ФИЗИКА ПЛАЗМЫ, 2022, том 48, № 1, с. 19–26

ДИНАМИКА ПЛАЗМЫ

УДК 533.95

ВЛИЯНИЕ РАДИАЛЬНОГО ГРАДИЕНТА ПЛОТНОСТИ НА НЕЛИНЕЙНЫЕ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛАЗМЕ

Е. П. Потанин[a, b, *]

[a] *Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт", Москва, Россия*
[b] *Всероссийский институт научной и технической информации РАН, Москва, Россия*
**e-mail: potanin45@yandex.ru*

Поступила в редакцию 26.05.2021 г.
После доработки 20.07.2021 г.
Принята к публикации 21.08.2021 г.

Рассчитываются МГД-характеристики пограничного слоя плазмы вблизи протяженного вращающегося с постоянной угловой скоростью диэлектрического диска во внешнем осевом магнитном поле. Предполагается, что проводящая среда над диском вращается с угловой скоростью, отличной от скорости диска. Анализ выполнен в изотермическом приближении с учетом существенного радиального перераспределения плотности газа в пренебрежении холловскими эффектами. Расчет выполнен методом Слезкина–Тарга с помощью автомодельного преобразования при степенном изменении плотности среды с радиальной координатой. Исследована зависимость толщины пограничного слоя ξ_1 и параметра радиального потока A от отношения угловых скоростей вращения среды m и степени сжатия p. Показано, что рост радиального градиента плотности должен приводить к заметному возрастанию момента сил азимутального трения в пограничном слое. Исследована зависимость осевого подсоса к диску от величины внешнего магнитного поля.

Ключевые слова: МГД-пограничный слой, вращающаяся плазма, диэлектрический диск, магнитное поле, вязкое трение, градиент плотности, сжимаемость среды

DOI: 10.31857/S0367292122010127

1. ВВЕДЕНИЕ

Интерес к изучению вращающихся газовых сред и плазмы в различных областях науки и технологии постоянно растет. Это связано с разработкой термоядерных реакторов [1, 2], астрофизическими проблемами устойчивости аккреционных дисков [3–5], задачами переработки отработавшего ядерного топлива в плазме [6–8], преобразования тепловой энергии в электрическую [9], усовершенствованием газовой центрифуги [10–12]. Важное значение уделяется также разработке плазменных центрифуг, предназначенных для разделения изотопов элементов, не имеющих удобных газообразных соединений при комнатных температурах [13–15].

При изучении газодинамических процессов во вращающихся потоках необходимо исследовать взаимодействие среды с ограничивающими поверхностями. В настоящей работе рассмотрим вращение плазмы вблизи вращающегося диэлектрического диска при наличии внешнего вращательного потока. Как правило, такие задачи исследуются в предположении постоянства плотности среды вдоль радиальной координаты [16]. В настоящей работе предпринята попытка учесть радиальный градиент плотности, связанный с центробежными силами при наличии ограничивающей цилиндрической поверхности.

2. ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ СЖИМАЕМОГО СЛАБОИОНИЗОВАННОГО ГАЗА ВБЛИЗИ ПРОТЯЖЕННОГО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДИСКА

Рассмотрим вращающийся с постоянной угловой скоростью ω_1 столб газа, ограниченный по радиусу вращающейся стенкой. Отвлечемся от причин возбуждения вращения среды. Это могут быть как различного рода электромагнитные силы (плазменная центрифуга), так и вязкие силы, связанные с действием вращающейся боковой стенки (обычная механическая центрифуга). Существенным моментом в этом случае является зависимость давления газа P от радиальной координаты r. Во вращающемся с угловой скоростью ω_1

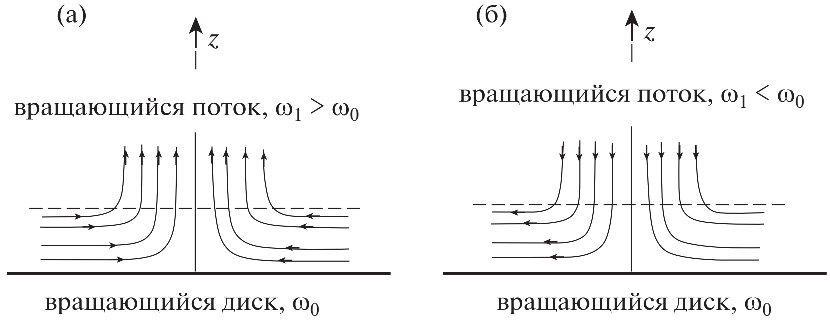

Рис. 1. Линии тока при различных соотношениях угловых скоростей внешнего потока и диска.

