

О ВЛИЯНИИ ФАРАДЕЕВСКОГО ЭКРАНА НА ВИХРЕВОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВЫСОКОЧАСТОТНОМ ГЕНЕРАТОРЕ ПЛАЗМЫ

© 2021 г. Т. Д. Ахметов^{a, b, *}, А. А. Иванов^{a, b}, И. В. Шиховцев^{a, b}

^a Институт ядерной физики им Г.И. Будкера СО РАН, Новосибирск, Россия

^b Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

*e-mail: t.d.akhmetov@inp.nsk.su

Поступила в редакцию 01.12.2020 г.

После доработки 01.02.2021 г.

Принята к публикации 18.02.2021 г.

В рамках двумерной квазистационарной модели получено точное решение задачи о нахождении полей внутри круглого соленоида с переменным током с вставленным в него соосно тонкостенным цилиндрическим экраном с продольными щелями конечной ширины. Решение этой задачи позволяет оценить влияние фарадеевского экрана на профили магнитного и электрического поля в высокочастотном источнике плазмы.

Ключевые слова: квазистационарное приближение, магнитостатика, соленоид, источник плазмы, антенна, вихревое поле, экран

DOI: 10.31857/S0367292121070015

1. ВВЕДЕНИЕ

Источники плазмы, основанные на высокочастотном разряде, широко применяются в физике и технологии [1–4]. Разряд в таких источниках поддерживается в камере из диэлектрического материала высокочастотной (ВЧ) антенной, расположенной, как правило, снаружи камеры, в результате индуктивной и/или емкостной связи. Чтобы избежать вредного воздействия плазмы на диэлектрические (керамика, кварц) стенки разрядной камеры, часто используются защитные металлические экраны. При наличии экранов разряд поддерживается преимущественно благодаря индукционному электрическому полю, вызванному переменным магнитным полем в объеме источника плазмы. Электроны ускоряются электрическим полем и ионизуют газ, производя плазму. Экран изменяет распределение полей, что может заметно повлиять на характер работы источника плазмы. Например, может уменьшиться плотность плазмы из-за падения эффективности ионизации газа в объеме источника или может измениться радиальный профиль плотности плазмы. Поэтому при проектировании ВЧ-источников плазмы необходимо оценивать влияние экрана на распределение и величину индукционного поля. В работе рассматривается модель ВЧ-антенны в виде осесимметричной катушки,

охватывающей объем источника плазмы. Такая схема используется, например, в [2, 4–7].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ В КВАЗИСТАЦИОНАРНОМ ПРЕДЕЛЕ. ОБЩИЙ ДВУМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Рассмотрим задачу об определении электрического и магнитного полей внутри бесконечного прямого соленоида произвольного сечения, ток в котором медленно меняется. Внутри соленоида помещены бесконечно длинные идеально проводящие, немагнитные экраны с образующими, параллельными образующим соленоида. Форму поперечного сечения экранов будем сначала считать произвольной, но двумерная область между экранами является связанной. Сечение соленоида в рассматриваемой задаче показано на рис. 1. Считаем, что по поверхности течет ток $J(t)$ на единицу длины, который медленно меняется во времени. Направим ось z параллельно образующим соленоида.

При достаточно низких частотах можно пренебречь в уравнении Максвелла $\operatorname{rot} \mathbf{H} = c^{-1} \partial \mathbf{E} / \partial t + 4\pi c^{-1} \mathbf{j}$ токами смещения внутри проводников и в окружающем пространстве, т.е. принять условия квазистационарности. Это приближение справедливо, если пространственные размеры за-

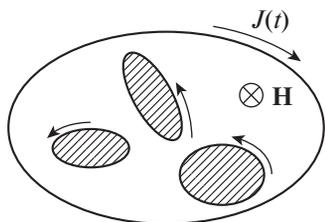


Рис. 1. Сечение соленоида и внутренних проводников.

дачи много меньше характерной длины волны. Типичная частота ВЧ-источников составляет несколько мегагерц, поэтому условие квазистационарности с запасом выполняется.

Задача об экранировании магнитного поля решается просто. Как показано на рис. 1, на поверхности экранов возникают токи обратного направления, которые по величине в точности равны току в соленоиде. При этом поле внутри сечения экранов оказывается равным нулю (идеальный скин-эффект), а вне экрана магнитное поле остается прежним, равным $H_z(t) = 4\pi J(t)/c$.

Чтобы найти вихревое электрическое поле в присутствии экрана с произвольной формой поперечного сечения, необходимо решить соответствующую краевую задачу. Считаем, что на поверхностях бесконечно длинного прямого соленоида и экрана нет постоянных зарядов. Дивергенция плотности тока соленоида равна нулю, поэтому из уравнения непрерывности следует, что $\partial\rho/\partial t = 0$, значит, плотность заряда в нем постоянна, и можно считать ее равной нулю. Поэтому скалярный потенциал можно положить тождественно равным нулю. Тогда для векторного потенциала в лоренцевой калибровке должно выполняться условие $\text{div } \mathbf{A} = 0$. Оно автоматически выполняется, если выбрать векторный потенциал в виде $\mathbf{A} = [\mathbf{e}_z \times \nabla\chi]$, где $\chi(x, y, t)$ — скалярная функция, а ось соленоида параллельна оси z . Магнитное поле внутри бесконечного соленоида однородно по сечению, а снаружи равно нулю. Поэтому магнитное поле внутри соленоида, но вне экранов, тоже однородно. Считая магнитное поле внутри соленоида заданным, получаем следующее уравнение на скалярную функцию χ : $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{e}_z \Delta\chi = \mathbf{e}_z \text{const}(t)$. Следовательно, выбранная нами скалярная функция вне токовых соленоидов, которыми считаются также и проводящие экраны, удовлетворяет уравнению Пуассона. То есть внутри основного соленоида $\Delta\chi = B$, и внутри экранов, соответственно, $\Delta\chi = -B$. Суммарное магнитное поле есть суперпозиция поля основного соленоида и полей токовых соленоидов, соответствующих экранам.

