname{ch}[2\pi(h-y)/D] - \cos(2\pi\xi/D)} \right\} \quad (\text{П.6})$$

Формула (П.6) для $\varphi'(x, y)$ подобна формуле, приведенной в книге [58], где рассматривается та же задача о распределении потенциала, создаваемого периодической системой заряженных нитей. Однако, там вместо $4\pi\epsilon_0$ написан множитель $2\pi\epsilon_0$, а в аргументах гиперболического и обычного косинусов вместо 2π стоит множитель π . Переходя от ξ к исходной переменной x , $\xi = x - D/2$ и выражая погонный заряд $q = 2\pi r_0 \epsilon_0 E(r_0)$ через потенциал U с помощью формулы (20), из (П.6) окончательно получим

$$\varphi'(x, y) = \frac{U}{2 \ln \left[\frac{\operatorname{sh}(\pi 2h/D)}{\pi r_0/D} \right]} \times \ln \left\{ \frac{\operatorname{ch}[2\pi(h+y)/D] + \cos(2\pi x/D)}{\operatorname{ch}[2\pi(h-y)/D] + \cos(2\pi x/D)} \right\} \quad (\text{П.7})$$

Отметим также, если в формуле из книги [59] для поля плоскопараллельной периодической решетки проводов при условии $r_0 \ll D$, h сделать разложение по малому параметру $(r_0/D)^2$ и затем пренебречь слагаемыми с r_0/D высокого порядка, то та формула сведется к (П.7).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Базелян Э.М., Райзер Ю.П.* // УФН. 2000. Т. 170. С. 753–769 [Bazelyan E.M. and Raizer Yu.P. The mechanism of lightning attraction and the problem of lightning initiation by lasers // Phys. Usp. 2000. Vol. 43. P. 701–16].
2. *Golde, R.H.* (Ed.), *Lightning*. New York: Academic, 1977.
3. *Rakov V.A. and Uman M.A.* *Lightning: Physics and Effects*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
4. *Aleksandrov N.L., Bazelyan E.M., Carpenter R.B. Jr, Drabkin M.M. and Raizer Yu.P.* // J. Phys. D: Appl. Phys. 2001. V. 34. P. 3256–66.
5. *Montanya J., van der Velde O., and Williams E.R.* // J. Geophys. Res. Atmos. 2014. V. 119. P. 1455–1462, <https://doi.org/10.1002/2013JD020225>
6. *Standler R.B. and Winn W.P.* // Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society. 1979. V. 105. P. 285–302.
7. *Soula S. and Chauzy S.* // Journal of Geophysical Research. 1991. V. 96. P. 22327–22336.
8. *Soula S.* // Journal of Geophysical Research. 1994. V. 99. P. 10759–10765.
9. *Базелян Э.М., Райзер Ю.П.* *Физика молнии и молниезащиты*. М.: Физматлит, 2001. [Bazelyan E.M. and Raizer Yu.P. *Lightning physics and lightning protection*. Bristol: IOP, 2000.]
10. *Bazelyan E.M. and Drabkin M.M.* Scientific and technical basis for preventing lightning strikes to earth bound objects // In: Power Engineering Society General Meeting, IEEE, 13–17 July. 2003. V. 4. P. 2201–2208.
11. *Rizk F.A.M.* Analysis of space charge generating devices for lightning protection: performance in slow varying fields // IEEE Trans. Power Deliv. 2010. V. 25. P. 1996–2006.
12. *Э.М. Базелян*, частное сообщение, 2015.
13. *Александров Н.Л., Базелян Э.М., Драбкин М.М., Карпентер Р.Б., Райзер Ю.П.* // Физика плазмы. 2002. Т. 28. № 11. С. 1032–1045. [Aleksandrov N.L., Bazelyan E.M., Carpenter R.B. Jr, Drabkin M.M. and Raizer Yu.P. // Plasma Phys. Rep. 2002. Vol. 28. P. 953–964].
14. *Aleksandrov N.L., Bazelyan E.M., D'Alessandro F. and Raizer Yu.P.* // J. Phys. D: Appl. Phys. 2005. V. 38. P. 1225–38.
15. *Bazelyan E.M., Raizer Yu.P. and Aleksandrov N.L.* // Plasma Sources Sci. Technol. 2008. V. 17. P. 024015.
16. *Bazelyan E.M., Raizer Yu.P., Aleksandrov N.L. and D'Alessandro F.* // Atmos. Res. 2009. V. 94. P. 436–47.
17. *Becerra M.* // J. Phys. D: Appl. Phys. 2013. V. 46. P. 135205.
18. *Becerra M.* // Atmospheric Research. 2014. V. 149. P. 316.
19. *Becerra M. and Cooray V.* // J. Phys. D: Appl. Phys. 2006. V. 39. P. 3708.
20. *Becerra M. and Cooray V.* // J. Phys. D: Appl. Phys. 2006. V. 39. P. 4695.
21. *Bazelyan E.M., Raizer Yu.P. and Aleksandrov N.L.* // Atmospheric Research. 2015. V. 153. P. 74–86.