столбе газа в равновесном состоянии возникает уравновешивающий центробежную силу радиальный градиент давления

$$\frac{dP}{dr} = \rho_1\omega_1^2 r, \quad (1)$$

где ρ_1 – массовая плотность среды в столбе. Будем считать, что имеется нижний торцевой диск, который вращается с угловой скоростью ω_0, отличной от скорости вращения основного потока ω_1. Различие скоростей приводит при достаточно быстром вращении к возникновению вблизи поверхности торца тонкого пограничного слоя, в котором угловая скорость среды изменяется от ω_1 во внешнем потоке до ω_0 на торцевом диске. В силу того, что градиент давления (1) постоянен по толщине пограничного слоя, а центробежная сила изменяется с осевой координатой, равновесие, имеющее место для основного потока, в пограничном слое нарушается, и возникает вторичное течение. Оно носит характер наложенных на основной азимутальный поток радиального и осевого движений газа. Для характеристики соотношения между угловыми скоростями ω_1 и ω_0 введем параметр $m = \omega_1/\omega_0$. В зависимости от величины m направление радиального потока и связанное с ним осевое движение среды изменяют знак. Торцевые элементы, таким образом, определяют направление и интенсивность вторичного циркуляционного течения, налагающегося на одномерный вращательный поток. Если диск вращается медленнее внешнего потока ($m > 1$), вследствие действия вязких сил азимутальная скорость газа вблизи диска меньше, чем во внешнем потоке, градиент давления превышает центробежную силу, и радиальное течение вблизи диска направленно к оси. В силу неразрывности потока имеет место отток газа от диска. Если диск вращается быстрее внешнего потока ($m < 1$), возникает обратная ситуация и радиальное течение в пограничном слое направлено к периферии, а осевой поток имеет характер подсоса к диску. На рис. 1 показаны линии тока для случаев $m > 1$ (рис. 1а) и $m < 1$ (рис. 1б).

Если среда является проводящим газом и имеется осевое магнитное поле, динамика приторцевых течений усложняется. Помимо вязких сил и инерционных эффектов, важную роль начинают оказывать электромагнитные силы, связанные с протеканием электрического тока. На рис. 2а показана качественная картина распределения угловых скоростей ламинарного газового потока в пограничном слое вблизи протяженного диэлектрического диска. Введем цилиндрическую систему координат r, φ, z, плоскость $z = 0$ которой совпадает с поверхностью диска (рис. 2а). Внешнее однородное магнитное поле $\mathbf{B}$ направим вдоль оси вращения. Если, например, радиальное течение в пограничном слое направлено к оси, как показано на рис. 1б, то в силу взаимодействия азимутального тока j_φ с внешним магнитным полем B_z возникает объемная электромагнитная сила Ампера $F_r = j_\varphi B_z$, которая тормозит радиальный поток и, в силу неразрывности потока, осевой перенос плазмы. Рассмотрим случай слабоионизованной плазмы.

В рамках стационарного магнитогидродинамического изотермического приближения в пределе малых магнитных чисел Рейнольдса, когда можно пренебречь влиянием индуцированных магнитных полей и влиянием сжимаемости на вязкость, стационарные уравнения магнитной гидродинамики запишутся в виде [17]

$$\rho(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = -\nabla P + \eta\nabla^2\mathbf{V} + \mathbf{j}\times\mathbf{B}, \quad (2)$$

$$\nabla\cdot\rho\mathbf{V} = 0, \quad (3)$$

$$\nabla\mathbf{j} = 0, \quad (4)$$

где $\mathbf{V}$ – скорость среды, $\mathbf{j}$ – плотность электрического тока, ∇ – векторный оператор набла, η – коэффициент динамической вязкости среды, $\rho(r)$ – ее массовая плотность.

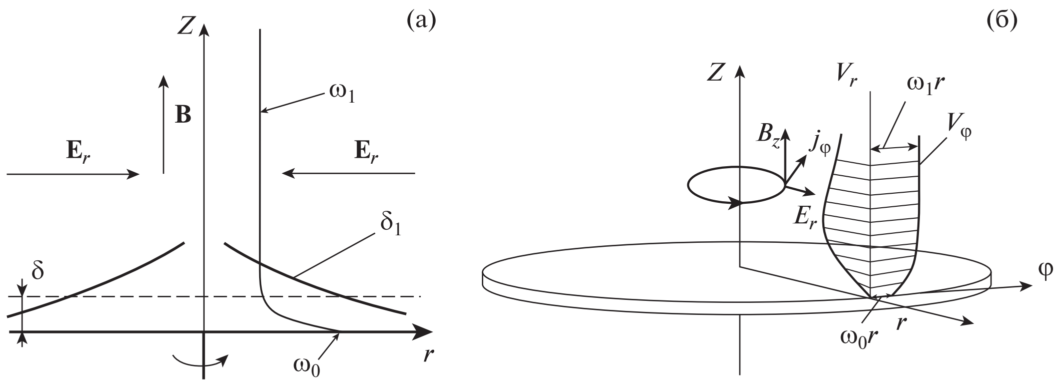

Рис. 2. Схема потока: а) пространственное распределение угловых скоростей вращения плазмы и толщины пограничного слоя при $\omega_0 > \omega_1$; б) осевые профили азимутальной и радиальной компонент скорости плазмы вблизи диска при $\omega_0 < \omega_1$.