Если магнитное поле медленно меняется во времени, то возникает индукционное электрическое поле $\mathbf{E} = -c^{-1} \partial\mathbf{A}/\partial t = -c^{-1} \partial[\mathbf{e}_z \times \nabla\chi]/\partial t$. Вводя функцию $\chi' = c^{-1} \partial\chi/\partial t$, получаем $\mathbf{E} = -[\mathbf{e}_z \times \nabla\chi']$, что дает $\text{rot } \mathbf{E} = -\mathbf{e}_z \Delta\chi'$. С другой стороны, $\text{rot } \mathbf{E} = -c^{-1} \partial\mathbf{B}/\partial t = -\mathbf{e}_z c^{-1} \partial B/\partial t$, поэтому мы приходим к уравнению $\Delta\chi' = c^{-1} \partial B/\partial t$. Считая правую часть этого уравнения заданной функцией времени и вводя соответствующее переобозначение, запишем это уравнение в виде $\Delta\chi' = -1$. Это двумерное уравнение Пуассона в области, занятой зарядом постоянной плотности. В использованной калибровке плотность заряда равна $1/4\pi$ (или $-(1/4\pi c) \partial B/\partial t$ в размерных единицах). После определения χ' возвращаемся к размерным величинам умножением результата на $-(1/4\pi c) \partial B/\partial t$. Уравнение Пуассона $\Delta\chi' = -1$ имеет формальное решение $\chi' = (2\pi)^{-1} \iint \ln \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} dx' dy'$, где интеграл берется по области внутри соленоидов, так как эквивалентная плотность заряда вне соленоида равна нулю. Вычисляя интеграл в случае соленоида кругового сечения радиуса a , получаем

$$\chi' = \begin{cases} -\frac{r^2}{4} + C, & r \leq a \\ -\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} \ln \frac{r}{a} + C, & r > a \end{cases}.$$

Электрическое же поле можно представить в виде суммы двух слагаемых. Первое представляет собой поле, индуцированное переменным магнитным полем внешней катушки антенны и проводников экрана. Второе слагаемое появляется из-за зарядов, наведенных на поверхности элементов экрана. Поэтому, чтобы полностью определить электрическое поле, требуется найти распределение поверхностного заряда, возникающего на каждом отдельном проводнике экрана, причем внутри проводников поле этого заряда должно компенсировать индукционное поле и поле зарядов, наведенных на остальные элементы экрана. Получается задача о проводящем экране, помещенном в некоторое внешнее электрическое поле, которое внутри области, где расположен экран, совпадает с индукционным. При этом фактически достаточно выполнить условие равенства нулю в каждой точке поверхности тангенциальной компоненты поля. Это легко усмотреть из того факта, что так как заряды внутри экрана отсутствуют, то при выполнении условия эквипотенциальности поверхности экрана потенциал внутри экрана автоматически постоянен.

3. МОДЕЛЬ ТОНКОГО МНОГОЩЕЛЕВОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ЭКРАНА ВЧ-ИСТОЧНИКА ПЛАЗМЫ

В этом разделе рассматривается частный случай бесконечно тонких экранов, который представляет интерес в связи с практической задачей об источнике плазмы, в котором поле внешней ВЧ-антенны искажается фарадеевским экраном, помещенным внутри разрядной камеры. В случае тонких экранов индукционным полем самих экранов можно пренебречь как внутри, так и снаружи проводников экрана, поскольку противоположно направленные и одинаковые по величине поверхностные токи текут на бесконечно близких поверхностях экрана и потому компенсируют друг друга. Таким образом, остается обеспечить равенство нулю тангенциальной компоненты электрического поля на поверхности экранов. Задача о тонком цилиндрическом экране с продольными щелями представляет особый интерес также и потому, что она допускает точное аналитическое решение для электрического поля во всем объеме разрядной камеры.

Известно несколько задач об экранировании, допускающих точное решение. Например, это задача электростатики в пространстве между двумя параллельными проводящими плоскостями с заданными потенциалами при наличии между ними периодически расположенных бесконечно тонких полос конечной ширины [8]. Точное решение есть и в случае “магнитного экранирования” (т.е. в случае, когда задача допускает магнитостатическое описание), когда требуется найти магнитное поле от прямого проводника постоянного сечения, находящегося внутри периодической последовательности полуколец или колец конечной ширины, и период считается много меньше радиуса колец [9, 10]. В этом приближении есть решение как для бесконечно тонких экранов, так и для экранов с сечением в виде прямоугольника и эллипса [10].

Далее рассматривается задача о расчете квазистационарного поля в бесконечном круглом соленоиде с переменным током, внутри которого соосно расположен бесконечно тонкий цилиндрический проводящий экран с продольными щелями. В реальных ВЧ-источниках плазмы для инжекторов нейтральных атомов [3–7] диаметр цилиндрической камеры источника порядка его высоты, пластины экрана имеют конечную толщину, и нельзя пренебречь влиянием торцов. В этом случае поля внутри источника можно точно рассчитать только с помощью численных методов [11, 12]. Тем не менее, аналитическая двумерная задача с тонким экраном полезна для качественного понимания влияния экрана на картину полей и для количественных оценок.

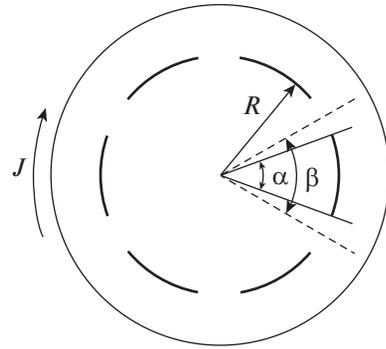


Рис. 2. Периодический тонкий экран внутри осесимметричного соленоида.

Без экрана высокочастотное электрическое поле вычисляется из уравнения Максвелла $\text{rot } \mathbf{E} = -c^{-1} \partial \mathbf{B} / \partial t$. В осесимметричном случае квазистационарное электрическое поле имеет только азимутальную компоненту

$$E_{\varphi}(r, t) = -\frac{1}{2c} \frac{dB}{dt} r, \quad (1)$$

где $B(t)$ — поле внутри соленоида (ВЧ-антенны), и r — радиус.

Рассмотрим экран в виде бесконечно тонкой идеально проводящей цилиндрической поверхности с периодическими продольными щелями конечной ширины. Таким образом, экран состоит из N тонких полос углового размера α на цилиндрической поверхности радиуса R (рис. 2).

Если длина катушки антенны и длина экрана много больше радиуса антенны, можно пренебречь зависимостью всех параметров от z и считать задачу плоской. Из симметрии такого экрана очевидно, что электрическое поле должно быть периодическим $\mathbf{E}(r, \varphi + \beta) = \mathbf{E}(r, \varphi)$, где r, φ — полярные координаты с осью z , совпадающей с осью соленоида и экрана, и $\beta = 2\pi/N$. Также из симметрии следует, что $E_r = 0$ в r - z -плоскостях, проходящих точно посередине между соседними пластинами экрана. Это означает, что электрическое поле перпендикулярно этим плоскостям, которые, таким образом, могут считаться идеально проводящими. Следовательно, полное решение задачи будет получено, если удастся найти электрическое поле внутри одного сектора с углом β между его граничными проводящими плоскостями, причем плоскости симметрии пластины экрана и сектора совпадают. Будем считать, что экран помещен в заданное внешнее электрическое поле (1). Это внешнее поле приводит к такому распределению наведенных на экране зарядов, что полное поле всюду перпендикулярно поверхности экрана, т.е. тангенциальная компонента

поля равна нулю, $E_\varphi(r = R, |\theta| < \alpha/2) = 0$. Это условие будет использовано в дальнейшем для нахождения распределения заряда по поверхности пластины. Также электрическое поле должно быть конечным на оси.

