ФИЗИКА ПЛАЗМЫ, 2022, том 48, № 1, с. 27–35

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН С ПЛАЗМОЙ

УДК 533.9

НЕЛИНЕЙНАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЫ, ОПИСЫВАЮЩАЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ДВУХ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРИ РАСПАДЕ ОБЫКНОВЕННОЙ ВОЛНЫ

 А. Ю. Попов*

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, С.-Петербург, Россия

**e-mail: a.popov@mail.ioffe.ru*

Поступила в редакцию 27.04.2021 г.
После доработки 10.06.2021 г.
Принята к публикации 20.08.2021 г.

В кинетическом приближении получено выражение для нелинейной (квадратичной) восприимчивости плазмы, которое адекватно описывает распад СВЧ-колебаний обыкновенной поляризации, приводящий к генерации продольных, например, нижнегибридных и верхнегибридных волн.

Ключевые слова: СВЧ-нагрев плазмы, обыкновенная волна, продольные волны, нелинейное взаимодействие волн, параметрическая распадная неустойчивость, нелинейная восприимчивость плазмы

DOI: 10.31857/S0367292122010115

1. ВВЕДЕНИЕ

Электронный циклотронный резонансный нагрев (ЭЦРН) используется в современных тороидальных устройствах магнитного удержания плазмы. Этот метод дополнительного нагрева рассматривается в настоящее время как наиболее надежный способ обеспечить локальный нагрев электронов и генерацию токов увлечения. Согласно современным представлениям, локальный нагрев электронов в магнитном острове позволяет эффективно контролировать развитие неоклассической тиринг-неустойчивости. По этой причине ЭЦРН планируется использовать в токамаке ITER. Кроме того, обсуждается использование этого метода дополнительного нагрева и в термоядерной установке следующего поколения ДЕМО. Современные СВЧ-генераторы – гиротроны – имеют выходную мощность излучения до 1 МВт. Уже сейчас начата разработка стационарных СВЧ-генераторов со значительно большей выходной мощностью – до 5 МВт [1]. Поскольку приближается время окончательной достройки и физического пуска токамака ITER, актуальной задачей в настоящее время является исследование всех аспектов поведения столь мощных пучков СВЧ-волн обыкновенной поляризации в высокотемпературной плазме. В частности, представляет интерес анализ возможности возбуждения паразитных физических эффектов, которые могут сопровождать распространение обыкновенных волн и значительно ухудшать эффективность и локальность дополнительного нагрева электронов. Наиболее опасным из них является параметрическая распадная неустойчивость (ПРН) электромагнитной волны, приводящая к ее нелинейной трансформации в пару дочерних продольных колебаний. Эффективность этого нелинейного явления определяется, в том числе, и эффективностью нелинейной связи трех волн, участвующих во взаимодействии. Коэффициент нелинейной связи адекватно описывается функцией отклика плазмы второго порядка (по амплитудам взаимодействующих волн), т.е. квадратичной восприимчивостью или проводимостью плазмы.

Выражения для функции отклика замагниченной плазмы были впервые получены более полувека назад в рамках гидродинамической модели плазмы [2] и с тех пор часто используются для анализа различных нелинейных явлений [3–7]. В частности, гидродинамическая модель холодной плазмы использовалась в течение последнего десятилетия для определения коэффициентов нелинейной связи необыкновенной волны с двумя дочерними верхнегибридными (ВГ) волнами, которые были необходимы для описания возбуждения низкопороговой двухплазмонной ПРН [8–13]. Однако, строго говоря, гидродинамическое приближение при описании двухплазмонного распада необыкновенной волны справедливо только в случае возбуждения длинноволновых (быстрых) дочерних волн, для которых эффект пространственной дисперсии среды пренебрежимо мал. Для описания двухплазмонной ПРН необыкновенной волны, приводящей к возбуждению медленных (электронных бернштейновских) волн, и вторичных неустойчивостей дочерних ВГ-волн, сопровождающихся возбуждением коротковолновых (медленных) ионных бернштейновских (ИБ) волн и ВГ-волн, необходимо было использовать полное (кинетическое) выражение для нелинейной восприимчивости, не ограниченное приближениями гидродинамической модели. Интегральное представление для билинейной восприимчивости, описывающей нелинейную связь необыкновенной волны с двумя продольными колебаниями, было получено в работе [14]. Показано, что если для описания распада необыкновенной волны, приводящей к возбуждению двух ВГ-волн, гидродинамическое описание дает разумную точность, то при параметрическом распаде, приводящем к возбуждению коротковолновых ионных и электронных бернштейновских волн, требуется кинетическое описание квадратичной восприимчивости плазмы [15, 16].

В свою очередь, для описания наиболее вероятного сценария распада обыкновенной волны, при котором возбуждаются продольные волны, например, ВГ и нижнегибридная (НГ), обычно используется выражение нелинейной восприимчивости, полученное в дипольном приближении [17]. С его помощью, оказалось возможным описать ПРН пучка волн обыкновенной поляризации в современных тороидальных установках [18–21]. Однако в высокотемпературной плазме токамака ITER пренебрежение пространственной структурой обыкновенной волны, т.е. использование дипольного приближения, может оказаться не вполне корректным.

В данной работе мы анализируем нелинейную связь обыкновенной СВЧ-волны и двух электростатических волн в однородной горячей замагниченной плазме. Мы начнем с анализа кинетического уравнения и получим формальное интегральное представление для квадратичной электронной восприимчивости, описывающее это нелинейное явление. Окончательные выражения для коэффициентов связи получены в удобном для численного анализа виде, который позволяет показать, что они подчиняются симметрии Мэнли–Роу. Их можно использовать для описания параметрических распадных неустойчивостей обыкновенной волны, приводящих к возбуждению продольных колебаний в высокотемпературной термоядерной, космической и астрофизической плазме.