Для вектора плотности электрического тока используем закон Ома в пренебрежении холловскими явлениями

$$\mathbf{j} = \sigma[\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}], \tag{5}$$

где σ – проводимость плазмы, $\mathbf{E}$ – напряженность электрического поля. Выражение (5) справедливо при выполнении условия $\beta_e \ll 1$, где β_e – параметр замагниченности электронов. В заключение мы оценим справедливость этого допущения. В рамках предположения о слабой ионизации среды данная модель соответствует обычному газу, на который дополнительно действуют силы Ампера.

В осесимметричном приближении справедливы следующие из (5) уравнения для компонент плотности электрического тока в пограничном слое

$$j_\varphi = -\sigma v_r B_z, \tag{6}$$

$$j_r = \sigma(E_r + v_\varphi B_z), \tag{7}$$

где v_r и v_φ – радиальная и азимутальная компоненты скорости, E_r – радиальная компонента электрического поля. Очевидно, что азимутальные токи замыкаются в силу геометрической конфигурации и $E_\varphi = 0$ (см. уравнение (6)).

Предполагая, что внешняя цепь в основном потоке разомкнута, из условия отсутствия радиального тока ($j_r = 0$) получим выражение для радиального электрического поля в пограничном слое

$$E_r^1 = -\omega_1 r B_z \tag{8}$$

Отметим, что электрическое поле E_r^1 не является внешним, а связано с разделением зарядов в основном объеме плазмы при ее вращении поперек магнитного поля. Это поле подобно генерируемому в плазме гидромагнитного конденсатора [18]. Предположим, следуя [19], что поле E_r в области пограничного слоя на диэлектрическом диске не изменяется с координатой и совпадает с полем E_r^1. При этом плотность радиального тока в пограничном слое не равна нулю, а изменяется в соответствии с (7) и зависимостью $v_\varphi(z)$. Выполнение неразрывности тока связано с его замыканием через внешнюю цепь [19].

Используя (1), (6)–(8), запишем уравнения пограничного слоя для безграничного диска в проекции на оси r и φ для сжимаемого проводящего газа

$$\rho\left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r}\right) = -\rho\omega_1^2 r + \eta \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \sigma B^2 v_r, \tag{9}$$

$$\rho\left(v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_r v_\varphi}{r}\right) = \eta \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} - \sigma B^2 \left(v_\varphi - \omega_1 r\right), \tag{10}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(\rho r v_r) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho r v_z) = 0, \tag{11}$$

где v_z – осевая компонента скорости. Поскольку уравнения (9), (10) записаны без учета влияния сжимаемости на вязкие силы в дальнейшем ограничимся случаем умеренных градиентов плотности.

Система (9)–(11) не содержит уравнения движения в проекции на ось z, так как последнее служит лишь для определения зависимости давления от осевой координаты [16, 20].

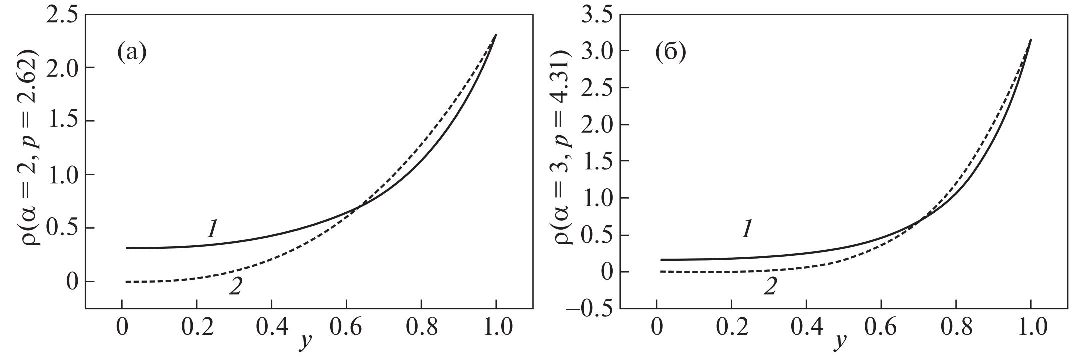

Рис. 3. Сравнение реального и модельного радиальных распределений плотности в случае различных параметров сжимаемости. *1* – экспоненциальное распределение (12), *2* – модельное степенное распределение (13).

В случае независимости плотности от радиуса ($\rho(r) = \mathrm{const}$) нелинейные уравнения пограничного слоя допускают известное автомодельное решение, в котором толщина пограничного слоя не зависит от радиальной координаты [21, 22] (рис. 2а). В случае $\rho(r) \neq \mathrm{const}$ задача усложняется.