Решение плоской задачи об электрическом потенциале бесконечно длинной прямой нити с линейной плотностью заряда q_0 , проходящей через точку с координатами (r', φ') , в неограниченном секторе с угловым раствором β приведено в [13]. Потенциал электрического поля в этом случае может быть записан как

$$\Phi_0(r, \varphi, r', \varphi') = q_0 \ln \frac{\left(\frac{r}{r'}\right)^{\pi/\beta} + \left(\frac{r'}{r}\right)^{\pi/\beta} - 2 \cos\left(\pi \frac{\varphi + \varphi'}{\beta}\right)}{\left(\frac{r}{r'}\right)^{\pi/\beta} + \left(\frac{r'}{r}\right)^{\pi/\beta} - 2 \cos\left(\pi \frac{\varphi - \varphi'}{\beta}\right)}. \quad (2)$$

Компоненты электрического поля $E_r = -\partial\Phi_0/\partial r$, $E_\varphi = -\partial\Phi_0/r\partial\varphi$. Из (2) видно, что $E_r = 0$ при $r = r'$, т.е. линейный заряд, находящийся на радиусе r , не создает радиального электрического поля на этом же радиусе при любом значении угла. Азимутальное поле в точке $(r = R, \varphi)$, создаваемое линейным зарядом q_0 , расположенным в точке $(r' = R, \varphi')$, равно

$$E_\varphi(r = r' = R, \varphi', \varphi) = -\frac{q_0}{R} \frac{2\pi}{\beta} \frac{\sin \frac{\pi\varphi'}{\beta}}{\cos \frac{\pi\varphi}{\beta} - \cos \frac{\pi\varphi'}{\beta}}. \quad (3)$$

Удобно перейти от угла φ , отсчитываемого от границы сектора, к углу $\theta = \varphi - \beta/2$, для которого $\theta = 0$ – плоскость симметрии сектора и пластины экрана. Пластина экрана заключена в пределах $-\theta_m < \theta < \theta_m$, где $\theta_m = \alpha/2$. Тогда из (3) следует, что пластина экрана в виде сегмента с поверхностным зарядом $\sigma(\theta)$ создает на радиусе $r = R$ азимутальное поле

$$E_\theta(R, \theta) = -\frac{2\pi}{R\beta} \int_{-\theta_m}^{\theta_m} \frac{\cos \frac{\pi\theta'}{\beta}}{\sin \frac{\pi\theta'}{\beta} - \sin \frac{\pi\theta}{\beta}} \sigma(\theta') R d\theta'.$$

Тангенциальное электрическое поле, которое является суммой поля антенны и поля зарядов на пластине, должно обращаться в нуль на ее поверхности: $E_\theta(R, \theta) = E_{\text{ind}}(R) + E_{\theta, q}(R, \theta) = 0$ при

$-\theta_m < \theta < \theta_m$. Итак, азимутальное поле пластины с зарядами должно быть постоянно на поверхности пластины и равно $E_{\theta, q}(R, \theta) = -E_{\text{ind}}(R)$:

$$-\frac{2\pi}{\beta} \int_{-\theta_m}^{\theta_m} \frac{\cos \frac{\pi\theta'}{\beta}}{\sin \frac{\pi\theta'}{\beta} - \sin \frac{\pi\theta}{\beta}} \sigma(\theta') d\theta' = -E_0 \quad (4)$$

при $-\theta_m < \theta < \theta_m$,

где $E_0 = E_{\text{ind}}(R) = -(R/2c) dB/dt$. Выражение (4) есть интегральное уравнение на плотность заряда $\sigma(\theta)$. Вводя переменную $x = \sin(\pi\theta/\beta)$, получаем

$$\int_{-x_m}^{x_m} \frac{\eta(x')}{x - x'} dx' = -\frac{E_0}{2},$$

где $\eta(x') = \sigma\left(\frac{\beta}{\pi} \arcsin x'\right)$, $x_m = \sin \frac{\pi\theta_m}{\beta}$.

Из симметрии задачи и равенства нулю полного заряда пластины, $\int_{-\theta_m}^{\theta_m} \sigma(\theta) d\theta = 0$, следует, что решение должно быть нечетным, $\sigma(-\theta) = -\sigma(\theta)$. Интегральное уравнение $\int_a^b \frac{y(t)}{t - x} dt = 1$ с сингулярным ядром имеет неограниченное на концах интервала решение [14, 15]: $y(x) = \frac{1}{2\pi} \left(\sqrt{\frac{x-a}{b-x}} - \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} \right)$. Таким образом, плотность заряда определяется выражением

$$\sigma(\theta) = \frac{E_0}{2\pi} \frac{\sin \frac{\pi\theta}{\beta}}{\sqrt{\sin^2 \frac{\pi\theta_m}{\beta} - \sin^2 \frac{\pi\theta}{\beta}}}. \quad (5)$$

Плотность заряда сингулярна на краях пластины, $\sigma(\theta) \propto \pm(\theta_m^2 - \theta^2)^{-1/2}$ при $\theta \rightarrow \pm\theta_m$.

