ФИЗИКА ПЛАЗМЫ, 2022, том 48, № 10, с. 951–955

ИЗЛУЧЕНИЯ ПЛАЗМЫ

УДК 531.9

ОПТИЧЕСКАЯ ПРОВОДИМОСТЬ И РАВНОВЕСНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ В ПЛАЗМЕ СО СТОЛКНОВЕНИЯМИ

С. А. Тригер[a], *, **С. А. Маслов**[a], **

[a] *Объединенный институт высоких температур РАН, Москва, Россия*

*e-mail: satron@mail.ru

**e-mail: sergm90@mail.ru

Поступила в редакцию 8.06.2022 г.
После доработки 10.06.2022 г.
Принята к публикации 25.06.2022 г.

На основе выражений для частотно-зависящей проводимости умеренно неидеальной плазмы получено выражение для спектральной плотности равновесного излучения, зависящее не только от температуры, но и от плотности заряженных частиц.

Ключевые слова: физика плазмы, равновесное излучение, диэлектрическая проницаемость, оптическая проводимость, неидеальная плазма

DOI: 10.31857/S0367292122600534

Установленная М. Планком [1] спектральная плотность энергии термодинамически-равновесного излучения (в дальнейшем именуемого СПЭРИ) соответствует идеализированной модели абсолютно черного тела, которая существует в полости, заполненной излучением и ограниченной абсолютно поглощающим веществом. Предполагается, что излучение находится в термодинамическом равновесии с веществом, хотя эффекты взаимодействия фотонов с веществом, ограничивающим полость, в явном виде не учитываются [2]. В пренебрежении вкладом нулевых колебаний электромагнитного поля распределение Планка в объеме V имеет вид

$$e^{Pl}(\omega) \equiv \frac{dE(\omega)}{d\omega} = \frac{V\hbar}{\pi^2 c^3}\frac{\omega^3}{\exp(\hbar\omega/T) - 1}. \qquad (1)$$

Обычно такой вид СПЭРИ связан с рассмотрением макроскопического тела, находящегося в тепловом равновесии с окружающим его излучением черного тела (подробности и ссылки см. в [3, 4]). В выражении (1) T – температура окружающей этот объем среды (в энергетических единицах), c – скорость света в вакууме. Отметим, что до настоящего времени большое внимание уделялось изучению оптических свойств различных плазменных систем [5–8], но не исследованию СПЭРИ.

Вместе с тем, как было показано в [9–12], в общем случае неупорядоченной системы зарядов, взаимодействующих по закону Кулона, для произвольно сильного взаимодействия существует непосредственная связь между учитывающей частотную и пространственную дисперсию поперечной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon^{tr}(k,\omega)$ (ПДП) и СПЭРИ. Эта связь в наиболее общем виде, который учитывает взаимодействие собственного векторного потенциала поля с индуцированным им током, выражается соотношением [13]

$$e(\omega) = V\frac{\hbar\omega^2}{\pi^3}\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right)\int_0^\infty dkk^2\left(c^2k^2 + \omega_p^2\right)\times \\ \times\frac{\operatorname{Im}\varepsilon^{tr}(k,\omega)}{\left(\omega^2\operatorname{Re}\varepsilon^{tr}(k,\omega) - c^2k^2\right)^2 + \omega^4\left(\operatorname{Im}\varepsilon^{tr}(k,\omega)\right)^2} \qquad (2)$$

Поскольку СПЭРИ является равновесной флуктуационной характеристикой системы частиц и фотонов, вывод соотношения (2) не требует введения внешних полей и токов [10, 11] и производится, опираясь на усреднение Гамильтониана $\hat{H}$ фотонов, взаимодействующих с нерелятивистской квантовой плазмой (см., например, [14])

$$\hat{H} = \hat{H}_{part} + \hat{H}_{ph}. \qquad (3)$$

Здесь $\hat{H}_{part}$ является Гамильтонианом нерелятивистских частиц, взаимодействующих между собой по закону Кулона и находящихся в квантованном электромагнитном поле,

$$\hat{H}_{part} = \sum_a \frac{\hbar^2}{2m_a}\int d^3r\left(\nabla + \frac{iz_a e}{\hbar}\hat{\mathbf{A}}(r)\right)\times \\ \times\hat{\psi}_a^+(r)\left(\nabla - \frac{iz_a e}{\hbar}\hat{\mathbf{A}}(r)\right)\hat{\psi}_a(r) - \\ - \sum_a\int d^3r\hat{\psi}_a^+(r)\hat{\mu}_a\hat{\psi}_a(r)\nabla\times\hat{\mathbf{A}} + \hat{H}_{Coul}. \quad (4)$$