В общем случае скоростей вращения газа, сравнимых со скоростью звука, имеет место перераспределение плотности по радиусу, определяемое в случае совершенного газа как

$$\rho = \rho^* \exp\left(\alpha y^2\right), \tag{12}$$

где ρ^* – плотность на оси, $\alpha = \dfrac{\mu\omega_1^2 R^2}{2\Re T}$ – параметр сжимаемости, μ – молекулярный вес, $y = \dfrac{r}{R}$, $\Re$ – универсальная газовая постоянная, T – абсолютная температура. В этом случае автомодельное решение МГД-уравнений отсутствует. Предпримем попытку найти решение задачи, максимально приближенное к действительности. Для этого аппроксимируем реальное распределение плотности степенной функцией

$$\rho(r) = \rho_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^p, \tag{13}$$

где $r_0 = \sqrt{\eta/\rho_0\omega_0}$; ρ_0 – постоянная; p – параметр, характеризующий радиальный градиент плотности. Найдем приближенное соотношение между α и p из условия равенства плотностей ρ_1 на боковой стенке при $r = R$ в случае обоих распределений.

Введем плотность наполнения $\langle\rho\rangle$, определяемую из условия

$$\pi R^2 L \langle\rho\rangle = 2\pi L \int_0^R \rho(r) r dr, \tag{14}$$

где L – высота столба газа.

Тогда из реального распределения (12) имеем

$$\rho_1^I = \langle\rho\rangle \frac{\alpha \exp\alpha}{\exp\alpha - 1} \tag{15}$$

Аналогично из модельного распределения (13) получим

$$\rho_1^{II} = \langle\rho\rangle \frac{2 + p}{2} \tag{16}$$

Приравнивая плотности из (15) и (16), найдем

$$\frac{\alpha \exp\alpha}{\exp\alpha - 1} = \frac{2 + p}{2} \tag{17}$$

Связь между α и p позволяет, например, определить, что при $\alpha = 2$ параметр $p = 2.62$, а при $\alpha = 3$ величина $p = 4.31$. На рис. 3а и 3б приведены зависимости плотности от безразмерного радиуса y для этих двух случаев соответственно. Отметим, что наибольшее расхождение точных и модельных кривых распределения плотности имеет место при малых радиусах, которые, как показано ниже, вносят наименьший вклад в раскручивающее или тормозящее воздействие диска в силу заметной зависимости от r момента вязких сил.

Предположим, что проводимость плазмы изменяется с радиальной координатой по следующему закону

$$\sigma = \sigma_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^p \tag{18}$$

В этом случае возможно получение автомодельного решения системы (9)–(11). В конце статьи мы обсудим влияние возможных отклонений от зависимости (18) для реальной газоразрядной плазмы.

Введем следующие преобразования

$$v_\varphi = \omega_0 r g(\xi), \quad v_r = \omega_0 r f(\xi),$$
$$v_z = \omega_0 r_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{p}{2}} w(\xi), \quad \xi = \frac{z}{r_0}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{p}{2}}, \tag{19}$$

которые сводят систему дифференциальных уравнений в частных производных к системе обыкновенных уравнений

$$f^2 + wf' + \frac{p}{2}\xi f f' - g^2 + m^2 = f'' - Sf, \tag{20}$$

$$2fg + wg' + \frac{p}{2}\xi f g' = g'' - S(g - m), \tag{21}$$

$$(2+p)f + w' + \frac{p}{2}\xi f' = 0, \tag{22}$$

где $S = \sigma_0 B^2 / \rho_0 \omega_0$ — магнитный параметр, а штрих означает дифференцирование по переменной ξ. Следует отметить, что аналитическое решение данной системы уравнений отсутствует даже при $p = 0$ и $S = 0$. Поэтому в целях демонстрации метода найдем решение системы в приближении Слезкина–Тарга [23]. Усредним левые части в уравнениях (20), (21) по толщине пограничного слоя с учетом уравнения неразрывности (22), а также граничных условий для радиальной и азимутальной компонент скорости

$$f(0) = 0, \quad f(\xi_1) = 0,$$
$$g(0) = 1, \quad g(\xi_1) = m, \quad g'(\xi_1) = 0, \tag{23}$$