Найдем теперь потенциал и компоненты электрического поля. Сначала преобразуем потенциал (2) заряженной нити в неограниченном секторе к виду

$$\Phi_0 = q_0 \ln \frac{1 - 2(r/r')^{\pi/\beta} \cos(\pi(\varphi + \varphi')/\beta) + (r/r')^{2\pi/\beta}}{1 - 2(r/r')^{\pi/\beta} \cos(\pi(\varphi - \varphi')/\beta) + (r/r')^{2\pi/\beta}}.$$

Используя разложение $\ln \frac{1}{\sqrt{1 - 2x \cos \varphi + x^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n} x^n$, $x < 1$ [13], находим

$$\Phi_0 = -2q_0 \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{r'}\right)^{n\pi/\beta} \left(\cos \frac{n\pi(\varphi + \varphi')}{\beta} - \cos \frac{n\pi(\varphi - \varphi')}{\beta} \right), & r < r', \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r'}{r}\right)^{n\pi/\beta} \left(\cos \frac{n\pi(\varphi + \varphi')}{\beta} - \cos \frac{n\pi(\varphi - \varphi')}{\beta} \right), & r > r'. \end{cases} \quad (6)$$

Потенциал от бесконечно узкой полосы пластины экрана $d\Phi(r, \varphi, R, \varphi') = (\Phi_0/q_0)\sigma(\varphi')Rd\varphi'$, где σ – плотность заряда на единицу длины экрана в азимутальном направлении. Потенциал всего экрана находится интегрированием этого выражения по всей ширине полосы экрана. Этот потенциал находится аналитически, и далее можно дифференцированием найти компоненты электрического поля. С другой стороны, прямое вычисление компонент поля оказывается не более трудоемким, и далее используется этот способ. Поскольку плотность заряда выражена через угол θ , и интегрирование тоже удобно вести по переменной θ' , перейдем в формуле (6) от углов φ, φ' к θ, θ' : $\varphi = \theta + \beta/2, \varphi + \varphi' = \theta + \theta' + \beta, \varphi - \varphi' = \theta - \theta'$. Получим

$$\begin{aligned} & \cos \frac{n\pi(\varphi + \varphi')}{\beta} - \cos \frac{n\pi(\varphi - \varphi')}{\beta} = \\ & = ((-1)^n - 1) \cos \frac{n\pi\theta}{\beta} \cos \frac{n\pi\theta'}{\beta} - \\ & - ((-1)^n + 1) \sin \frac{n\pi\theta}{\beta} \sin \frac{n\pi\theta'}{\beta}. \end{aligned}$$

Для четных n только второй член не равен нулю, а для нечетных – только первый, поэтому от суммирования по всем n перейдем к суммированию отдельно по четным и по нечетным n . Радиальное поле, создаваемое зарядами, распределенными по поверхности полосы экрана, $E_r^s(r, \theta) = -\frac{\partial\Phi^s}{\partial r} = -\int \frac{1}{q_0} \frac{\partial\Phi_0(r, \theta, R, \theta')}{\partial r} \sigma(\theta')Rd\theta'$. Здесь и далее верхний индекс “s” относится к потенциалу и полю полосы экрана (от слова “shield”).

$$\begin{aligned} E_r^s(r, \theta) = & -2E_0 \frac{R}{\beta r} \int_{-\theta_m}^{\theta_m} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{2k\pi\theta}{\beta} \sin \frac{2k\pi\theta'}{\beta} \times \right. \\ & \left. \times \begin{cases} (r/R)^{2k\pi/\beta}, & r < R \\ -(R/r)^{2k\pi/\beta}, & r > R \end{cases} + \sum_{k=0}^{\infty} \cos \frac{(2k+1)\pi\theta}{\beta} \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. \times \cos \frac{(2k+1)\pi\theta'}{\beta} \begin{cases} (r/R)^{(2k+1)\pi/\beta}, & r < R \\ -(R/r)^{(2k+1)\pi/\beta}, & r > R \end{cases} \right) \times \\ & \times \frac{\sin \frac{\pi\theta'}{\beta}}{\sqrt{\sin^2 \frac{\pi\theta_m}{\beta} - \sin^2 \frac{\pi\theta'}{\beta}}} d\theta'. \end{aligned}$$

Слагаемые во второй сумме нечетны по θ' , поэтому при интегрировании они дают нуль. В первой сумме замена $2\pi\theta'/\beta = \alpha'$ и соотношение для полиномов Лежандра P_k [16] $\int_0^{x_0} \frac{\cos(k+1/2)x}{\sqrt{\cos x - \cos x_0}} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}} P_k(\cos x_0)$ дают

$$\begin{aligned} & \int_{-\theta_m}^{\theta_m} \frac{\sin \frac{2k\pi\theta'}{\beta} \sin \frac{\pi\theta'}{\beta}}{\sqrt{\sin^2 \frac{\pi\theta_m}{\beta} - \sin^2 \frac{\pi\theta'}{\beta}}} d\theta' = \\ & = \frac{\beta}{\pi\sqrt{2}} \int_0^{\alpha_m} \frac{\cos(k-1+1/2)\alpha' - \cos(k+1/2)\alpha'}{\sqrt{\cos \alpha' - \cos \alpha_m}} d\alpha' = \\ & = \frac{\beta}{2} (P_{k-1}(\cos \alpha_m) - P_k(\cos \alpha_m)), \end{aligned}$$

где $\alpha_m = 2\pi\theta_m/\beta$.

Так как $2\pi/\beta = N$ – это полное число пластин экрана,

$$\begin{aligned} E_r^s(r, \theta) = & -E_0 \frac{r'}{r} \sum_{k=1}^{\infty} \sin Nk\theta (P_{k-1}(\cos N\theta_m) - \\ & - (P_k(\cos N\theta_m))) \begin{cases} (r/R)^{Nk}, & r < R \\ -(R/r)^{Nk}, & r > R \end{cases}. \end{aligned}$$

Далее заметим, что $\sin Nk\theta \left(\frac{r}{R}\right)^{Nk} = \text{Im} \left(\left(e^{i\theta} \frac{r}{R} \right)^{Nk} \right) = \text{Im}(h^k)$, где $h = \left(e^{i\theta} \frac{r}{R} \right)^N$, и $\sin Nk\theta \left(\frac{R}{r}\right)^{Nk} = \text{Im}(h_1^k)$, где $h_1 = \left(e^{i\theta} \frac{R}{r} \right)^N$.

