

---



---

**КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ  
В ПЛАЗМЕ**


---



---

УДК 533.9

**О ДИСКРЕТНОМ СПЕКТРЕ ВЧ-ПОЛЕЙ В ПЛАЗМЕ VASIMR**© 2022 г. А. В. Тимофеев<sup>а, \*</sup>, Р. С. Чеботарев<sup>а</sup><sup>а</sup> НИЦ “Курчатовский институт”, Москва, Россия

\*e-mail: Timofeev\_av@nrcki.ru

Поступила в редакцию 22.07.2021 г.

После доработки 13.09.2021 г.

Принята к публикации 20.09.2021 г.

Рассматриваются процессы, происходящие в плазменном космическом двигателе VASIMR. В этом двигателе тяга возникает вследствие выброса потока ионов, ускоренных посредством ИЦР-взаимодействия в неоднородном магнитном поле. В экспериментах этот процесс сопровождался появлением вторичных ВЧ-полей. Их частота  $\omega$  кратна частоте ВЧ-поля  $\omega_0$ , используемого для ИЦР-нагрева ( $\omega = n\omega_0$ ). Вторичные ВЧ-поля наблюдались в магнитном сопле установки на значительном удалении от зоны ИЦР-нагрева. Амплитуда вторичных полей возрастала с номером гармоники  $n$ . Эти свойства могут быть объяснены в рамках представления о природе вторичных полей, развиваемого в настоящей статье

*Ключевые слова:* частотный спектр, ускорение плазмы, циклотронный резонанс, функция распределения ионов, магнитный звук

DOI: 10.31857/S0367292122020147

**1. ВВЕДЕНИЕ**

В системе VASIMR плазма создается в открытой магнитной ловушке с большим пробочным отношением. Поток плазмы, выходящий из ловушки, попадает в спадающее магнитное поле (магнитное сопло), где ионы ускоряются при ионно-циклотронном резонансном (ИЦР) взаимодействии. В магнитном сопле наряду с ускоренными ионами присутствует более плотная холодная компонента [1, 2]. Ее источником может быть газ, вводимый для создания плазмы, а также газ, образующийся на приемной пластине при нейтрализации потока плазмы.

В системе VASIMR наблюдались ВЧ-поля с частотами  $\omega$ , кратными частоте внешнего поля  $\omega = n\omega_0$ ,  $n \leq 15$  [1]. В [2] эти поля считаются вызванными неустойчивостью плазмы. Однако при этом остаются необъясненными характерные особенности вторичных ВЧ-полей, в частности, привязка частоты к гармоникам внешнего поля.

Мы полагаем, что появление гармоник приложенного ВЧ-поля свидетельствует о “сильном” ИЦР-нагреве, при котором приращение ларморовского радиуса ионов существенно превышает его начальные значения. При таком нагреве все ионы вне зависимости от начальной фазы ларморовского вращения приобретают близкие фазы, обеспечивающие ускорение — возникает совокупность псевдоволн, различающихся частотой и азимутальным волновым числом, которое совпа-

дает с номером гармоники  $m = n$ . (Такие образования называют также волнами Ван-Кампена или волнами, вызываемыми модулированными пучками [3])

Псевдоволны — нестабильные образования. В неоднородном магнитном поле разброс по скоростям продольного движения вызывает их распад, поэтому псевдоволны локализованы вблизи зоны ИЦР. Однако они могут возбуждать собственные колебания плазмы. При слабой диссипации последние способны распространяться на значительно большее расстояние, чем псевдоволны. Если поток плазмы стационарен, то частоты возбуждаемых псевдоволнами собственных колебаний совпадают с частотами псевдоволн. В области частот, превышающих ионную циклотронную, такими колебаниями могут быть магнитозвуковые.

В экспериментах [1] было обнаружено возрастание сигнала с увеличением номера гармоники  $n$ . В теоретической модели настоящей работы, в зависимости от радиуса возможен как рост сигнала с частотой, так и его спад, причем область спада имеет больший размер. Тем не менее, по-видимому, в экспериментах [1] датчик попадал в первую область.

Цель настоящей работы состоит в создании качественной модели явлений, происходящих при ИЦР-нагреве плазменного потока в системах типа VASIMR. Такой подход соответствует на-

чальному этапу экспериментального изучения процессов, происходящих в этой системе.

## 2. ИЦР-НАГРЕВ И ВОЗБУЖДЕНИЕ ПСЕВДОВОЛН

Покажем, что ИЦР-взаимодействие приводит к фазировке ускоряемых ионов на ларморовских окружностях. Проиллюстрируем это явление на простейшем примере ионов, движущихся в однородном стационарном магнитном поле в присутствии резонансного циркулярного ВЧ-поля ( $\omega = \omega_i$ ), вращающегося в ионную сторону

$$\dot{\mathbf{E}} = \omega_i \mathbf{E} \times \mathbf{b}, \quad (1)$$

где  $\omega_i$  – ионная циклотронная частота,  $\mathbf{b}$  – единичный вектор, направленный вдоль стационарного магнитного поля.