где $\xi_1 = \frac{\delta_1}{r_0}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{p}{2}}$, δ_1 — зависящая от радиальной координаты размерная толщина пограничного слоя. Используя (20), (21), получим

$$A = \frac{1}{\xi_1}\int_0^{\xi_1}\left(f^2 + wf' + \frac{p}{2}\xi f f' - g^2 + Sg\right)d\xi + m^2, \tag{24}$$

$$B = \frac{1}{\xi_1}\int_0^{\xi_1}\left(2fg + wg' + \frac{p}{2}\xi f g' + Sg\right)d\xi - Sm, \tag{25}$$

$$A = f'', \tag{26}$$

$$B = g'' \tag{27}$$

Интегрируя (26), (27) с учетом граничных условий (23), получим

$$g(\xi) = 1 + (1-m)\left(\frac{\xi^2}{\xi_1^2} - 2\frac{\xi}{\xi_1}\right), \tag{28}$$

$$f(\xi) = \frac{A}{2}\left(\xi^2 - \xi\xi_1\right), \tag{29}$$

$$w(\xi) = \frac{(2+p)A}{12}\left(3\xi^2 - 2\frac{\xi^3}{\xi_1}\right). \tag{30}$$

При этом (24), (25) сводятся к соотношениям

$$A = \int_0^1\left[\left(\frac{p}{2}+3\right)f^2 - g^2 + m^2 + Sf\right]dZ, \tag{31}$$

$$2\frac{(1-m)}{\xi_1^2} = \int_0^1\left[\left(\frac{p}{2}+4\right)gf - m\left(\frac{p}{2}+2\right)f + Sg - Sm\right]dZ, \tag{32}$$

где $Z = \xi/\xi_1$.

Отметим, что в отличие от случая пренебрежения зависимостью плотности среды от радиальной координаты ($\delta_1 = \mathrm{const}$), когда толщина пограничного слоя не зависит от r ((рис. 2), пунктирная кривая), в рассматриваемом случае $\delta_1 \approx \gamma r^{-p/2}$, где γ – постоянная, подлежащая определению. На рис. 2а сплошной линией качественно проиллюстрирована зависимость толщины пограничного слоя от радиуса $\delta_1(r)$.

Интегрируя (31), (32) с учетом (28), (29) найдем

$$2\frac{(1-m)}{\xi_1^2} = \frac{A\xi_1^2}{12}\left[m\left(\frac{p}{2}+2\right) - \frac{1}{10}(3+7m)\left(\frac{p}{2}+4\right)\right] - Sm + \frac{S}{3}(1+2m), \tag{33}$$

$$A = \frac{A^2\xi_1^4}{120}\left(\frac{p}{2}+3\right) - \frac{1}{5} - \frac{4}{15}m + \frac{7}{15}m^2 - S\frac{A\xi_1^2}{12}. \tag{34}$$

При $S = 0$ решение системы (33), (34) совпадает с известными решениями, полученными методом Слезкина–Тарга в работах [21–23].

На рис. 4 и 5 приведены зависимости безразмерной толщины пограничного слоя ξ_1 на вращающемся диске и величины A, характеризующей интенсивность радиального потока в пограничном слое, от параметра p в случае $S = 0.5$ для значений m меньших и больших 1. Обращает на себя тот факт, что толщина пограничного слоя больше при меньших значениях параметра m. Это явление обусловлено несимметричным действием нелинейных инерционных членов в уравнении движения в проекции на ось r. При $m < 1$ осевой поток направлен к диску, а при $m > 1$ – в противоположном направлении.

Вычислим модуль момента сил сопротивления, действующих на одну сторону диска с радиусом R. Отметим, что величина момента изменяет знак в зависимости от того, вращается среда быстрее или медленнее диска

$$M = 2\pi\eta\int_0^R r^2\left|\frac{\partial v_\varphi}{\partial z}\right|_{z=0} dr. \tag{35}$$

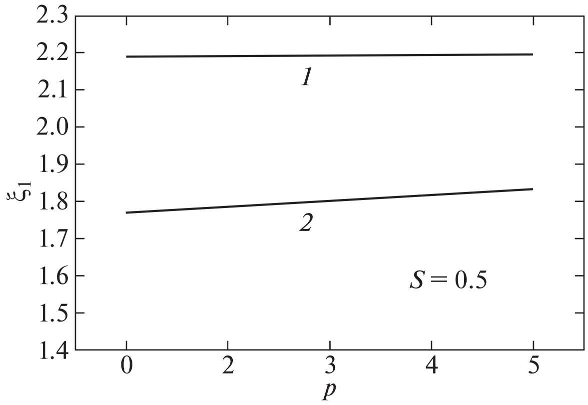

Рис. 4. Зависимость толщины пограничного слоя ξ_1 от параметра p для $S = 0.5$ и различных значений m: *1* – $m = 0.6$, *2* – $m = 1.4$.