Используем производящую функцию полиномов Лежандра [16] $\frac{1}{\sqrt{1-2hz+h^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(z)$,

когда $|h| < \min |z \pm \sqrt{z^2 - 1}|$, что всегда выполняется в нашем случае. Обозначая $z = \cos \alpha_m$, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \sin Nk\theta \left(\frac{r}{R}\right)^{Nk} P_k(\cos \alpha_m) &= \text{Im} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} h^k P_k(z) \right\} = \\ &= \text{Im} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} h^k P_k(z) - h^0 P_0(z) \right\} = \text{Im} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} h^k P_k(z) \right\} - 0 = \\ &= \text{Im} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - 2hz + h^2}} \right\}. \end{aligned}$$

Аналогично вычисляем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{2k\pi\theta}{\beta} \left(\frac{r}{R}\right)^{2k\pi/\beta} P_{k-1}(\cos \alpha_m) &= \\ &= \text{Im} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \sin N(k+1)\theta \left(\frac{r}{R}\right)^{N(k+1)} P_k(\cos \alpha_m) \right\} = \\ &= \text{Im} \left\{ h \sum_{k=0}^{\infty} h^k P_k(z) \right\} = \text{Im} \left\{ \frac{h}{\sqrt{1 - 2hz + h^2}} \right\}. \end{aligned}$$

Тогда

$$E_r^s(r, \theta) = -E_0 \frac{R}{r} \begin{cases} \text{Im} \left(\frac{h-1}{\sqrt{1-2hz+h^2}} \right), & r < R, \\ -\text{Im} \left(\frac{h_1-1}{\sqrt{1-2h_1z+h_1^2}} \right), & r > R. \end{cases}$$

Обозначая $1 - 2hz + h^2 = A^{-2} e^{i2\psi}$, $1 - 2h_1z + h_1^2 = A_1^{-2} e^{i2\psi_1}$, где A, ψ, A_1, ψ_1 — вещественные величины, находим окончательное точное выражение для радиального поля

$$E_r^s(r, \theta) = -E_0 \frac{R}{r} \times \begin{cases} A \left(\left(\frac{r}{R}\right)^N \sin(N\theta - \psi) + \sin \psi \right), & r < R, \\ -A_1 \left(\left(\frac{R}{r}\right)^N \sin(N\theta - \psi_1) + \sin \psi_1 \right), & r > R. \end{cases} \quad (7)$$

Аналогично вычисляется азимутальное электрическое поле, создаваемое распределенным зарядом, наведенным на полосе экрана, $E_\theta^s = -\partial\Phi^s/r\partial\theta$:

$$E_\theta^s(r, \theta) = -E_0 \frac{R}{r} \times \begin{cases} A \left(\left(\frac{r}{R}\right)^N \cos(N\theta - \psi) - \cos \psi \right) + 1, & r < R, \\ A_1 \left(\left(\frac{R}{r}\right)^N \cos(N\theta - \psi_1) - \cos \psi_1 \right) + 1, & r > R. \end{cases} \quad (8)$$

Полное квазистационарное электрическое поле является суперпозицией квазистационарного электрического поля $E_{\text{ind}}(r, \theta) = E_0(r/R)\mathbf{e}_\theta$ в отсутствие экрана и электростатического поля поверхностных зарядов на пластинах экрана (7) и (8). Радиальная компонента полного поля совпадает с выражением (7), а для азимутальной компоненты получается

$$E_\theta(r, \theta) = E_0 \frac{r}{R} - E_0 \frac{R}{r} \times \begin{cases} A \left(\left(\frac{r}{R}\right)^N \cos(N\theta - \psi) - \cos \psi \right) + 1, & r < R, \\ A_1 \left(\left(\frac{R}{r}\right)^N \cos(N\theta - \psi_1) - \cos \psi_1 \right) + 1, & r > R, \end{cases} \quad (9)$$

где A и ψ выражены через r, θ

$$\begin{aligned} A &= \left| 1 - 2 \left(e^{i\theta} \frac{r}{R} \right)^N \cos(N\theta_m) + \left(e^{i\theta} \frac{r}{R} \right)^{2N} \right|^{-1/2}, \\ \psi &= \frac{1}{2} \text{Arg} \left(1 - 2 \left(e^{i\theta} \frac{r}{R} \right)^N \cos(N\theta_m) + \left(e^{i\theta} \frac{r}{R} \right)^{2N} \right), \\ A_1 &= \left| 1 - 2 \left(e^{i\theta} \frac{R}{r} \right)^N \cos(N\theta_m) + \left(e^{i\theta} \frac{R}{r} \right)^{2N} \right|^{-1/2}, \\ \psi_1 &= \frac{1}{2} \text{Arg} \left(1 - 2 \left(e^{i\theta} \frac{R}{r} \right)^N \cos(N\theta_m) + \left(e^{i\theta} \frac{R}{r} \right)^{2N} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, получено точное решение двумерной задачи об экранировании квазистационарного электрического поля бесконечно тонким проводящим цилиндрическим экраном с продольными разрезами. На рис. 3 показаны силовые линии электрического поля при $N = 12$ ($\beta = 30^\circ$) и угловым размером щелей $\delta\theta = 5.7^\circ$, что соответствует ширине щелей 5 мм для радиуса экрана $R = 5$ см. На рис. 4 приведены зависимости азимутального поля от радиуса на линиях, проходящих через середину полосы экрана ($\theta = 0$) и через середину зазора между полосами ($\theta = \beta/2$) для двух значений углового размера щелей, 5.7° и 2.9° . Показано также поле в отсутствие экрана, $E_\theta/E_0 = r/R$. Из рис. 4а видно, что радиальная зависимость поля при $\theta = 0$ почти не зависит от ширины щелей. В то же время из рис. 4б видно, что поле в зазоре сильно растет с уменьшением ширины щелей. Как следует из выражения (10), если угловой размер щели $\delta\theta$ достаточно мал, отношение минимального азимутального поля в зазоре к полю на том же радиусе в отсутствие экрана обратно пропорционально ширине зазора, $\min(E_\theta)/E_0 \sim 4/N\delta\theta \gg 1$.

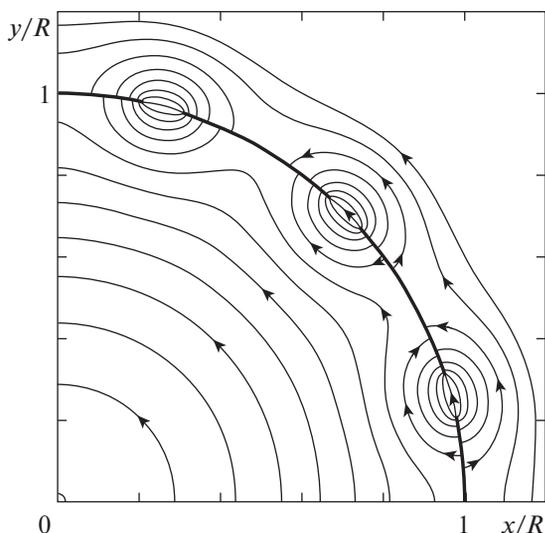


Рис. 3. Силовые линии электрического поля в задаче о тонком цилиндрическом экране с продольными щелями. Показан случай $N = 12$, угловой размер щелей равен 5.7° , координаты нормированы на радиус экрана. Густота силовых линий пропорциональна величине поля, стрелки показывают мгновенное направление электрического поля.