2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ, УЧАСТВУЮЩИЕ В НЕЛИНЕЙНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ

Рассмотрим обыкновенную волну, которая распространяется квазипоперечно по отношению к внешнему магнитному полю, имеющему вектор индукции $\bar{\mathbf{B}} = \bar{B}\mathbf{e}_z$, в однородной плазме. Электрическое поле такой волны можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_O \frac{A_0}{2} \exp\left(ik_x x + ik_z z - i\omega_0 t\right) + c.c. \qquad (1)$$

Компоненты электрического поля волны $A_j = (\mathbf{e}_O \cdot \mathbf{e}_j) A_0$, где $j = x, y, z$, определяются системой уравнений Максвелла, которая при подстановке решения (1) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \varepsilon - n_z^2 & ig & n_x n_z \\ -ig & \varepsilon - n^2 & 0 \\ n_x n_z & 0 & \eta - n_x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = 0. \qquad (2)$$

В системе уравнений (2) мы использовали следующие обозначения $\varepsilon = 1 - \omega_{\rm pe}^2/(\omega_0^2 - \omega_c^2)$, $g = \omega_c\omega_{\rm pe}^2/(\omega_0^3 - \omega_c^2\omega_0)$, $\eta = 1 - \omega_{\rm pe}^2/\omega_0^2$ – компоненты высокочастотного, т.е. без учета ионного вклада, тензора диэлектрической проницаемости холодной плазмы; $\omega_{\rm c} = |\omega_{\rm ce}|$, где $\omega_{\rm ce} = e\bar{B}/(m_e c)$ – электронная циклотронная (ЭЦ) частота; $\omega_{\rm pe} = \sqrt{4\pi\bar{n}e^2/m_e}$ – электронная плазменная частота; $\bar{n}$ – фоновая плотность плазмы; $n_{x,z} = ck_{x,z}/\omega_0$ – компоненты коэффициента преломления $n = c\sqrt{k_x^2 + k_z^2}/\omega_0$. Определитель системы уравнений (2) равен

$$\frac{\left(\varepsilon - n_z^2\right)\left(\varepsilon - n^2\right) - g^2}{\left(\varepsilon - n^2\right)}\left(\eta - n_x^2\right) - n_x^2 n_z^2 = 0. \qquad (3)$$

При квазипоперечном распространении волны, т.е. при $n_z \ll 1$, мы можем представить решение уравнения (3) в виде суммы двух слагаемых

$$n_x \approx n_x^{(0)} + n_x^{(1)} = \sqrt{\eta} - \sqrt{\eta}\frac{n_z^2}{2}, \qquad (4)$$

первое из которых – это решение дисперсионного уравнения при поперечном распространении обыкновенной волны, а второе – поправка, связанная с конечностью $n_z \leq 1$. Из второго уравнения системы (2) мы можем выразить y компоненту поля через ее x компоненту

$$\frac{A_y}{A_x} = i\frac{g}{\varepsilon - \left(n_x^{(0)} + n_x^{(1)}\right)^2 - n_z^2},$$
$$i\frac{g}{\varepsilon - n_x^{(0)2} + n_x^{(0)2}n_z^2 - n_z^2} = \tag{5}$$
$$= -i\frac{\omega_0}{\omega_c}\frac{1}{1 + \left(\omega_0^2/\omega_c^2 - 1\right)n_z^2}.$$

Подставляя A_y, выраженное через A_x согласно (5), в первое и третье уравнение, мы находим следующее соотношение компонент поля:

$$\frac{A_x}{A_z} = -n_x n_z\frac{\left(\varepsilon - n^2\right)}{\left(\varepsilon - n_z^2\right)\left(\varepsilon - n^2\right) - g^2},$$
$$-n_x^{(0)}n_z\frac{\left(\varepsilon - n_x^{(0)2}\right)}{\varepsilon\left(\varepsilon - n_x^{(0)2}\right) - g^2} = -n_x^{(0)}n_z, \tag{6}$$

где мы удержали только члены первого порядка малости по параметру $n_z \leq 1$. Учитывая выражения (5) и (6), мы можем представить вектор поляризации, использованный в представлении (1), в следующем виде:

$$\mathbf{e}_O \approx \left(\Delta\exp\left(i\delta_x\right)\mathbf{e}_x,\right.$$
$$\left.\Delta\frac{\omega_0}{\omega_c}\left(1 - \frac{\omega_0^2 - \omega_c^2}{\omega_c^2}n_z^2\right)\exp\left(i\delta_y\right)\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\right), \tag{7}$$

где $\Delta = n_x^{(0)}n_z$, $\mathbf{e}_{x,y,z}$ — компоненты единичного вектора декартовой системы координат, $\delta_x = \pi$, $\delta_y = \pi/2$ — сдвиг фазы соответствующих компонент поля по отношению к ее доминирующей z-компоненте. Далее, используя уравнения Максвелла, получим компоненты магнитного поля волны

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -n_x A_z \\ 0 \end{pmatrix}\exp\left(ik_x x + ik_z z - i\omega_0 t\right) + c.c. \tag{8}$$

В выржении (8) мы опустили члены первого порядка малости и выше по параметру $n_z \leq 1$.

Далее, рассмотрим две продольные волны, электрическое поле которых выражается через их потенциал $\mathbf{E}_1 = -\nabla\phi_1$ и $\mathbf{E}_2 = -\nabla\phi_2$. Потенциал первой из них может быть представлен в виде

$$\phi_1 = \frac{C_1}{2}\exp\left(iq_{1x}x + i\omega_1 t\right) + c.c. \tag{9}$$

Потенциал второй продольной волны имеет вид

$$\phi_2 = \frac{C_2}{2}\exp\left(iq_{2x}x + iq_{2z}z - i\omega_2 t\right) + c.c. \tag{10}$$

В выражениях (9) и (10) частоты и волновые вектора отвечают распадным резонансным условиям

$$q_{2x} = q_{1x} + k_x, \quad q_{1z} = k_z, \quad \omega_0 = \omega_2 + \omega_1. \tag{11}$$

3. КВАДРАТИЧНАЯ ЭЛЕКТРОННАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ

Рассмотрим уравнение Власова для бесстолкновительной однородной замагниченной плазмы, которое описывает функцию распределения электронов

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_i\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{|e|}{m_e}E_i\frac{\partial}{\partial v_i} - \omega_c e_{ijz}v_j\frac{\partial}{\partial v_i}\right)f_e = 0, \tag{12}$$