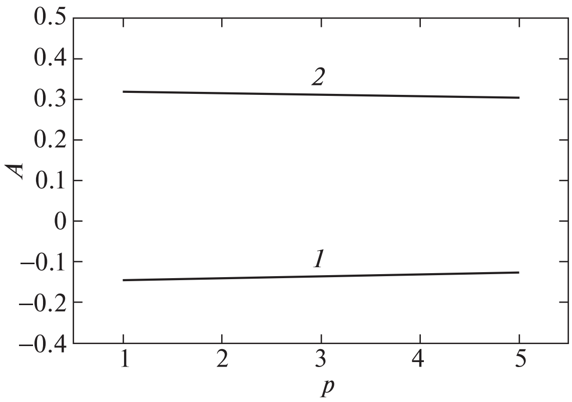

Рис. 5. Зависимость величины A от параметра p для $S = 0.5$ и различных m: *1* – $m = 0.6$, *2* – $m = 1.4$.

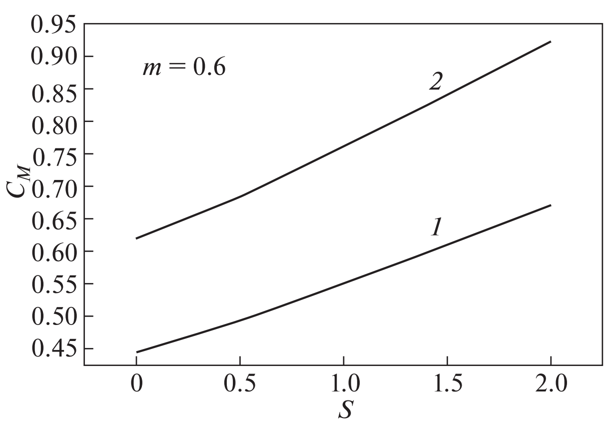

Рис. 6. Зависимость коэффициента момента сил сопротивления от магнитного параметра S для $m = 0.6$ при различных значениях параметра p: *1* – $p = 1$, *2* – $p = 3$.

Так как толщина пограничного слоя падает с уменьшением радиуса диска R, осевой градиент азимутальной скорости увеличивается с возрастанием R и, следовательно, момент сил трения при p, отличном от нуля, должен возрастать быстрее, чем R^4. Используя (29) и (35), в общем случае получим

$$M == \frac{8\pi\eta R^{4+\frac{p}{2}}\omega_0 r_0(1-m)}{\xi_1 r_o^{p/2}(8+p)}. \tag{36}$$

Коэффициент сопротивления определим как

$$C_M = \frac{2M}{\pi\langle\rho\rangle R^4\left(\langle\nu\rangle\omega_0^3\right)^{1/2}}, \tag{37}$$

где $\langle\nu\rangle = \eta/\langle\rho\rangle$.

Используя (36), (37), получим

$$C_M = \frac{8(1-m)(2+p)}{(8+p)\xi_1}. \tag{38}$$

На рис. 6 приведена зависимость величины C_M от параметра p.

Как видно из результатов расчета, увеличение радиального градиента плотности приводит к заметному возрастанию азимутальных сил трения в пограничном слое.

Предполагая осевую симметрию течения для потока подсоса к нижнему диску $Q_0 = \int_0^R \rho v_z 2\pi r dr$, имеем

$$Q_0 = \frac{A\xi_1^3\rho_0^{\frac{p+2}{4}}\pi R^{\frac{p+4}{2}}\omega_0^{\frac{p+2}{4}}(p+2)}{6(p+4)\eta^{\frac{p-2}{4}}}. \tag{39}$$

Введем безразмерный осевой поток

$$q = \frac{Q}{\langle\rho\rangle\sqrt{\langle\nu\rangle\omega_0}\pi R^2}. \tag{40}$$

На рис. 7 приведены результаты расчета безразмерного осевого потока плазмы в зависимости от параметра m при $p = 2$ и $S = 0$. При $m > 1$ поток положителен, так как имеет место отток плазмы от поверхности диска. При $m < 1$ наблюдается приток, вызванный радиальным переносом к периферии вследствие преобладания центробежной силы над радиальным градиентом давления.

На рис. 8 представлена зависимость осевого потока от магнитного поля при различных значениях параметра p в условиях преобладания центробежных сил над градиентом давления ($m < 1$, $q < 0$). Замедление вторичного течения связано с действием электромагнитной силы Ампера при радиальном течении плазмы поперек осевого магнитного поля. С увеличением радиального градиента плотности скорость циркуляции

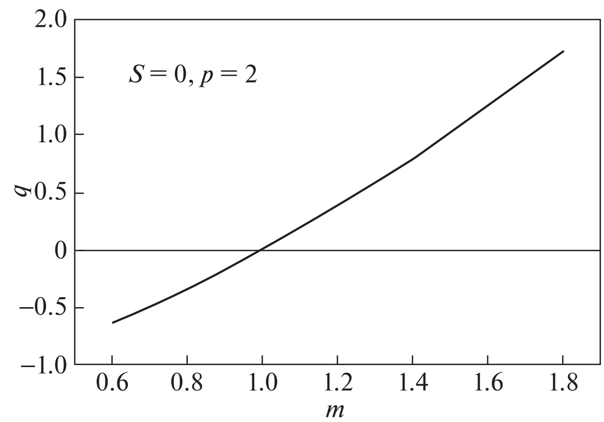

Рис. 7. Зависимость осевого потока от параметра m для $S = 0,\ p = 2$.