Взаимодействие ионов с ВЧ-полем описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{v}} = \omega_i \mathbf{v} \times \mathbf{b} + \frac{e}{m_i} \mathbf{E}. \quad (2)$$

Используя (1) и (2), получаем

$$\frac{d}{dt}(vE) = \frac{e}{m_i} E^2. \quad (3)$$

Согласно (3) проекция скорости иона на направление ВЧ-поля монотонно возрастает со временем. Если приращение скорости достаточно велико, то все ионы будут вращаться с фазами, близкими к ускоряющей фазе ВЧ-поля. Значение скорости ларморовского вращения определяется временем пролета ионов через зону циклотронного резонанса. В системе VASIMR плотность плазмы в области ее создания (ионизации газа)  $n_1$  намного превышает плотность плазмы в зоне ИЦР  $n_2$ . Поэтому между этими двумя областями должен существовать значительный перепад потенциала, ускоряющего ионы вдоль магнитного поля  $\Delta\Phi \sim \ln(n_1/n_2)T_e/e$ . Продольная скорость ионов определяет время пролета через резонансную зону, а вместе с ним и приращение скорости ларморовского вращения, полученное в результате ИЦР-взаимодействия.

ИЦР-нагрев потока ионов, проходящего через резонансную зону, порождает совокупность псевдоволн. Для описания этого явления примем, что поток, входящий в резонансную зону, азимутально симметричен, а радиальное распределение ларморовских центров  $r_L$  является гауссовским. В этом случае распределение ионов на

выходе из зоны ИЦР описывается следующим выражением:

$$\Phi(r_L, \rho_i, \varphi, v_{\parallel}) = \frac{1}{4\pi^2} n_0 \exp\left(-\left(\frac{r_L}{a}\right)^2\right) \times \delta(\rho_i - \Delta\rho_i) \delta(\varphi + \omega_0 t) \delta(v_{\parallel} - v_{\parallel 0}), \quad (4)$$

где  $\Delta\rho_i = c(E/B)\Delta t$ ,  $\Delta t$  – время ИЦР-взаимодействия,  $E$  – амплитуда ВЧ-поля,  $\varphi$  – фаза ларморовского вращения,  $\omega_0$  – частота ВЧ-поля,  $v_{\parallel 0} = (2e\Delta\Phi/m_i)^{1/2}$ . Элемент фазового объема полагается равным  $r_L dr_L d\chi_L \rho_i d\rho_i d\varphi dv_{\parallel} ds$ ,  $s$  – координата, отсчитываемая вдоль магнитного поля.

Радиус-вектор иона связан с радиус-вектором его ларморовского центра соотношением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_L + \boldsymbol{\rho}_i, \quad (5)$$

где  $\boldsymbol{\rho}_i$  – радиус-вектор иона на ларморовской окружности, отсчитываемый от ее центра.

Из соотношения (5) следует

$$r^2 = r_L^2 + \rho_i^2 - 2r_L \rho_i \cos(\varphi - \chi), \quad (6)$$

где  $\chi$  – азимут иона.

Используя (6), а также “теорему синусов” для треугольника, составленного векторами  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}_L$ ,  $\boldsymbol{\rho}_i$  получаем

$$\rho_i \sin(\varphi - \chi_L) = r \sin(\chi - \chi_L), \quad (7)$$

$$\frac{\partial(r_L, \chi_L)}{\partial(r, \chi)} = \frac{r}{r_L},$$

где  $\chi_L$  – азимут ларморовского центра иона.

В соответствии с (7), чтобы переменные  $r_L$ ,  $\chi_L$  заменить на  $r$ ,  $\chi$  надо в (4) использовать соотношение (6), а в выражении для фазового объема произвести замену  $r_L dr_L d\chi_L \rightarrow r dr d\chi$ . При этом распределение по координатам, ортогональным к магнитному полю, можно представить в виде

$$\Phi_{\perp}(r, \chi, \rho_i, \varphi) = H \left[ I_0(\beta) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} I_m(\beta) \cos(m\theta) \right], \quad (8)$$

где  $\beta = 2r\Delta\rho_i/a^2$ ,  $\theta = \varphi - \chi$ ,  $I_m$  – функция Бесселя мнимого аргумента,  $H = (n_0/4\pi^2) \exp(-(r^2 + (\Delta\rho_i)^2)/a^2) \delta(\rho_i - \Delta\rho_i) \delta(\varphi + \omega_0 t)$ . Считается, что приращение ларморовского радиуса  $\Delta\rho_i$  намного превышает его начальное значение. В этом случае все ионы приобретают одну и ту же фазу ларморовского вращения. В экспериментах [1]  $\Delta\rho_i/\rho_{i0} \approx 3$ .