где e_{ijz} — полностью антисимметричный единичный тензор и $\mathbf{E} = \sum_{i=0\div 2}\mathbf{E}_i$. Будем искать решение уравнения (12), используя процедуру теории возмущений

$$f = f_0 + f^{(1)} + f^{(2)} + \ldots, \tag{13}$$

где $f_M = \bar{n}f_M$, $\bar{n}$ — равновесная плотность, f_M — максвелловская функция распределения, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ — поправки к равновесной функции распределения первого и второго порядка по амплитуде взаимодействующих волн. Подставим разложение (13) в уравнение (12) и, выделяя члены первого и второго порядка, получим уравнения для линейных поправок к функции распределения

$$\left(-i\alpha_s + i\lambda_s\cos\theta + \frac{\partial}{\partial\theta}\right)f_s^{(1)} =$$
$$= \frac{\bar{n}|e|}{m_e\omega_c}\left(\mathbf{E}_s + \frac{v\times\mathbf{H}_s}{c}\right)\frac{\partial f_M}{\partial v}, \tag{14}$$

где $s = 0,1$, $\alpha_0 = \left(\omega_0 - k_z v_z\right)/\omega_c$, $\alpha_1 = -\omega_1/\omega_c$, $\lambda_0 = k_x v_\perp/\omega_c$, $\lambda_1 = q_{1x}v_\perp/\omega_c$ и θ — азимутальный угол цилиндрической системы координат в пространстве скоростей. Используя функцию Грина уравнения (14), которую можно получить методом вариации произвольной постоянной

$$G_s(\theta)[\ldots] = \exp\left(i\alpha_s\theta - i\lambda_s\sin(\theta)\right)\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\theta}[\ldots]\exp\left(i\lambda_s\sin(\theta') - i\alpha_s\theta'\right)d\theta', \tag{15}$$

найдем линейные поправки к равновесной функции распределения на частоте ω_0

$$f_0^{(1)} = -\frac{|e|f_0}{m_e\omega_c v_{te}^2}\left(v_\perp A_x G_0(\theta)[\cos(\theta')] + \right.$$
$$\left. + v_\perp A_y G_0(\theta)[\sin(\theta')] + v_z A_z G_0(\theta)[1]\right) =$$
$$= \frac{\overline{n}|e|}{m_e\omega_c v_{te}^2} f_M \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\exp(in\theta - i\lambda_0\sin(\theta))}{n - \alpha_0(v_z)} \times \tag{16}$$
$$\times \left(iv_\perp A_x J_n^+(\lambda_0) + v_\perp A_y J_n^-(\lambda_0) + iv_z A_z J_n(\lambda_0)\right)$$

и на частоте ω_1

$$f_1^{(1)} = -\frac{|e|f_0}{m_e\omega_c v_{te}^2} v_\perp E_{1x} G_1(\theta)[\cos(\theta')] =$$
$$= i\frac{\overline{n}|e|E_{1x}}{m_e\omega_c v_{te}^2} f_M \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\exp(im\theta - i\lambda_1\sin(\theta))}{(m-\alpha_1)} v_\perp J_m^+(\lambda_1), \tag{17}$$

где $J_n^+(\lambda) = nJ_n(\lambda)/\lambda$, $J_n^-(\lambda) = J_n'(\lambda)$. В выражениях (16) и (17) мы использовали обозначения: $v_{te} = \sqrt{2T_e/m_e}$ – тепловая скорость электронов, T_e и m_e – электронная температура и масса. Первый, второй и третий члены во второй строке выражения (16) – результат действия интегрального оператора (15) на функции cos(θ'), sin(θ') и единицу соответственно. Правая часть выражения (17) – результат действия интегрального оператора (15) на функцию cos(θ'). Отметим, что процедура вывода линейных поправок к равновесной функции распределения, вызванных присутствием возмущений – волн на частотах ω_0 и ω_1 – аналогична процедуре, которая использовалась в ставшей классической монографии [24] и в широко распространенном учебнике [25]. Кроме того, имеет смысл акцентировать внимание, что как линейная поправка к функции распределения (16), так и поправка (17) являются функциями азимутального угла гировращения электрона в однородном магнитном поле. Этот факт будет существенным при выводе поправки второго порядка к функции распределения частиц.

Билинейную поправку к равновесной функции распределения на частоте второй дочерней волны можно найти, решив следующее уравнение

$$\left(-i\alpha_2 + i\lambda_2\cos\theta + \frac{\partial}{\partial\theta}\right) f_2^{(2)} =$$
$$= \frac{|e|}{2m_e\omega_c}\left(E_{1x}\frac{\partial f_0^{(1)}(\theta)}{\partial v_x} + \left(A_x + \frac{v_z n_x A_z}{c}\right)\frac{\partial f_1^{(1)}(\theta)}{\partial v_x} + \right. \tag{18}$$
$$\left. + A_y\frac{\partial f_1^{(1)}(\theta)}{\partial v_y} + \left(A_z - \frac{v_x n_x A_z}{c}\right)\frac{\partial f_1^{(1)}(\theta)}{\partial v_z}\right),$$

где $\alpha_2 = (\omega_2 - k_z v_z)/\omega_c$, $\lambda_2 = q_{2x}v_\perp/\omega_c$ и компоненты скорости $v_x(\theta) = v_\perp\cos(\theta)$, $v_y(\theta) = v_\perp\sin(\theta)$ зависят от поперечной скорости $v_\perp$ и азимутального угла θ гировращения частицы. Используя функцию Грина (15), мы получим решение уравнения (18) в интегральном виде

$$f_2^{(2)} = \frac{|e|}{2m_e\omega_c} G_2(\theta)\left[E_{1x}\frac{\partial f_0^{(1)}(\theta')}{\partial v_x(\theta')} + \ldots\right]. \tag{19}$$

Стоит обратить внимание, что выражение в квадратных скобках, на которое действует интегральный оператор (15), зависит от переменной θ'. Однако компоненты скорости $v_{x,y}(\theta')$, зависящие от переменной интегрирования θ', связаны с компонентами скорости $v_{x,y}(\theta)$, зависящими от текущего значения азимутального угла θ, преобразованием поворота по азимутальному углу $v_x(\theta') = v_x(\theta)\cos(\theta' - \theta) - v_y(\theta)\sin(\theta' - \theta)$ и $v_y(\theta') = v_x(\theta)\sin(\theta' - \theta) + v_y(\theta)\cos(\theta' - \theta)$.