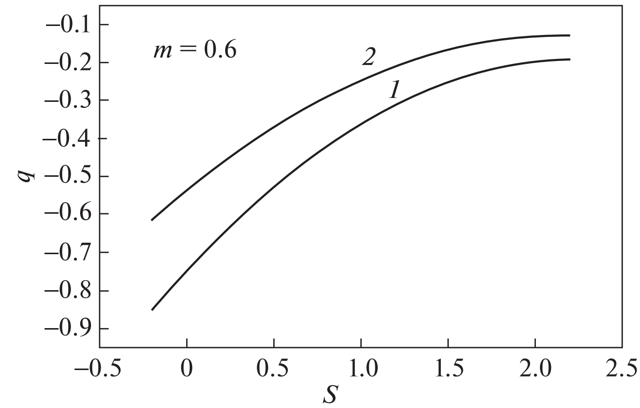

Рис. 8. Зависимость осевого подсоса плазмы к вращающемуся диску для различных параметров сжимаемости: *1* – $p = 1$, *2* – $p = 3$.

уменьшается, что связано с возрастанием радиальных вязких сил в пограничном слое. Оценим величину осевого подсоса к вращающемуся диску для ксеноновой слабоионизованной плазмы при следующих параметрах: $m = 0.6,\ S = 0.5,\ p = 2$. Положим среднюю массовую плотность $\langle\rho\rangle = 0.2$ кг/м^3, температуру нейтралов $T_n = 1000$ K, радиус $R = 0.5$ м. Учитывая, что при этих параметрах расчетные величины равны $\xi_1 = 2.141$, $A = -0.145$, $|q| = 0.448$, получим для потока $Q = 5\times10^{-2}$ кг/с.

Оценим справедливость при данных условиях однокомпонентного гидродинамического приближения в случае плазмы *Xe*. Полагая электронную температуру $T_e = 5$ эВ, степень ионизации 1% и принимая, согласно [24] эффективное поперечное сечение упругого рассеяния электронов на нейтральных частицах $\sigma_{en} \approx 3\times10^{-19}$ м^2 , кулоновское сечение электрон-ионного взаимодействия $\sigma_{ei} \approx 3\times10^{-18}$ м^2 , магнитную индукцию внешнего поля $B = 0.1$ Тл, получим для параметра замагниченности электронов $\beta_e \approx 3\times10^{-2}$.

Отметим, что при больших магнитных полях интенсивность вторичных МГД-потоков во внешнем осевом магнитном поле существенно уменьшается и можно пренебречь в уравнениях движения нелинейными инерционными силами, зависящими от радиальной скорости [25]. Решение задачи в случае больших S при граничных условиях

$$f(0) = 0, \quad f(\infty) = 0, \quad g(0) = 1, \quad g(\infty) = m \tag{41}$$

имеет вид

$$f(\xi) = \frac{(1-m)^2}{3S}\left[\exp\left(-\sqrt{S}\xi\right) - \exp\left(-2\sqrt{S}\xi\right)\right] + \frac{m(1-m)}{\sqrt{S}}\xi\exp\left(-\sqrt{S}\xi\right), \tag{42}$$

$$g(\xi) = m + (1-m)\exp\left(-\sqrt{S}\xi\right). \tag{43}$$

Уменьшение скорости радиального потока с возрастанием магнитного поля связано с эффектом Гартмана, приводящим к изменению профилей электромагнитных сил в пограничном слое.

Сравним производную $\frac{dg}{d\xi}(0)$, которая характеризует силу вязкого трения на поверхности диска при $S = 8$ и $m = 0.6$ в случае точного и приближенного решений. Из (43) получим $\frac{dg}{d\xi}(0) = 1.13$. Результат расчета с учетом приближенной формулы (29) дает $\frac{dg}{d\xi}(0) = 0.93$.