Величины $\hat{\psi}_a^+(\mathbf{r})$ и $\hat{\psi}_a(\mathbf{r})$ представляют собой операторы рождения и уничтожения для нерелятивистских частиц типа a с зарядом $z_a e$, массой m_a, собственным моментом μ_a; $N_a = \int d^3r\hat{\psi}_a^+(\mathbf{r})\hat{\psi}_a(\mathbf{r})$ является оператором полного числа частиц сорта a, а оператор $\hat{H}_{Coul}$ описывает кулоновское взаимодействие частиц

$$\hat{H}_{Coul} = \\ = \frac{1}{2}\sum_{a,b}\int d^3r_1 d^3r_2 u_{ab}\left(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|\right)\hat{\psi}_a^+(\mathbf{r}_1)\hat{\psi}_b^+(\mathbf{r}_2)\hat{\psi}_b(\mathbf{r}_2)\hat{\psi}_a(\mathbf{r}_1). \quad (5)$$

Здесь $u_{a,b}(r) \equiv z_a z_b/r$ это потенциал Кулона для частиц сортов a и b, а $\hat{H}_{ph}$ является Гамильтонианом свободного электромагнитного поля

$$\hat{H}_{ph} = \sum_{\mathbf{k},\lambda}\hbar\omega_{\mathbf{k}}k\hat{c}_{\mathbf{k},\lambda}^+\hat{c}_{\mathbf{k},\lambda}, \quad \omega_k = c|\mathbf{k}|. \quad (6)$$

Операторы $\hat{c}_{\mathbf{k},\lambda}^+$ и $\hat{c}_{\mathbf{k},\lambda}$ описывают рождение и уничтожение квантов электромагнитного поля с импульсом $\hbar\mathbf{k}$ и поляризацией λ и удовлетворяют коммутационным соотношениям $[\hat{c}_{\mathbf{k},\lambda}\hat{c}_{\mathbf{k}',\lambda'}^+] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\delta_{\lambda,\lambda'}$. Оператор $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r})$ описывает векторный потенциал квантованного электромагнитного поля

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = c\sum_{k,\lambda}\left(\frac{2\pi\hbar}{\omega_{\mathbf{k}}V}\right)^{1/2}\times \\ \times\left\{\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)}\hat{c}_{\mathbf{k},\lambda}\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) + \mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)*}\hat{c}_{\mathbf{k},\lambda}^+\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\right\}. \quad (7)$$

с векторами поляризации $e_{\mathbf{k}}^{(\lambda)}$, подчиняющимся соотношениям [14]

$$\mathrm{e}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)}\cdot\mathbf{k} = 0, \quad \sum_{\lambda=1}^{2}e_{\mathbf{k}\alpha}^{(\lambda)}e_{\mathbf{k}\beta}^{(\lambda)*} = \delta_{\alpha,\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}. \quad (8)$$

Поясним теперь вывод соотношения (2). Усредняя Гамильтониан $\hat{H}$ (3) можно выделить все члены квадратичные по операторам $\hat{c}_{\mathbf{k},\lambda}^+$ и $\hat{c}_{\mathbf{k},\lambda}$. Легко видеть, что кроме среднего от оператора (6) имеется еще один квадратичный по этим операторам член в $\hat{H}$, связанный с взаимодействием собственного тока в системе, вызванного собственным векторным потенциалом электромагнитного поля $\hat{\mathbf{A}}(r)$, с этим полем. Оба этих члена при усреднении Гамильтониана $\hat{H}$ выражаются через функцию распределения $f(k) = \sum_\lambda f_\lambda(k) \equiv \sum_\lambda\langle\hat{c}_{\mathbf{k},\lambda}^+\hat{c}_{\mathbf{k},\lambda}\rangle$ квантов электромагнитного поля в плазменной среде (явное выражение получено в [13]). В свою очередь функция $f(k)$ выражается через фотонную функцию Грина $D_{\alpha\beta}^R(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, t) = -\frac{i}{\hbar}\left\langle[\hat{\mathbf{A}}_\alpha(\mathbf{r}_1, t), \hat{\mathbf{A}}_\beta(\mathbf{r}_2, 0)]\right\rangle$ [15]

$$f(k) = -\left[\frac{1}{2} + \frac{k}{2\pi c}\int_0^\infty\frac{d\omega}{2\pi}\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right)\mathrm{Im}\,D^R(k,\omega)\right]. \quad (9)$$