Умножим выражение (19) на заряд электрона $-|e|$ и, далее, выполним интегрирование по скоростям, что приводит к выражению для нелинейной плотности заряда на частоте второй электростатической НГ-волны

$$\rho_2^{(2)} = -\frac{|e|^2}{2m_e\omega_c}\int_0^\infty v_\perp dv_\perp \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \times$$
$$\times \int_0^{2\pi} d\theta \exp(i\alpha_2\theta - i\lambda_2\sin(\theta)) \times \tag{20}$$
$$\times \int_{-\infty}^{\theta} d\theta' \exp(-i\alpha_2\theta') F(\theta'),$$

где функция $F(\theta')$ имеет вид

$$F(\theta') = \exp(i\lambda_2\sin(\theta')) \times$$
$$\times\left(E_{1x}\frac{\partial f_0^{(1)}(\theta')}{\partial v_x(\theta')} + \left(A_x + \frac{v_z n_x A_z}{c}\right)\frac{\partial f_1^{(1)}(\theta')}{\partial v_x(\theta')} + \right.$$
$$\left. + A_y\frac{\partial f_1^{(1)}(\theta')}{\partial v_y(\theta')} + \left(A_z - \frac{v_x(\theta') n_x A_z}{c}\right)\frac{\partial f_1^{(1)}(\theta')}{\partial v_z}\right)$$

и является периодической. Последнее свойство позволяет разложить ее в ряд

$$F(\theta') = \sum_p F_p \exp(ip\theta'),$$

$$F_p = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta'' \exp(i\lambda_2\sin(\theta'') - ip\theta'') \times \tag{21}$$
$$\times\left(E_{1x}\frac{\partial f_0^{(1)}(\theta'')}{\partial v_x(\theta'')} + \left(A_x + \frac{v_z n_x A_z}{c}\right)\frac{\partial f_1^{(1)}(\theta'')}{\partial v_x(\theta'')} + \right.$$

$$+A_y\frac{\partial f_1^{(1)}(\theta'')}{\partial v_y(\theta'')}+\left(A_z-\frac{v_x(\theta'')n_xA_z}{c}\right)\frac{\partial f_1^{(1)}(\theta'')}{\partial v_z}\Bigg).$$

Подставим представление (21) в выражение (20), выполним в последнем интегрирование по частям и получим $\rho_2^{(2)}=\rho_{2\perp}^{(2)}+\rho_{2z}^{(2)}$

$$\rho_{2\perp}^{(2)}=-i\frac{q_{2x}}{2}\frac{|e|^2}{m_e\omega_c^2}\times$$

$$\times\int_0^\infty v_\perp dv_\perp\int_{-\infty}^{\infty}dv_z\int_0^{2\pi}d\theta\exp(i\alpha_2\theta-i\lambda_2\sin(\theta))\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\theta}d\theta'\exp(i(\lambda_2\sin(\theta')-\alpha_2\theta'))\times \tag{22}$$

$$\times\Bigg(\left(E_{1x}f_{0\perp}^{(1)}(\theta')+f_1^{(1)}(\theta')\left(A_x+\frac{v_zn_xA_z}{c}\right)\right)\times$$
$$\times\sin(\theta-\theta')+f_1^{(1)}(\theta')A_y(\cos(\theta-\theta')-1)\Bigg),$$

где $f_{0\perp}^{(1)}$ – поправка (16), в которой $A_z=0$. Подставим выражения (16) и (17) в выражение (22) и выпишем первый вклад в него

$$\rho_{\perp a}^{(2)}=-i\frac{q_{1x}q_{2x}}{8\pi}\frac{\omega_{pe}^2}{\omega_c^2}\frac{c}{v_{te}^2}\frac{C_1}{B}\int_0^\infty v_\perp v_\perp dv_\perp\int_{-\infty}^{\infty}dv_zf_M\left(A_x+\frac{v_zn_xA_z}{c}\right)\int_0^{2\pi}d\theta\exp(i\alpha_2\theta-i\lambda_2\sin(\theta))\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\theta}d\theta'\Bigg(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\exp(i\lambda_1\sin(\theta')-i\alpha_2\theta'+in(\theta'))}{n-\alpha_0(v_z)}\frac{nJ_n(\lambda_0)}{\lambda_0}+ \tag{23}$$
$$+\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\exp(i\lambda_0\sin(\theta')-i\alpha_2\theta'+im\theta')}{m-\alpha_1}\frac{mJ_m(\lambda_1)}{\lambda_1}\Bigg)(\sin(\theta)\cos(\theta')-\cos(\theta)\sin(\theta')).$$

Возьмем в выражении (23) интеграл по переменной θ' и, в итоге, получим

$$\rho_{\perp a}^{(2)}=-i\frac{q_{1x}q_{2x}}{4\pi}\frac{\omega_{pe}^2}{\omega_c^2}\frac{c}{v_{te}}\frac{C_1}{B}\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}\int_0^\infty d\zeta_\perp\exp(-\zeta_\perp^2)\zeta_\perp^2\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\zeta_z}{\sqrt{\pi}}\exp(-\zeta_z^2)\left(A_x+\zeta_z\frac{v_{te}}{c}n_xA_z\right)\times$$
$$\times\Bigg(\frac{J_n^+(\bar\lambda_0\zeta_\perp)J_m^+(\bar\lambda_1\zeta_\perp)J_{m+n}^-(\bar\lambda_2\zeta_\perp)}{(n-\alpha_0(\zeta_z))(m-\alpha_1)}+ \tag{24}$$
$$+\frac{J_n^+(\bar\lambda_0\zeta_\perp)J_m^-(\bar\lambda_1\zeta_\perp)J_{m+n}^+(\bar\lambda_2\zeta_\perp)}{(n-\alpha_0(\zeta_z))(m+n-\alpha_2(\zeta_z))}+$$
$$+\frac{J_n^-(\bar\lambda_0\zeta_\perp)J_m^+(\bar\lambda_1\zeta_\perp)J_{m+n}^+(\bar\lambda_2\zeta_\perp)}{(m-\alpha_1)(m+n-\alpha_2(\zeta_z))}\Bigg).$$

Если положить в выражении (24) $A_z=0$, то оно совпадает с выражением для нелинейной плотности заряда, полученной в Приложении работы [15] и описывающей нелинейное взаимодействие трех продольных колебаний. В выражении (24) осталось выполнить интегрирование по продольным скоростям. Используя определение плазменной дисперсионной функции $Z(\xi)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-\zeta^2)}{\zeta-\xi}d\zeta$, получим