Отметим, что справедливость соотношения для зависимости проводимости реальной газоразрядной плазмы от радиальной и осевой координат (13), без использования которой нельзя получить автомодельное решение, требует более серьезного рассмотрения. Представляется, что отклонение от зависимости (18) в сторону уменьшения показателя степени в реальной газоразрядной плазме приведет к некоторому увеличению радиального течения в пограничном слое в силу уменьшения момента эффективной тормозящей электромагнитной силы $F_r = j_\varphi B_z = \sigma v_r B_z^2$ при больших r, но слабо повлияет на полный момент сил вязкого трения на диске, поскольку последний пропорционален $r^{4+p/2}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе автомодельного преобразования и метода Слезкина–Тарга в рамках уравнений магнитной гидродинамики выполнен расчет пограничного слоя сжимаемого плазменного потока над вращающимся с угловой скоростью диэлектрическим диском при наличии внешнего квазитвердого потока и осевого магнитного поля. Определена зависимость сил сопротивления, действующих на протяженный диск, от значений параметра сжимаемости p, отношения угловых скоростей внешнего потока $m = \omega_1/\omega_0$ и магнитного параметра S. Показано, что увеличение радиального сжатия плазмы приводит к возрастанию действующего на диск момента сил сопротивления вязкого потока. Как следует из результатов расчета, увеличение магнитного поля приводит к замедлению радиального течения вблизи диска независимо от соотношения между ω_1 и ω_0. С точки зрения применимости используемой при получении автомодельного решения степенной зависимости проводимости от радиальной координаты отметим, что отклонение от нее в сторону уменьшения показателя степени в реальной газоразрядной плазме приведет к некоторому увеличению радиального течения в пограничном слое в силу уменьшения момента эффективной тормозящей электромагнитной силы при больших r, но слабо повлияет на полный момент сил вязкого трения на диске.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pustovitov V.D.* // Plasma Physics Reports. 2003. V. 29. P. 105.
2. *Лахин В.П., Сорокина Е.А., Ильгисонис В.И., Коновальцева Л.В.* // Физика плазмы. 2015. Т. 41. № 12. С. 1054–1061
3. *Balbus S.A., Hawley J.F.* // Rev. of Mod. Phys. 1998. V. 70. № 1. P. 1–53.
4. *Михайловский А.Б., Ломинадзе Дж.Г., Чуриков А.П., Пустовитов В.Д.* // Физика плазмы. 2009. Т. 35. № 4. С. 307.
5. *Khalzov I.V., Smolyakov A.I., Ilgisonis V.I.* Energy of eigenmodes in magnetohydrodynamic flows of ideal fluids // Physics of Plasmas. 2008. V. 15. 054501.
6. *Vorona N.A., Gavrikov A.V., Kuzmichev S.D., Liziakin G.D., Melnikov A.D., Murzaev Y.A., Smirnov V.P., Timirkhanov R.A., Usmanov R.A.* // IEEE Transactions on Plasma Science. 2019. V. 47. № 2. P. 1223.
7. *Rax J.-M., Gueroult R.* // J. Plasma Phys. 2016. V. 82. 595820504.
8. *Gorshunov N.M., Potanin E.P.* // Plasma Physics Repots. 2020. V. 46. № 2. C. 147.
9. *Тимофеев А.В.* // Физика плазмы. 2020. Т. 46. № 6. С. 564.
10. *Villani S.,* (Ed.) *Uranium Enrichment*: Springer, 1979.
11. *Bogovalov S.V., Borman V.D., Borisevich V.D., Tronin V.N.* // Numerical Methods for Heat & Fluid Flow. 2017. V. 27. Issue 7. P. 1387.
12. *Потанин Е.П., Соснин Л.Ю., Чельцов А.Н.* // Атомная энергия. 2019. Т. 127. Вып. 3. С. 140.
13. *Gueroult R., Zweben S.J., Fisch N.J., Rax J.-M.* // Phys. Plasmas. 2019. 26. 043511. 10.1063.
14. *Borisevich V.D., Potanin E.P., Whichello J.V.* // Trans. Plasma Science. 2020. V. 48. № 10. P. 3472.
15. *Fetterman A.J., Fisch, N.J.* // Plasma Sources Sci. Technol. 2009. 18. 045003.
16. *Borisevich V.D., Potanin E.P., Whichello J.V.* // J. Fluid Mech. 2017. V. 829. P. 328 .
17. *Куликовский А.Г., Любимов Г.А.* Магнитная гидродинамика. М.: ГИФМЛ. 1962. 246 с.
18. *Baker W.R., Bratenahl A., DeSilva A.W., Kunkel W.B.* // Proceedings of the Fourth International Conference held (1959) *August 17–21*, at the Institute of Physics in Uppsala, Sweden. Edited by N. Robert Nilsson. Published by North-Holland.
19. *King W.S., Lewellen W.S.* // Phys. Fluids. 1964. V. 7. № 10. P. 1674.
20. *Dorfman L.A.* Hydrodynamic resistance and heat loss of rotating solids, Edinburgh, Oliver & Boyd. 1963.
21. *Потанин Е.П.* // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2013. № 1. С. 78.
22. *Горбачев Л.П., Потанин Е.П.* // Магнитная гидродинамика. 1969. № 2. С. 93.
23. *Тарг С.М.* Основные задачи теории ламинарных течений. М., Л.; Гостехиздат, 1951. 420 с.
24. Таблицы физических величин. Справочник / Под ред. акад. И.К. Кикоина. М.: Атомиздат, 1976. 1008 с.
25. *Горбачев Л.П., Потанин Е.П.* // Магнитная гидродинамика. 1968. № 2. С. 152.