Скобки $\langle\ldots\rangle$ в определении $f(k)$ означают усреднение в большом каноническом ансамбле для системы частиц и фотонов с химическим потенциалом фотонов равным нулю [2]. При этом фотонная функция Грина в плазме выражается через ПДП, в которой в принципе полностью учтены эффекты кулоновского взаимодействия частиц [11, 15]

$$D^R(k,\omega) = \frac{4\pi c^2}{\varepsilon^{tr}(k,\omega)\omega^2 - k^2c^2}, \\ \mathrm{Im}\,D^R(k,\omega) = -\frac{4\pi c^2\omega^2\,\mathrm{Im}\,\varepsilon^{tr}(k,\omega)}{\left|\varepsilon^{tr}(k,\omega)\omega^2 - k^2c^2\right|^2}. \quad (10)$$

Очевидно, что выражение (2) является всегда положительным благодаря явному включению в него нулевых колебаний поля.

Используемый подход позволяет наиболее полно описывать эффекты, относящиеся к частотной и пространственной дисперсии плазменной среды с учетом кулоновского взаимодействия частиц. Как следует из (2) СПЭРИ в плазме, находящейся в термодинамическом равновесии с излучением, отличается от Планковского распределения, которое соответствует идеальному фотонному газу. Для получения распределения Планка в (2) следует положить $\varepsilon^{tr}(k,\omega) = 1 + i0$, пренебрегая наличием среды. При этом СПЭРИ (2) содержит и нулевые колебания электромагнитного поля $e(\omega) = e^{Pl}(\omega) + V\hbar\omega^3/2\pi^2c^3$, как будет очевидно из следующих выражений.

Основные усилия последних двух десятилетий были посвящены проблеме влияния пространственной дисперсии свойств плазменной среды (наряду с частотной дисперсией) на вид СПЭРИ [9, 11]. Решение задачи о виде СПЭРИ в плазменной среде существенно, в частности, для астрофизических приложений (см. работы [16, 17], где пространственной дисперсией в нерелятивистской плазме пренебрегалось). Роль пространственной дисперсии в диэлектрической проницаемости особенно существенна для релятивистского случая [18]. Однако общего решения проблемы расчета СПЭРИ в плазме до сих пор нет, и разные подходы приводят к разным результатам. Трудности прежде всего связаны с отсутствием надежных выражений для ПДП даже в слабостолкновительной плазме и тем более в плазме, где существенны одновременно и столкновения и пространственная дисперсия.

В данной работе будет исследовано влияние столкновений на вид СПЭРИ в плазме с умеренной кулоновской неидеальностью в пренебрежении диссипацией, т.е. предполагается, что мнимая часть $\mathrm{Im}\,\varepsilon^{tr}(k,\omega)$ мала ("резонансное приближение"). В этом случае интегрирование по волновому вектору k может быть произведено благодаря возникающей $\delta\left[\omega^2\,\mathrm{Re}\,\varepsilon^{tr}(k,\omega)-c^2k^2\right]$-функции. Как было показано в [16, 17], такое приближение в пренебрежении пространственной дисперсией ПДП приводит к возникновению "щели" в СПЭРИ в бесстолкновительной плазме при частотах $\omega<\omega_{\mathrm{pe}}$, где ω_{pe} – плазменная частота электронов. Ниже определяется влияние учета столкновений в слабонеидеальной плазме на положение этой границы.

При этом можно опираться на зависимость проводимости неидеальной плазмы от частоты, весьма хорошо описывающую имеющиеся экспериментальные данные по оптическим свойствам в широком интервале частот, а также и статическую проводимость [19]. Для произвольного вырождения электронов частотно-зависящая проводимость $\sigma(\omega)$ (и связанная с ней диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(\omega)$) имеет вид

$$\sigma(\omega)=-\frac{2e^2}{3m_e}\int p\frac{\partial f_e^{(0)}}{\partial p}\frac{1}{\nu_{ei}(p)-i\omega}\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3},\qquad \varepsilon=1+\frac{4\pi i\sigma(\omega)}{\omega}. \tag{11}$$

Здесь $\nu_{ei}(p)$ является эффективной частотой электрон-ионных столкновений, а нормированная на плотность электронов n_e функция распределения имеет вид

$$f_e^{(0)}(p)=\left\{\exp\left(\frac{\epsilon(p)-\mu_e}{T}\right)+1\right\}^{-1},\quad \epsilon(p)=\frac{p^2}{2m_e},\qquad n_e=(2s+1)\int\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}f_e^{(0)}(p), \tag{12}$$