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}d\zeta\frac{\exp(-\zeta^2)}{(m+n-\alpha_2(v_z))(n-\alpha_0(v_z))}=\frac{\omega_c^2}{k_z^2v_{te}^2}\frac{Z(\xi_2^{m+n})-Z(\xi_0^n)}{\xi_1^m},$$
$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}d\zeta\frac{\zeta\exp(-\zeta^2)}{(m+n-\alpha_2(v_z))(m-\alpha_1)}=\frac{\omega_c}{k_zv_{te}}\frac{(1+\xi_2^{m+n}Z(\xi_2^{m+n}))}{(m-\alpha_1)}, \tag{25}$$
$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}d\zeta\frac{\zeta\exp(-\zeta^2)}{(m+n-\alpha_2(v_z))(n-\alpha_0(v_z))}=\frac{\omega_c^2}{k_z^2v_{te}^2}\frac{\xi_2^{m+n}Z(\xi_2^{m+n})-\xi_0^nZ(\xi_0^n)}{\xi_1^m},$$

где $\xi_0^n=\frac{\omega_0-n\omega_c}{k_zv_{te}}$, $\xi_1^m=-\frac{\omega_1+\omega_cm}{k_zv_{te}}$ и $\xi_2^p=\frac{\omega_2-p\omega_c}{k_zv_{te}}$. Учитывая выражения (25) в выражении (24), мы приходим к следующему представлению для плотности заряда $\rho_{\perp a}^{(2)}$:

$$\rho_{\perp a}^{(2)} = -i\frac{q_{1x}q_{2x}}{4\pi}\frac{\omega_{pe}^2}{k_z^2 v_{te}^2}\frac{c}{v_{te}}\frac{C_1}{\overline{B}}\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} d\zeta_\perp \exp\left(-\zeta_\perp^2\right)\zeta_\perp^2\left(\frac{k_z v_{te}}{\omega_c}Z\left(\xi_0^n\right)\frac{J_n^+\left(\overline{\lambda}_0\zeta_\perp\right)J_m^+\left(\overline{\lambda}_1\zeta_\perp\right)J_{m+n}^-\left(\overline{\lambda}_2\zeta_\perp\right)}{(m-\alpha_1)}+\right.$$
$$+\frac{k_z v_{te}}{\omega_c}Z\left(\xi_2^{m+n}\right)\frac{J_n^-\left(\overline{\lambda}_0\zeta_\perp\right)J_m^+\left(\overline{\lambda}_1\zeta_\perp\right)J_{m+n}^+\left(\overline{\lambda}_2\zeta_\perp\right)}{(m-\alpha_1)}+\left.\frac{Z\left(\xi_2^{m+n}\right)-Z\left(\xi_0^n\right)}{\xi_1^m}J_n^+\left(\overline{\lambda}_0\zeta_\perp\right)J_m^-\left(\overline{\lambda}_1\zeta_\perp\right)J_{m+n}^+\left(\overline{\lambda}_2\zeta_\perp\right)\right)A_x+$$
$$+\left(\frac{k_z v_{te}}{\omega_c}\left(1+\xi_0^n Z\left(\xi_0^n\right)\right)\frac{J_n^+\left(\overline{\lambda}_0\zeta_\perp\right)J_m^+\left(\overline{\lambda}_1\zeta_\perp\right)J_{m+n}^-\left(\overline{\lambda}_2\zeta_\perp\right)}{(m-\alpha_1)}+\right. \tag{26}$$
$$+\frac{k_z v_{te}}{\omega_c}\left(1+\xi_2^{m+n}Z\left(\xi_2^{m+n}\right)\right)\frac{J_n^-\left(\overline{\lambda}_0\zeta_\perp\right)J_m^+\left(\overline{\lambda}_1\zeta_\perp\right)J_{m+n}^+\left(\overline{\lambda}_2\zeta_\perp\right)}{(m-\alpha_1)}+$$
$$+\left.\frac{\xi_2^{m+n}Z\left(\xi_2^{m+n}\right)-\xi_0^n Z\left(\xi_0^n\right)}{\xi_1^m}J_n^+\left(\overline{\lambda}_0\zeta_\perp\right)J_m^-\left(\overline{\lambda}_1\zeta_\perp\right)J_{m+n}^+\left(\overline{\lambda}_2\zeta_\perp\right)\right)\frac{v_{te}}{c}n_x A_z.$$

Второй вклад в выражение (22) имеет вид

$$\rho_{\perp b}^{(2)} = -\frac{q_{1x}q_{2x}}{4\pi}\frac{\omega_{pe}^2}{\omega_c^2}\frac{c}{v_{te}}C_1\frac{A_y}{\overline{B}}\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} d\zeta_\perp \exp\left(-\zeta_\perp^2\right)\zeta_\perp^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\zeta_z}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\zeta_z^2\right)\times$$
$$\times\left(\frac{J_n^-\left(\overline{\lambda}_0\zeta_\perp\right)J_m^+\left(\overline{\lambda}_1\zeta_\perp\right)J_{m+n}^-\left(\overline{\lambda}_2\zeta_\perp\right)}{(n-\alpha_0(\zeta_z))(m-\alpha_1)}+\frac{J_n^-\left(\overline{\lambda}_0\zeta_\perp\right)J_m^-\left(\overline{\lambda}_1\zeta_\perp\right)J_{m+n}^+\left(\overline{\lambda}_2\zeta_\perp\right)}{(n-\alpha_0(\zeta_z))(n+m-\alpha_2(\zeta_z))}+\right. \tag{27}$$
$$+\left.\frac{J_m^+\left(\overline{\lambda}_1\zeta_\perp\right)}{(m-\alpha_1)(n+m-\alpha_2(\zeta_z))}\left(J_n^+\left(\overline{\lambda}_0\zeta_\perp\right)J_{m+n}^+\left(\overline{\lambda}_2\zeta_\perp\right)-J_n\left(\overline{\lambda}_0\zeta_\perp\right)J_{m+n}\left(\overline{\lambda}_2\zeta_\perp\right)\right)\right).$$