22. Rizk F.A.M. // IEEE Trans. Power Deliv. 2011. V. 26. P. 1156–65.
23. Mokrov M.S., Raizer Yu.P. and Bazelyan E.M. // J. Phys. D: Appl. Phys. 2013. V. 46. P. 455202.
24. Bazelyan E.M., Raizer Yu.P. and Aleksandrov N.L. // Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics. 2014. V. 109. P. 80.
25. Bazelyan E.M., Raizer Yu.P. and Aleksandrov N.L. // Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics. 2014. V. 109. P. 91.
26. Neimarlija N., Demirdzic I. and Muzafjerija S. // Journal of Electrostatics. 2009. V. 67. P. 37–47.
27. Medlin A. J., Fletcher C.A.J. and Morrow R. // J. Electrostat. 1998. V. 43. P. 39–60.
28. Guo B.Y., Guo J., Yu A.B. // Journal of Electrostatics. 2014. V. 72. P. 301–310.
29. Davis J.L. and Hoburg J.F. // Journal of Electrostatics. 1986. V. 18. P. 1–22.
30. Nguyen N.C., Guerra-Garcia C., Peraire J. and Martinez-Sanchez M. // Journal of Electrostatics. 2017. V. 89. P. 1.
31. Medlin A.J., Morrow R. and Fletcher C.A.J. // J. Electrostat. 1998. V. 43. P. 61–77.
32. Lu T., Feng H., Cui X., Zhao Z. and Li L. // IEEE Transactions on Magnetics. 2010. V. 46. № 8. P. 2939–2942. <https://doi.org/10.1109/TMAG.2010.2044149>
33. Qiao J., Zou J., Yuan J., Lee J. B. and Ju M. // IEEE Transactions on Magnetics. 2016. V. 52. № 3. P. 1–4. <https://doi.org/10.1109/TMAG.2015.2481725>
34. Guerra-Garcia C., Nguyen N.C., Mouratidis T. and Martinez-Sanchez M. // J. Geophys. Res. Atmos. 2020. 125(16): e2020JD032908.
35. Chauzy S. and Rennela C. // Journal of Geophysical Research. 1985. V. 90. № D4. P. 6051–6057.
36. Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 1989. [Tamm I.E. Fundamentals of The Theory of Electricity. Mir, 1979.]
37. Бэдсел Ч., Ленгдон А. Физика плазмы и численное моделирование. М.: Энергоатомиздат, 1989. [Birdsall C.K. and Langdon A.B. Plasma Physics via Computer Simulation. Taylor & Francis, 2004. Chapter 14. P. 318–322].
38. Zheng Y., Zhang B., and He J. // Physics of Plasmas. 2011. Vol. 18. P. 123503.
39. Liu L. and Becerra M. // J. Phys. D: Appl. Phys. 2016. V. 49. P. 225202.
40. Dordizadeh P., Adamiak K. and Castle P.G.S. // Plasma Sources Sci. Technol. 2016. V. 25. P. 065009.
41. Ferreira N.G.C., Santos D.F.N., Almeida P.G.C., Naidis G.V. and Benilov M.S. // J. Phys. D: Appl. Phys. 2019. V. 52. P. 355206.
42. Райзер Ю.П. Физика газового разряда. Долгопрудный: Изд. дом “Интеллект”, 2009. [Raizer Yu.P. Gas Discharge Physics. Berlin: Springer, 1991. Chapter 12].
43. Waters R. T., Rickard T.E.S., Stark W.B. // International Symposium on Hochspannungstechnik Munchen, 1972. P. 104.
44. Bogdanova N.B., Pevchev B.G., Popkov V.I. // Izv. Akad. Nauk SSSR: Energ. Transp. 1978. V. 16. P. 96–100.
45. Morrow R. // J. Phys. D: Appl. Phys. 1997. V. 30. P. 3099–3114.
46. Gopalakrishnan V., Pawar S.D., Murugavel P. and Johare K.P. // J. Atmos. Sol.-Terr. Phys. 2011. V. 73. P. 1876–82.
47. Azarenok B.N. // Comput. Math. Math. Phys. 2009. V. 49. P. 797–809.
48. Fletcher C.A.J. Computational Techniques for Fluid Dynamics. V. 1. Fundamental and general techniques. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1991.
49. Ferziger J.H. and Peric M. Computational Methods for Fluid Dynamics. Berlin: Springer. 2002.
50. Wesseling P. Principles of Computational Fluid Dynamics. Berlin: Springer. 2001.
51. Toselli A. and Widlund O. Domain Decomposition Methods – Algorithms and Theory. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2005.
52. Джексон Дж. Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965. [Jackson J.D. Classical Electrodynamics. New York-London: John Wiley & Sons, Inc., 1962].
53. Greenberg M.D. Applications of Green’s Functions in Science and Engineering. New York: Dover Publications, 2015.
54. Miller G.H. // Journal of Computational Physics. 2008. V. 227. P. 7917–7928.
55. Hagenow K.V. and Lackner K., Proc. 7th Conf. on the Numerical Simulation of Plasmas, New York, 1975. P. 140.
56. Lackner K. Computation of ideal MHD equilibria // Computer Physics Communication. 1976. V. 12. P. 33–44.
57. Лаврентьев М.А. и Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
58. Бухгольц Г. Расчет электрических и магнитных полей, М.: ИЛ, 1961. [Buchholz H. Elektrische und magnetische Potentialfelder. Berlin, Gottingen, Heidelberg: Springer-Verlag, 1957].
59. Смайт В. Электростатика и электродинамика. М.: ИЛ, 1954. Гл. 4. С. 111. [Smythe W.R. Static and dynamic electricity. Taylor & Francis, 1989. Chapter 4. P. 107].