где для электронов спин $s=1/2$. Интересуясь далее невырожденными электронами с отрицательным химическим потенциалом $|\mu_e|\gg T$, переходя к функции распределения Максвелла в (11), (12) и

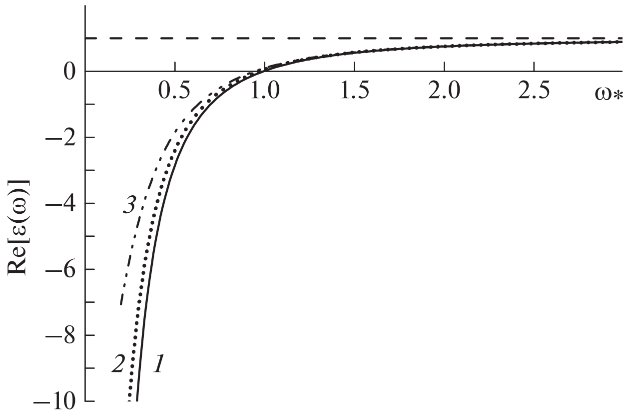

Рис. 1. Функция $\varepsilon'(\omega_*)$ при разных значениях $\Gamma=0.1$ (*1* – сплошная кривая), $\Gamma=0.3$ (*2* – пунктир), $\Gamma=1$ (*3* – штрихпунктир с двумя точками).

вводя переменную $x=p/m_ev_T$ $\left(v_T=\sqrt{T/m_e}\right)$ имеем для эффективной частоты столкновений

$$\nu_*(x)=\frac{\nu}{\omega_{pe}}=\frac{1}{\gamma_{\mathrm{E}}}\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\Gamma^{3/2}}{2x^3}\ln\left(1+\frac{4x^4}{3\Gamma^3}\right)^{1/2}, \tag{13}$$

где $\gamma_{\mathrm{E}}=0.5816$ фактор учитывающий электрон-электронные столкновения по Спитцеру, а заряд ионов для простоты выбран $Z=1$. Из (11) находим

$$\mathrm{R}e[\varepsilon(\omega)]\equiv\varepsilon'(\omega)=1-\frac{8}{3\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{x^4e^{-x^2}dx}{\nu_*(x)^2+\omega_*^2}. \tag{14}$$

Здесь введена безразмерная частота $\omega_*=\omega/\omega_{\mathrm{p}}$.

Величина $\varepsilon'(\omega)$ как функция ω_* при различных значениях Γ изображена на рис. 1. Значения корней уравнения $\varepsilon'(\omega)=0$ равны: $\omega_*=0.993$ при $\Gamma=0.1$; $\omega_*=0.970$ при $\Gamma=0.3$; $\omega_*=0.945$ при $\Gamma=1$. Таким образом, частота отсечки уменьшается с ростом Γ. Аналитически из (14) легко получить корень $\omega_*=1$ при $\Gamma=0$.

Интегрирование (2) с $\delta\left[\omega^2\,\mathrm{Re}\,\varepsilon^{tr}(k,\omega)-c^2k^2\right]$ с диэлектрической функцией $\mathrm{Re}\,\varepsilon^{tr}(k,\omega)=1-\omega_p^2/\omega^2$ функцией в пренебрежении пространственной дисперсией и столкновениями приводит к Планковскому распределению с перенормированными нулевыми колебаниями [13]

$$e_0(\omega)=\frac{V\hbar\omega^3}{2\pi^2c^3}\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{1/2}\theta(\omega-\omega_p)+\frac{V\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}\frac{1}{\exp(\hbar\omega/T)-1}\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{1/2}\theta(\omega-\omega_p), \tag{15}$$

где $\theta(x)$ – единичная ступенчатая функция Хевисайда. Два слагаемых в (15) отвечают использованию в соотношении (2) тождества $\coth(x/2) = 1 + 2/(\exp(x) - 1)$. Выражение (15) соответствует классическому результату Бриллюэна (см., например, [15]). Очевидно, что при переходе к случаю высоких частот, когда $\hbar\omega/T \gg 1$, в (15) основной вклад вносит первое слагаемое, соответствующее перенормированным (зависящим от плотности частиц) нулевым колебаниям. При этом зависящее от температуры второе слагаемое в (15), ведущее к модифицированному распределению Планка, оказывается при высоких частотах экспоненциально малым по сравнению с зависящей от плотности поправкой $-V\hbar\omega^2\omega_p^2/\left(4\pi^2c^3\right)$ к вакуумным нулевым колебаниям $V\hbar\omega^3/2\pi^2c^3$.