Воспользуемся выражением (25) для упрощения выражения (27) и получим

$$\rho_{\perp b}^{(2)} = -\frac{q_{1x}q_{2x}}{4\pi}\frac{\omega_{pe}^2}{k_z^2 v_{te}^2}\frac{c}{v_{te}}C_1\frac{A_y}{\overline{B}}\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} d\zeta_\perp \exp\left(-\zeta_\perp^2\right)\zeta_\perp^2\times$$
$$\times\left(\frac{k_z v_{te}}{\omega_c}\frac{Z\left(\xi_2^{m+n}\right)}{(m-\alpha_1)}\left(J_n^+\left(\overline{\lambda}_0\zeta_\perp\right)J_m^+\left(\overline{\lambda}_1\zeta_\perp\right)J_{m+n}^+\left(\overline{\lambda}_2\zeta_\perp\right)-J_n\left(\overline{\lambda}_0\zeta_\perp\right)J_m^+\left(\overline{\lambda}_1\zeta_\perp\right)J_{m+n}\left(\overline{\lambda}_2\zeta_\perp\right)\right)+\right. \tag{28}$$
$$+\left.\frac{k_z v_{te}}{\omega_c}\frac{Z\left(\xi_0^n\right)}{(m-\alpha_1)}J_n^-\left(\overline{\lambda}_0\zeta_\perp\right)J_m^+\left(\overline{\lambda}_1\zeta_\perp\right)J_{m+n}^-\left(\overline{\lambda}_2\zeta_\perp\right)+\frac{Z\left(\xi_2^{m+n}\right)-Z\left(\xi_0^n\right)}{\xi_1^m}J_n^-\left(\overline{\lambda}_0\zeta_\perp\right)J_m^-\left(\overline{\lambda}_1\zeta_\perp\right)J_{m+n}^+\left(\overline{\lambda}_2\zeta_\perp\right)\right).$$

Сумма выражений (24) и (28) при $k_z = 0$ совпадает с представлением для нелинейной плотности заряда, полученной в работе [15] и описывающей распад поперечной (необыкновенной) электромагнитной волны на два продольных колебания.

Вклад в выражение (22) имеется также вклад, связанный с линейным возмущением (16) в присутствии только продольного электрического поля $f_{0z}^{(1)}$ (поправка (16), в которой $A_{x,y} = 0$)

$$\rho_{za}^{(2)} = -i\frac{q_{1x}q_{2x}}{4\pi}\frac{\omega_{pe}^2}{k_z^2 v_{te}^2}\frac{c}{v_{te}}C_1\frac{A_z}{\overline{B}}\times$$
$$\times\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}\frac{\xi_2^{m+n}Z\left(\xi_2^{m+n}\right)-\xi_0^n Z\left(\xi_0^n\right)}{\xi_1^m}\times$$
$$\times\int_0^{\infty}\left(J_n\left(\overline{\lambda}_0\zeta_\perp\right)J_m^+\left(\overline{\lambda}_1\zeta_\perp\right)J_{m+n}^-\left(\overline{\lambda}_2\zeta_\perp\right)+\right. \tag{29}$$
$$+\left.J_n\left(\overline{\lambda}_0\zeta_\perp\right)J_m^-\left(\overline{\lambda}_1\zeta_\perp\right)J_{m+n}^+\left(\overline{\lambda}_2\zeta_\perp\right)\right)\exp\left(-\zeta_\perp^2\right)\zeta_\perp d\zeta_\perp.$$

Кроме того, мы еще не учли последний член в выражении (21). Его учет приводит к следующему вкладу в нелинейную плотность заряда

$$\rho_{zb}^{(2)} = i\frac{q_{1x}k_z}{4\pi}\frac{\omega_{pe}^2}{k_z^2 v_{te}^2}\frac{c}{v_{te}}C_1\frac{A_z}{\overline{B}}\sum_{n,m}\frac{Z'\left(\xi_2^{m+n}\right)}{m-\alpha_1}\times$$
$$\times\int_0^\infty J_m^+\left(\overline{\lambda}_1\zeta_\perp\right)\left(J_n\left(\overline{\lambda}_0\zeta_\perp\right)-\zeta_\perp\frac{v_{te}n_x}{c}J_n^+\left(\overline{\lambda}_0\zeta_\perp\right)\right)\times \quad (30)$$
$$\times J_{m+n}\left(\overline{\lambda}_2\zeta_\perp\right)\zeta_\perp^2\exp\left(-\zeta_\perp^2\right)d\zeta_\perp.$$

При поперечном распространении волны $k_z = 0$ выражения (29) и (30) равны нулю. Далее, введем нелинейную электронную восприимчивость плазмы согласно определению

$$\chi_e^{(2)} = \frac{q_{2i}}{\omega_2}\left(q_{1j}e_{Ok}\sigma_{ijk}^{(2)} + q_{1k}e_{Oj}\sigma_{ijk}^{(2)}\right) = -\frac{4\pi}{C_1A_0}\sum_{m=a,b}\left(\rho_{\perp m}^{(2)} + \rho_{zm}^{(2)}\right), \quad (31)$$

где $\sigma_{ijk}^{(2)}$ — 3-х индексный тензор проводимости плазмы. Анализируя (31), можно отметить, что выражение (31) обладает симметрией относительно перестановки $q_{1x} \leftrightarrow q_{2x}$, $\omega_1 \leftrightarrow \omega_2$, т.е. подчиняется симметрии Мэнли—Роу.

Следует отметить, что в рамках подхода, основанного на теории возмущения и использовании последовательных итераций для определения более высоких поправок к равновесной функции распределения по амплитуде полей, который подробно описан в работах [23–25], компоненты волновых векторов нелинейно взаимодействующих волн считаются заданными. Они могут быть определены в результате решения линейных дисперсионных уравнений соответствующих волн.

Выражение (31) позволяет описать любой параметрический распад обыкновенной волны, в результате которого возбуждаются два продольных колебания. В частности, его можно использовать при описании параметрического распада обыкновенной волны на периферии плазмы в присутствии блобов, в результате которого возбуждаются дочерние верхнегибридная и нижнегибридная волны. Это один из возможных сценариев, которые исследуются в настоящее время в контексте анализа влияния паразитных нелинейных явлений на распространение пучка СВЧ-волн при ЭЦРН в токамаке ITER. Пример анализа одного из сценариев распада обыкновенной волны, при котором возбуждаются две косые ленгмюровские волны, может быть найден в работе [26].

4. ПРЕДЕЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ

Рассмотрим нелинейную восприимчивость (31) в случае однородной накачки, т.е. высокочастотных колебаний, для описания которых необходимо положить $k_x = 0$, $k_z = 0$ в выражении (1). При этом, будем считать компоненты поля этих колебаний независимыми величинами. В этом случае $q_{1x} = q_{2x} = q_x$, $q_z = 0$ и выражение (31) сведется к следующему виду:

$$\begin{aligned}\chi_e^{(2)} = {} & iq_x^2\frac{\omega_{pe}^2}{\omega_c^2}\frac{c}{v_{te}}\frac{e_{Ox}}{2\overline{B}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^\infty d\zeta_\perp\exp\left(-\zeta_\perp^2\right)\zeta_\perp^2\Bigg\{\Bigg(\frac{J_m^+\left(\overline{\lambda}\zeta_\perp\right)J_{m+1}^-\left(\overline{\lambda}\zeta_\perp\right)}{(1-\alpha_0)(m-\alpha_1)} - \frac{J_m^+\left(\overline{\lambda}\zeta_\perp\right)J_{m-1}^-\left(\overline{\lambda}\zeta_\perp\right)}{(1+\alpha_0)(m-\alpha_1)} + \\ & + \frac{J_{m-1}^-\left(\overline{\lambda}\zeta_\perp\right)J_m^+\left(\overline{\lambda}\zeta_\perp\right)}{(1-\alpha_0)(m-\alpha_2)} - \frac{J_{m+1}^-\left(\overline{\lambda}\zeta_\perp\right)J_m^+\left(\overline{\lambda}\zeta_\perp\right)}{(1+\alpha_0)(m-\alpha_2)} + \frac{J_m^+\left(\overline{\lambda}\zeta_\perp\right)J_{m+1}^+\left(\overline{\lambda}\zeta_\perp\right)}{(m-\alpha_1)(m+1-\alpha_2)} - \frac{J_m^+\left(\overline{\lambda}\zeta_\perp\right)J_{m-1}^+\left(\overline{\lambda}\zeta_\perp\right)}{(m-\alpha_1)(m-1-\alpha_2)}\Bigg)\Bigg\} + \\ & + \Bigg\{\Bigg(\frac{J_m^+\left(\overline{\lambda}\zeta_\perp\right)J_{m+1}^-\left(\overline{\lambda}\zeta_\perp\right)}{(1-\alpha_0)(m-\alpha_1)} + \frac{J_m^+\left(\overline{\lambda}\zeta_\perp\right)J_{m-1}^-\left(\overline{\lambda}\zeta_\perp\right)}{(1+\alpha_0)(m-\alpha_1)} + \frac{J_m^-\left(\overline{\lambda}\zeta_\perp\right)J_{m+1}^+\left(\overline{\lambda}\zeta_\perp\right)}{(1-\alpha_0)(m+1-\alpha_2)} + \frac{J_m^-\left(\overline{\lambda}\zeta_\perp\right)J_{m-1}^+\left(\overline{\lambda}\zeta_\perp\right)}{(1+\alpha_0)(m-1-\alpha_2)} + \\ & + \frac{J_m^+\left(\overline{\lambda}\zeta_\perp\right)J_{m+1}^+\left(\overline{\lambda}\zeta_\perp\right)}{(m-\alpha_1)(m+1-\alpha_2)} + \frac{J_m^+\left(\overline{\lambda}\zeta_\perp\right)J_{m-1}^+\left(\overline{\lambda}\zeta_\perp\right)}{(m-\alpha_1)(m-1-\alpha_2)} - \frac{2J_m^+\left(\overline{\lambda}\zeta_\perp\right)J_m\left(\overline{\lambda}\zeta_\perp\right)}{(m-\alpha_1)(m-\alpha_2)}\Bigg)\frac{e_{Oy}}{e_{Ox}}\Bigg\}.\end{aligned} \quad (32)$$

Удерживая в выражении, стоящем в фигурных скобках, члены первого порядка малости по параметру $\overline{\lambda} \ll 1$, мы получим

$$\chi_e^{(2)} = iq_{1x}^2\frac{q_{1x}c}{\omega_c}n_z^3\frac{\omega_{\rm pe}^2}{\left(\omega_1^2-\omega_c^2\right)} \approx i\frac{q_{1x}^3c}{\omega_c}n_z^3. \quad (33)$$

Выражение (33) совпадает с выражением (A.5), полученным в дипольном приближении.

5. ВЫВОДЫ

Впервые в явном виде получено выражение для нелинейной (квадратичной) высокочастотной восприимчивости магнитоактивной плазмы в кинетическом приближении, которое описывает нелинейную связь СВЧ-волны обыкновенной поляризации с двумя электростатическими колебаниями. В предельном случае длинноволновых дочерних колебаний полученное выражение (31) воспроизводит выражения, выведенные в рамках дипольного приближения (A.5). Полученные результаты могут быть полезны при анализе нелинейных эффектов при ЭЦРН-нагреве при распространении обыкновенной волны на периферии плазмы.

Расчеты выполнены в рамках государственного контракта ФТИ им. А.Ф. Иоффе 0040-2019-0023, а Приложения подготовлены в рамках государственного контракта ФТИ им. А.Ф. Иоффе 0034-2021-0003.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

В этом Приложении мы выпишем нелинейные коэффициенты связи в дипольном приближении, базируясь на результатах работы [27]. Поле колебаний накачки и потенциалов дочерних волн в этом случае определяются выражениями (1), (9) и (10), где $k_x, k_z = 0$, за исключением компонент вектора поляризации (7). Согласно Приложению I в работе [27] нелинейные плотности заряда имеют вид

$$\begin{pmatrix} \rho_2 \\ \rho_1 \end{pmatrix} = \frac{\chi_e'(\omega_1)\chi_i'(\omega_2)}{16\pi q_{1x} q_{2x}} \begin{pmatrix} i a_B(E_0)\phi_1 \\ -i a_B(E_0)^* \phi_2 \end{pmatrix}, \tag{A.1}$$