Для этих же двух случаев, когда угловой размер щелей равен 5.7° и 2.9° , азимутальное поле в зазоре между полосами на радиусе экрана показано на рис. 5, и радиальное поле на внутренней поверхности полосы экрана показано на рис. 6.

При малой ширине зазора между пластинами электрическое поле внутри радиуса экрана оказывается сосредоточенным в зазоре, причем может в несколько раз превосходить поле антенны в отсутствие экрана. В то же время экран значительно подавляет поле под пластинами. Из приведенных графиков качественно видно, как экран влияет на размеры и положение областей с большим электрическим полем, где происходит ускорение электронов, ионизирующих газ. Также модель позволяет делать количественные оценки влияния числа, ширины полос и зазоров между ними на величину полей в источнике.

Полезно найти формулы для электрического поля при некоторых выделенных значениях угла и радиуса.

А. Плоскость симметрии полосы экрана, $\theta = 0$

В этом случае $\psi = 0$, и $h(r, \theta) = \left(e^{i\theta} \frac{r}{R} \right)^N = \left(\frac{r}{R} \right)^N \equiv h_0(r)$ — вещественное число,

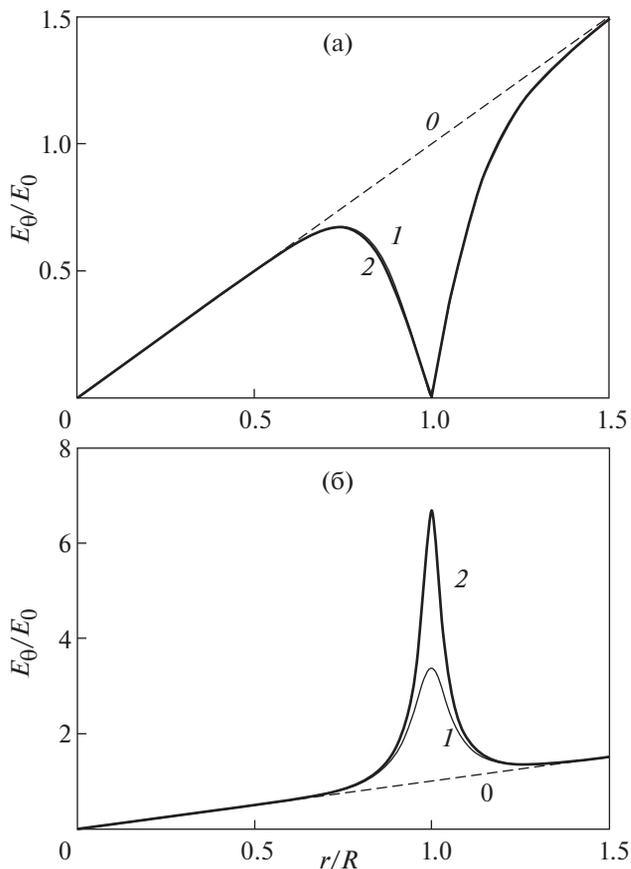


Рис. 4. Зависимость полного азимутального электрического поля от радиуса на линиях $\theta = 0$ (биссектриса пластины) (а) и $\theta = \beta/2$ (биссектриса зазора) (б). Радиус нормирован на радиус экрана, поле нормировано на E_0 : 0 — без экрана, 1 — с экраном, $N = 12$, угловой размер щелей 5.7° , 2 — с экраном, $N = 12$, угловой размер щелей 2.9° .

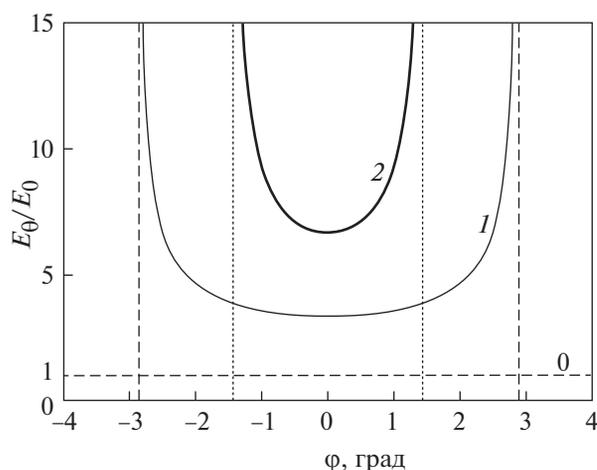


Рис. 5. Зависимость азимутального поля от угла в зазоре на радиусе экрана: 0 — без экрана, 1 — с экраном, $N = 12$, угловой размер щелей 5.7° , 2 — с экраном, $N = 12$, угловой размер щелей 2.9° . Вертикальные пунктирные линии показывают положение краев пластины экрана. Поле нормировано на E_0 .

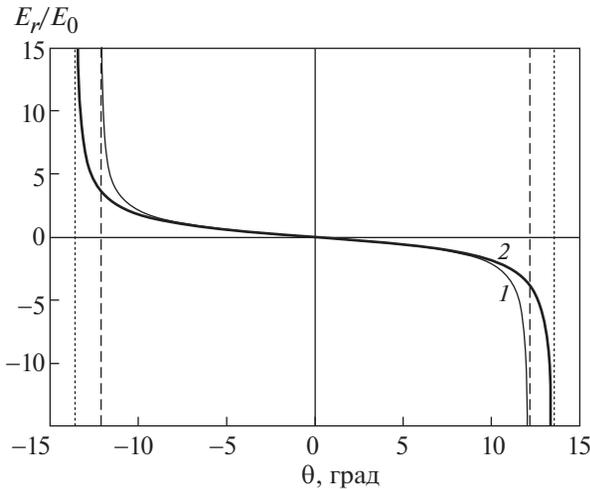


Рис. 6. Зависимость радиального электрического поля на внутренней поверхности пластины экрана от угла: 1 – $N = 12$, угловой размер щелей 5.7° , 2 – $N = 12$, угловой размер щелей 2.9° . Вертикальные пунктирные линии показывают положение краев пластины экрана. Поле нормировано на E_0 .