Интегрирование (2) в пренебрежении пространственной дисперсией с диэлектрической функцией $\varepsilon'(\omega)$ (14) приводит к СПЭРИ в виде

$$e(\omega) = \frac{V\hbar\omega_p^2\omega}{2\pi^2c^3}\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right)\times \times\sqrt{\varepsilon'(\omega)}\left(1+\frac{\omega^2}{\omega_p^2}\varepsilon'(\omega)\right)\theta(\varepsilon'(\omega)). \quad (16)$$

Введем переменную W, определяемую соотношением $\omega_* = \omega/\omega_p \equiv WT/\hbar\omega_p = (4\pi/3)^{1/6}W/\sqrt{2}\Gamma^{1/2}\eta^{1/3} \simeq \simeq 0.898W/\Gamma^{1/2}\eta^{1/3}$, где $\eta = n_e\Lambda^3$ и $\Lambda = (2\pi\hbar^2/m_eT)^{1/2}$ – длина волны Де-Бройля. Переходя к безразмерной форме СПЭРИ $\tilde{e}(W) = \pi^2c^3\hbar^2e(W)/VT^3$ получаем

$$\tilde{e}(W) = \frac{W^3}{2\omega_*^2(W;\Gamma,\eta)}\coth\left(\frac{W}{2}\right)\times \times\sqrt{\varepsilon'(W)}\left[1+\omega_*^2(W;\Gamma,\eta)\varepsilon'(W)\right]\theta(\varepsilon'(W)). \quad (17)$$

При $\omega_* \geq 1$ величина $W \geq 1.114\Gamma^{1/2}\eta^{1/3}$. Если $\eta < 0.1$ и $\Gamma \leq 1$ имеем $W > 0.51$, что захватывает широкую область левее максимума $W_{\max} = 2.822$ Планковского излучения, но находится правее границы щели в $\tilde{e}(W)$.

На рис. 2 показаны кривые для $\tilde{e}(W)$ в рассматриваемом приближении при разных параметрах Γ (кривые *3*, *4*, *5*). Очевидно, что граница щели при учете электрон-ионных столкновений сдвигается в сторону больших W. Полученные численные значения для границы щели при использовании переменной W и значении $\eta = 0.1$ равны: $W = 0.246$ при $\Gamma = 0.5$; $W = 0.366$ при $\Gamma = 0.75$; $W = 0.488$ при $\Gamma = 1$.

Для сравнения на этом же рисунке показано $e^{Pl}(W)$ (кривая *1*) и Планковское СПЭРИ с учетом нулевых вакуумных колебаний $e(W) = e^{Pl} + W^3/2$ (кривая *2*).

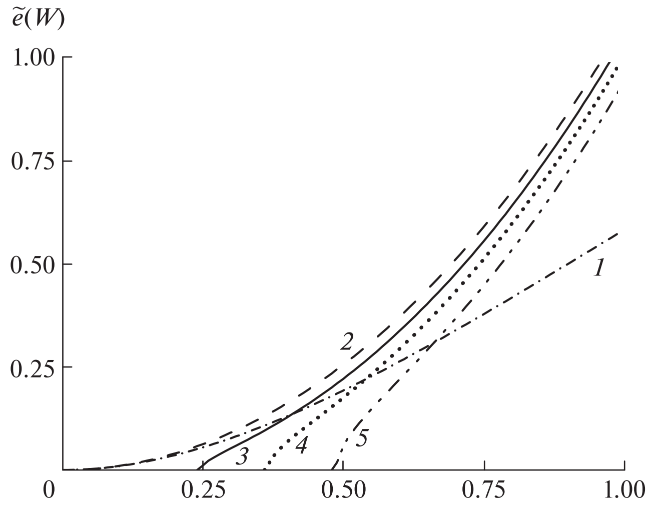

Рис. 2. Функции $e^{Pl}(W) = W^3[\exp(W) - 1]^{-1}$ (*1* – штрихпунктир), $e^{Pl}(W) + W^3/2$ (*2* – штриховая кривая) и функция $\tilde{e}(W)$ для $\eta = 0.1$ и разных параметров $\Gamma = 0.5$ (*3* – сплошная кривая), $\Gamma = 0.75$ (*4* – пунктир), $\Gamma = 1$ (*5* – штрихпунктир с двумя точками).