где функция $a_B(E_0)$ дается следующим выражением:

$$\begin{gathered} a_B^2 = \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta_x\right) \frac{q_{1x} c \omega_c}{\omega_0^2 - \omega_c^2} \frac{A_x}{B} + \right. \\ \left. + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta_y\right) \frac{q_{1x} c \omega_c^2}{\omega_0\left(\omega_0^2 - \omega_c^2\right)} \frac{A_y}{B} \right\}^2 + \\ + \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta_x\right) \frac{q_{1x} c \omega_c}{\omega_0^2 - \omega_c^2} \frac{A_x}{B} + \right. \\ \left. + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta_y\right) \frac{q_{1x} c \omega_c^2}{\omega_0\left(\omega_0^2 - \omega_c^2\right)} \frac{A_y}{B} \right\}^2. \end{gathered} \tag{A.2}$$

В выражении (A.2) $\delta_{x,y}$ – фазы компонент поля колебаний накачки (см. (7)). Используя вектор поляризации (7) в выражении (A.2), получим

$$a_B^2 \approx \left(\frac{q_{1x} c}{\omega_c} n_x^{(0)} n_z^3\right)^2 \left(\frac{A_0}{B}\right)^2 \approx \left(\frac{q_{1x} c}{\omega_c} n_z^3 \frac{E_0}{B}\right)^2. \tag{A.3}$$

В выражении (A.3) мы учли, что выполняется неравенство $\omega_{pe}^2/\omega_0^2 \ll 1$, которое немедленно приводит к приближенному выражению $n_x^{(0)} \approx 1$. Поскольку для низкочастотных колебаний $\chi_i'(\omega_2) \approx -q_{1x}^2$ и $\chi_e'(\omega_1) \approx -q_{1x}^2 \omega_{pe}^2 / \left(\omega_1^2 - \omega_c^2\right)$, мы перепишем выражение (A.1) в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} \rho_2 \\ \rho_1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{16\pi \overline{B}} \begin{pmatrix} \chi_e^{(2)} A_0 \phi_1 \\ \chi_e^{(2)*} A_0^* \phi_2 \end{pmatrix}, \tag{A.4}$$

где мы использовали новое обозначение

$$\chi_e^{(2)} = i q_{1x}^2 \frac{q_{1x} c}{\omega_c} n_z^3 \frac{\omega_{pe}^2}{\left(\omega_1^2 - \omega_c^2\right)} \approx i \frac{q_{1x}^3 c}{\omega_c} n_z^3. \tag{A.5}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Литвак А.Г., Денисов Г.Г., Запевалов В.Е., Куфтин А.Н., Малыгин В.И., Чирков А.В., Соколов Е.В., Тай Е.М., Солуянова Е.А., Мясников В.Е., Агапова М.В., Ильин В.К., Ничипоренко В.О., Попов Л.Г., Усачев С.В., Ильин В.И., Новиков В.Н.* // Электронная техника. Серия 1: СВЧ-техника. 2013. Т. 518. С. 142.
2. *Akhiezer A.I., Akhiezer I.A., Sitenko A.G.* // Sov. Phys. JETP. 1962. V. 14. P. 462.
3. *Stenflo L.* // J. Plasma Physics. 1972. V. 7. Part 1. P. 107.
4. *Kaufman A.N., Stenflo L.* // Physica. Scripta. 1979. V. 19. P. 523.
5. *Brodin G., Stenflo L.* // J. Plasma Physics. 1989. V. 42. P. 187.
6. *Stenflo L.* // Physica Scripta. 1994. V. T. 50. P. 15.
7. *Brodin G., Stenflo L.* // J. Plasma Physics. 2006. V. 72. P. 143.
8. *Popov A.Yu., Gusakov E.Z.* // Plasma Phys. Control. Fusion. 2015. V. 57. P. 025022.
9. *Gusakov E.Z., Popov A.Yu., Irzak M.A.* // JETP. 2016. V. 123. P. 723.
10. *Gusakov E.Z., Popov A.Yu.* // Phys. Plasmas. 2016. V. 23. P. 082503.
11. *Popov A.Yu., Gusakov E.Z.* // Europhys. Lett. 2016. V. 116. P. 45002.
12. *Gusakov E.Z., Popov A.Yu.* // Plasma Phys. Control. Fusion. 2017. V. 59. P. 025005.
13. *Popov A.Yu., Gusakov E.Z.* // JETP Letters. 2017. V. 105. P. 78.
14. *Gusakov E.Z., Popov A.Yu., Tretinnikov P.V.* // Plasma Phys. Control. Fusion. 2019. V. 61. P. 085008.
15. *Gusakov E.Z., Popov A.Yu.* // Nuclear Fusion. 2018. V. 58. P. 096033.
16. *Popov A.Yu., Gusakov E.Z., Irzak M.A.* // Plasma Phys. Control. Fusion. 2020. V. 62. P. 025015.
17. *Aliev Yu.M., Silin V.P., Watson C.* // JETP. 1966. V. 23. P. 626.
18. *Gusakov E.Z., Popov A.Yu., Saveliev A.N., Sysoeva E.V.* // Plasma Phys. Control. Fusion. 2017. V. 59. P. 075002.

19. *Gusakov E.Z., Popov A.Yu.* // Phys. Plasmas. 2018. V. 25. P. 012101.

20. *Gusakov E.Z., Popov A.Yu.* // Phys. Plasmas. 2018. V. 25. P.082117.

21. *Gusakov E.Z., Popov A.Yu., Saveliev A.N.* // Plasma Phys. Control. Fusion. 2019. V. 61. P. 025006.

22. *Pustovalov V.V., Silin V.P.* Theory of Plasmas. Consultants Bureau, 1975.

23. *Larsson J.* // J. Plasma Physics. 1979. V. 21. P. 519.

24. *Ахиезер А.И., Ахиезер И.А., Половин Р.В., Ситенко А.Г., Степанов К.Н.* Электродинамика плазмы. М.: Наука, 1974.

25. *Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А.* Основы электродинамики плазмы. М.: Высшая школа, 1988.

26. *Gusakov E.Z., Popov A.Yu.* // Plasma Phys. Control. Fusion. 2020. V. 62. P. 105011.

27. *Aliev Yu.M., Silin V.P., Watson C.* // JETP. 1966. V. 23. P. 626.