$E_r(r, \theta = 0) = 0$, и для полного азимутального поля получаем

$$\frac{E_\theta(r, \theta = 0)}{E_0} = \frac{r}{R} + \begin{cases} \frac{1 - h_0}{\sqrt{1 - 2h_0z + h_0^2}} - 1, & r < R, \\ -\frac{1 - h_0}{\sqrt{1 - 2h_0z + h_0^2}} - 1, & r > R. \end{cases}$$

Б. Плоскость симметрии зазора между соседними пластинами, $\theta = \beta/2$

В этом случае $h(r, \theta = \beta/2) = -h_0(r)$. Для любых r

$$\frac{E_\theta(r, \theta = \beta/2)}{E_0} = \frac{r}{R} + \frac{R}{r} \left(\frac{1 + h_0}{\sqrt{1 + 2h_0z + h_0^2}} - 1 \right). \quad (10)$$

Максимальное значение азимутального поля достигается на радиусе экрана, где $h_0 = 1$. Если ширина зазора между соседними полосами экрана по цилиндрической поверхности экрана равна d , то угловой размер полосы экрана $\alpha = \beta - d/R$, и максимальное значение поля в середине зазора равно $E_0/|\cos \pi\theta_m/\beta| = E_0/|\cos \pi\alpha/2\beta| = E_0/|\sin Nd/4R|$. В эксперименте число полос экрана N велико, а зазор между полосами много меньше ширины полос, $d \ll \alpha R$. Если при этом выполняется неравенство $Nd/4R \ll 1$, то отношение азимутального поля в зазоре к полю в отсутствие экрана равно $4R/Nd \gg 1$.

В. Поле на радиусе экрана, $r = R$

В этом случае $h(r, \theta) = e^{iN\theta}$. На внутренней поверхности пластины экрана, $r = R - 0$ и $|\theta| \leq \theta_m$,

$$E_r(R - 0, \theta) = -E_0 \frac{\sin(\pi\theta/\beta)}{\sqrt{\sin^2(\pi\theta_m/\beta) - \sin^2(\pi\theta/\beta)}}.$$

Сравнивая это выражение с формулой для распределения заряда по полосе экрана (5), видим, что $E_r(R - 0, \theta) = -2\pi\sigma(\theta)$, поэтому рис. 6 дает также картину распределения заряда. В зазоре, $\theta_m < |\theta| \leq \beta/2$, $E_r(r = R, \theta) = 0$.

Азимутальное поле на поверхности экрана равно нулю, а в зазоре между пластинами, $\theta_m < |\theta| \leq \beta/2$,

$$E_\theta(r = R, \theta) = -E_0 \frac{\sin(\pi\theta/\beta)}{\sqrt{\sin^2(\pi\theta/\beta) - \sin^2(\pi\theta_m/\beta)}},$$

т.е. неограниченно возрастает вблизи края пластины, что связано с приближением бесконечно тонкого экрана.

4. СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

Сделаем оценку влияния фарадеевского экрана для ВЧ источника слабоионизованной плазмы [5], который используется для получения пучка атомов водорода для диагностики плазмы. Параметры источника приведены в табл. 1. Давление газа в разрядной камере составляет около 10 мТорр (концентрация молекул $3.6 \times 10^{14} \text{ см}^{-3}$), а плотность плазмы $n_e = 0.7 \times 10^{12} \text{ см}^{-3}$. При этом давлении эффективная частота столкновений электронов с молекулами водорода равна $\nu_{\text{эф}} \approx 7 \times 10^7 \text{ с}^{-1}$ [17, с. 46], а частота электрон-ионных столкновений существенно меньше ($\sim 10^7 \text{ с}^{-1}$). Частота ВЧ-генератора источника ($\omega = 2.5 \times 10^7 \text{ с}^{-1}$) мала по сравнению с частотой столкновений электронов с молекулами, т.е. можно пользоваться выражением для статической проводимости плазмы. Тогда проводимость слабоионизованной плазмы $\sigma \approx n_e e^2 / m_e \nu_{\text{эф}} \approx 3 \times 10^{12} \text{ с}^{-1}$. Заметим, что вблизи экрана, на котором плотность электронов равна нулю, эта величина еще меньше. Электрическое поле антенны будет сосредоточено вблизи стенки разрядной камеры в скин-слое толщиной $\delta = c / \sqrt{2\pi\sigma\omega} \approx 1.5 \text{ см}$. Расчеты, проведенные в предыдущем разделе, показывают, что в отсутствие плазмы тонкий фарадеевский экран с щелями сильно влияет на электрическое поле только в относительно малой по радиусу зоне вблизи него. Приведенные ниже оценки показывают, что ширина этого слоя для источника плазмы [5] существенно меньше толщины скин-слоя в плазме и, следовательно, влиянием токов в плазме на поле в нем можно пренебречь. Поскольку поле зарядов сегментов экрана

Таблица 1. Параметры высокочастотного источника плазмы для инжектора нейтральных атомов [5] без экрана и с фарадеевским экраном

Параметр	без экрана	с экраном
Плотность тока ионов в плазменном эмиттере, мА/см ²	117	117
Амплитуда напряжения на антенне, В	2400	2850
Эквивалентное сопротивление плазмы, приведенное к выводам антенны, Ом	700	1000
Потребляемая мощность, кВт	4.10	4.06
Индуктивность антенны, мкГн	4.45	3.80
Резонансная частота антенного контура без плазмы, МГц	3.7	4.0
Резонансная частота антенного контура с плазмой, МГц	3.9	4.3
Эквивалентное сопротивление экрана, приведенное к выводам антенны, кОм		11
Ширина щели в экране d , см		0.3
Количество полос в экране N		16
Диаметр экрана $2R$, см		10
Потребляемая экраном мощность (без плазмы), Вт		360

потенциально, среднее по углу азимутальное электрическое поле при наличии экрана равно электрическому полю $E_0 r/R$ в его отсутствие. Поэтому средняя мощность, выделяющаяся в плазме в тонком кольцевом слое от r до $r + \Delta r$ единичной длины вдоль оси источника, слабо отличается от $\sigma(E_0 r/R)^2 2\pi r \Delta r$. Однако вблизи разрезов в экране поле сильно увеличивается, и электроны в этой малой по размеру области набирают энергию, при которой сечение ионизации существенно падает. При этом ускоренные по направлению к экрану электроны быстро теряются на нем, не успевая ионизировать газ, попадая на экран под действием сильного поля зарядов вблизи его разрезов. Вдали от разрезов и близко к поверхности экрана электрическое поле так мало, что электроны здесь не набирают энергии, нужной для ионизации газа. Это должно приводить к существенному уменьшению плотности электронов и, следовательно, к уменьшению проводимости плазмы и выделения энергии вблизи экрана. Таким образом, можно считать, что влияние экрана на генерацию плазмы сводится к отодвиганию границы эффективной ионизации плазмы от экрана на такое расстояние, где электрическое поле зарядов экрана становится меньше невозмущенного вихревого поля на данном радиусе. Это означает, что для получения той же величины электрического поля в области эффективной генерации плазмы на меньшем радиусе при работе с фарадеевским экраном необходимо большее напряжение на антенне.