В настоящей статье на основе использования частотно-зависящей проводимости в Лоренцевском приближении численно получен сдвиг положения границы щели в СПЭРИ. Этот результат обобщает подход развитый для применения к излучению в плазме ранней Вселенной в [16, 17], где рассматривалась СПЭРИ в резонансном приближении без учета пространственной дисперсии. Учет столкновений в рассмотренной форме применим лишь для области частот $\hbar\omega/T \leq 1$, когда эффективная частота столкновений ν_* не зависит от ω. Нужно отметить, что при учете даже слабых столкновений, когда параметр неидеальности плазмы $\Gamma < 1$, правило для отделения в СПЭРИ нулевых колебаний отсутствует. Как было показано при рассмотрении СПЭРИ с зависящей от частоты и волнового вектора ПДП [13, 20] полное СПЭРИ в области прилегающей к максимуму находится в хорошем согласии с Планковской кривой, отличаясь от нее при низких и высоких частотах. Такое отличие могло иметь место в горячей плазме ранней Вселенной, влияя на ее эволюцию.

Однако проблема отделения нулевых флуктуаций и их перенормировка подобная (15), (16) в бесстолкновительной плазме требует дальнейшего анализа, так как эта проблема возникает только для конкретных моделей ПДП. Это не значит, что проблема существует для всех моделей ПДП.

Попытки найти модели ПДП, позволяющие сохранить нулевые флуктуации вакуума в традиционной форме являются предметом дальнейшего анализа. Вместе с тем, можно надеяться, что вопрос о видоизменении вида нулевых колебаний может быть решен экспериментально на основе измеримых эффектов (например, эффекта Казимира).

Авторы благодарны А.Г. Храпаку и С.А. Храпаку за обсуждения лоренцевской модели проводимости умеренно неидеальной плазмы и кулоновского логарифма. Работа выполнена в рамках гранта РНФ 22-29-00348.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Planck M.* // Ann. Phys. 1901. V. 309. P. 553.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. Часть 1. М.: Наука, 1976.
3. *Волокитин А.И., Перссон Б.Н.Дж.* // УФН. 2007. Т. 177. С. 921.
4. *Виноградов Е.А., Дорофеев И.А.* // УФН. 2009. Т. 179. С. 449.
5. *Reinholz H., Roepke G.* // Phys. Rev. E. 2012. V. 85. P. 036401. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.85.036401
6. *Arkhipov Y.V., Ashikbayeva A.B., Askaruly A., Davletov A.E., Tkachenko I.M.* // Phys. Rev. E. 2014. V. 90. P. 053102. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.90.053102
7. *Reinholz H., Roepke G., Rosmej S., Redmer R.* // Phys. Rev. E. 2015. V. 91. P. 043105. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.043105
8. *Veysman M., Roepke G., Winkel M., Reinholz H.* // Phys. Rev. E. 2016. V. 94. P. 013203. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.94.013203
9. *Opher M., Opher R.* // Phys. Rev. D. 1997. V. 56. P. 3296.
10. *Бобров В.Б., Соколов И.М., Тригер С.А.* // Письма в ЖЭТФ. 2015. Т. 101. С. 299.
11. *Бобров В.Б., Тригер С.А.* // ТМФ. 2016. Т. 187. С. 104.
12. *Игнатов А.М., Тригер С.А.* // Краткие сообщения по физике ФИАН. 2020. № 1. С. 6.
13. *Trigger S.A.* // Physica Scripta. 2020. V. 95. P. 075504. https://doi.org/10.1088/1402-4896/ab967f
14. *Ахиезер А.И., Пелетминский С.В.* Методы статистической физики. М.: Наука, 1977.
15. *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Статистическая физика. Часть 2. Теория конденсированного состояния. М.: Наука, 1978.
16. *Trigger S.A.* // Phys. Lett. A. 2007. V. 370. P. 365.
17. *Munirov V.R., Fish N.J.* // Phys. Rev. E. 2019. V. 100. P. 023202. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.100.023202
18. *Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А.* Основы электродинамики плазмы. М.: Высшая школа, 1988.
19. *Khrapak S.A., Khrapak A.G.* // Results in Phys. 2020. V. 17. P. 103163. https://doi.org/10.1016/j.rinp.2020.103163
20. *Maslov S.A., Trigger S.A.* // Phys. Plasmas. 2022. V. 29. P. 033302. https://doi.org/10.1063/5.0068253