Поле наведенных на пластинах зарядов дается вторым слагаемым в (10). На малом расстоянии l от радиуса экрана ($r = R - l$): $h_0(r) = (r/R)^N = (1 - l/R)^N \approx e^{-Nl/R}$. На радиусе экрана в середине

разреза $h_0 = 1$ и $E^s = E_0 \left(|\sin Nd/4R|^{-1} - 1 \right) \approx 3E_0$. Когда начинает выполняться неравенство $Nl/R \geq 1$, т.е. при $l \geq R/N \approx 3$ мм, то $h_0(r) \approx e^{-Nl/R} \ll 1$, и азимутальное поле зарядов $E^s \approx E_0 h_0(1 - z) \approx E_0 e^{-Nl/R} 2 \cos^2 Nd/4R$. Это выражение позволяет сделать оценку расстояния l_0 , на котором поле зарядов пластин становится меньше вихревого поля, $E_0 e^{-Nl_0/R} 2 \leq E_0$: $l_0 \geq (R/N) \ln 2 \approx 2$ мм. Более точные вычисления дают $l_0 \approx 3$ мм. Под пластинами экрана полное азимутальное поле увеличивается от нуля на поверхности пластин почти до вихревого поля на таком же характерном расстоянии. Таким образом, на расстоянии l_0 от поверхности экрана поле всюду в источнике плазмы становится приблизительно равно вихревому полю в отсутствие экрана.

Без экрана плазма может генерироваться во всем объеме керамической камеры источника длиной 95 мм и внутренним радиусом 52 мм. При установке экрана плазма перестает генерироваться в наружном кольцевом слое, состоящем из вакуумного промежутка 2 мм между экраном и керамической стенкой, из самого медного экрана толщиной 1 мм и упомянутого выше слоя толщиной около 3 мм вблизи экрана, где поле сильно отличается от невозмущенного вихревого поля. То есть эффективная генерация плазмы при наличии экрана может происходить только внутри цилиндра радиусом $52 - (2 + 1 + 3) \approx 46$ мм. Считаем, что для эффективной генерации плазмы необходимо такое же электрическое поле на поверхности этого цилиндра, как в отсутствие экрана на диэлектрической стенке камеры. Учитывая, что вихревое поле пропорционально радиусу, получаем, что необходимо увеличить напряжение на

антенне от значения 2.40 кВ без экрана до $2.40(52/46) \approx 2.71$ кВ с экраном. В эксперименте потребовалось увеличить напряжение на антенне до несколько большей величины – 2.85 кВ, чтобы получить ту же самую плотность тока ионов, что и без экрана. После такого увеличения напряжения радиальный профиль плотности плазмы в области формирования ионного пучка также практически не изменился. Различие между экспериментально наблюдаемым и расчетным увеличением напряжения на антенне, необходимым для достижения прежней (без экрана) эффективности генерации плазмы, может быть частично связано также с влиянием плазмы и с конечной длиной разрядной камеры и антенны, что выходит за рамки рассматриваемой модели длинного соленоида.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В квазистационарном приближении (поперечные размеры системы много меньше характерной длины волны) рассмотрена двумерная задача о влиянии пассивных проводников на распределение электрического поля внутри соленоида с переменным током. Задача об экранировании сводится к отысканию распределения поверхностного заряда на проводниках экрана, наводящегося под действием электрического поля антенны. Получено точное решение задачи о нахождении полей внутри тонкого цилиндрического экрана с произвольным числом одинаковых продольных разрезов конечной ширины внутри соленоида с переменным током. Показано, что в случае фарадеевского экрана малой толщины с большим числом узких продольных разрезов вакуумное азимутальное поле в основном объеме ВЧ-источника слабо отличается от поля антенны в отсутствие экрана. Экран оказывает сильное влияние на распределение поля только в тонком слое вблизи экрана, объем которого мал относительно полного объема источника. В этой области генерация плазмы затруднена из-за сильного локального увеличения электрического поля, ускоряющего электроны до энергий, при которых сечение ионизации резко падает. Кроме того, эксперимент показал, что для работы ВЧ-источника с экраном требуется повышать напряжение

на внешней антенне, но экран не влияет заметным образом на радиальное распределение плазмы в источнике в области формирования ионного пучка.

Авторы выражают благодарность д.ф.-м.н. В.И. Давыденко за интерес к работе и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hopwood J.* // Plasma Sources Sci. Technol. 1992. V. 1. P. 109.
2. *Okumura T.* // Phys. Res. Int. 2010. V. 2010. P. 164249.
3. *Speth E. and NBI-Team* // Plasma Sci. Technol. 2004. V. 6. P. 2135.
4. *Kraus W., Fantz U., Franzen P., Fröschle M., Heinemann B., Riedl R., Wunderlich D.* // Rev. Sci. Instrum. 2012. V. 83. P. 02B104.
5. *Ivanov A.A., Davydenko V.I., Deichuli P.P., Kreter A., Mishagin V.V., Podminogin A.A., Shikhovtsev I.V., Schweer B., Uhlemann R.* // Rev. Sci. Instrum. 2000. V. 71. P. 3728.
6. *Иванов А.А., Шиховцев И.В., Подыминогин А.А., Авербух И.И., Ахметов Т.Д., Давыденко В.И., Дейчули П.П.* // Физика плазмы. 2002. Т. 28. С. 221.
7. *Иванов А.А., Подыминогин А.А., Шиховцев И.В.* // ЖТФ. 2007. Т. 77. С. 104.
8. *Grosser J., Schulz H.* // J. Phys. D: Appl. Phys. 1989. V. 22. P. 723.
9. *Faulconer D.W.* // J. Appl. Phys. 1983. V. 54. P. 3810.
10. *Smithe D.N., Kashuba R.J., Kammash T.* // J. Appl. Phys. 1986. V. 59. P. 3980.
11. *Тунов М.А.* // Вестник НГУ. Серия: Физика. 2014. Т. 9. С. 36.
12. *Zhang L.G., Chen D.Z., Li D., Liu K.F., Li X.F., Pan R.M., Fan M.W.* // Fusion Eng. Des. 2016. V. 103. P. 74.
13. *Бухгольц Г.* Расчет электрических и магнитных полей. М.: ИЛ, 1961. 712 с.
14. *Мусхелишвили Н.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 512 с.
15. *Полянин А.Д., Манжиров А.В.* Справочник по интегральным уравнениям. М.: Физматлит, 2003. 608 с.
16. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
17. *Райзер Ю.П.* Физика газового разряда. Долгопрудный: Издательский дом "Интеллект", 2009. 736 с.