Выражение (8) описывает плазменный шнур, смещенный с оси магнитного поля и вращающийся относительно нее с циклотронной частотой

той, равной частоте внешнего ВЧ-поля. При этом возникает электрический ток

$$\mathbf{j}_\perp = (v_r; v_\chi) \Phi_\perp = \rho_i \omega_i H \times \left( \sum_{m=1}^{\infty} L_m^{(-)}(\beta) \sin(m\theta); -I_1(\beta) - \sum_{m=1}^{\infty} L_m^{(+)}(\beta) \cos(m\theta) \right), \quad (9)$$

где  $L_m^{(\pm)}(\beta) = I_{m-1}(\beta) \pm I_{m+1}(\beta)$ .

Здесь использованы соотношения

$$v_r = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r} = \rho_i \omega \sin(\theta),$$

$$v_\chi = r\dot{\chi} = r \left( \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \right)' = (x\dot{y} - y\dot{x}) \frac{1}{r} = -\rho_i \omega \cos(\theta).$$

В системе VASIMR геометрия магнитного поля сложна – имеется участок однородного магнитного поля, на котором выполняется условие циклотронного резонанса. В прилегающей области можно положить  $d\omega_i/ds \approx -\omega/L$ , и для фазы ларморовского вращения использовать выражение

$$\varphi(s, t) = \varphi_0 - \omega t + \int ds \frac{\omega - \omega_i(s)}{v_\parallel}.$$

Если распределение ионов по продольной скорости немонотонно, то усреднение (9) по такому распределению приводит к затуханию наведенного тока с удалением от зоны ИЦР. Так, например, в случае гауссовского распределения по продольной скорости

$$f(v_\parallel) = \frac{1}{\pi^{1/2} v_\parallel} \exp\left(-\left(\frac{v_\parallel - v_{\parallel 0}}{v_\parallel}\right)^2\right),$$

где  $v_{\parallel 0} \gg v_\parallel$ , получаем

$$j \propto \exp\left(-\left(s^2 \frac{m\omega_0 v_\parallel}{4L v_{\parallel 0}^2}\right)^2\right).$$

В экспериментах [1] длина затухания мала по сравнению с расстоянием между зоной ИЦР и датчиком радиального электрического поля.

### 3. ВОЗБУЖДЕНИЕ МАГНИТОЗВУКОВЫХ КОЛЕБАНИЙ

Псевдоволны “привязаны” к зоне ИЦР, поэтому “сигнал” от этой зоны до датчика должен передаваться другим “переносчиком”. В области частот, превышающих ионную циклотронную, что характерно для магнитного сопла, ими могут быть магнитозвуковые колебания. Согласно изложенным выше представлениям о механизме ИЦР-нагрева азимутальное волновое число колебаний с частотой  $\omega = n\omega_0$  должно быть равно номеру гармоники  $m = n$ . Собственные МЗК плаз-

менного шнура с данным значением  $m$  различаются радиальной и аксиальной структурами. В случае плазменного шнура, однородного в продольном направлении, последние характеризуются собственными значениями  $N_\parallel$ .

Анализ азимутальной структуры колебаний критичен для излагаемой теории. В [1] такие измерения не проводились: приведены данные лишь об амплитуде колебаний в области, удаленной от зоны ИЦР. Учитывая неполноту экспериментальных данных, рассмотрим упрощенную картину явления. Будем считать, что псевдоволны локализованы в узкой зоне вблизи поверхности ИЦР  $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_p(r, \chi) \delta(s - s_R)$ , где они и возбуждают МЗК. Неоднородность магнитного поля, в котором распространяются МЗК, не имеет принципиального значения для рассматриваемого механизма распространения сигнала, и мы не будем ее учитывать.

В соответствии с экспериментальными данными [1] считаем, что ионная компонента плазмы состоит из двух частей – основной “холодной” и малой доли ионов, ускоренных при ИЦР-взаимодействии. При этих условиях радиальный профиль собственных МЗК плазменного шнура и соответствующий спектр собственных значений  $N_\parallel$  определяются “холодной” компонентой. Для этого используем систему однородных уравнений, характеризующих поперечные компоненты электрического поля

$$\begin{aligned} -N_\parallel^2 E_r - \frac{im}{r^2} \left( \frac{\partial(rE_\chi)}{\partial r} - imE_r \right) &= \\ &= -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 (E_r \epsilon_{11} + E_\chi \epsilon_{12}), \\ -N_\parallel^2 E_\chi + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rE_r)}{\partial r} - imE_r \right) \right) &= \\ &= -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 (E_r \epsilon_{21} + E_\chi \epsilon_{22}). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь  $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 1 + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_i^2 - \omega^2}$ ,  $\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = i \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_i^2 - \omega^2} \frac{\omega}{\omega_i}$ .

Продольная компонента электрического поля в МЗК мала  $E_\parallel/E_\perp \sim m_e/m_i \sim (1/7) \times 10^{-4}$  (аргон) и не учитывается в системе (10).

Анализ системы (10) показывает, что число собственных радиальных мод, отличающихся также и аксиальной структурой, равно их азимутальному волновому числу  $m$  ( $1 \leq p \leq m$ ). Число  $p$  нумерует собственные радиальные моды. Собственные значения  $N_\parallel$  для азимутальных мод с  $m = 3-10$  представлены на рис. 1.

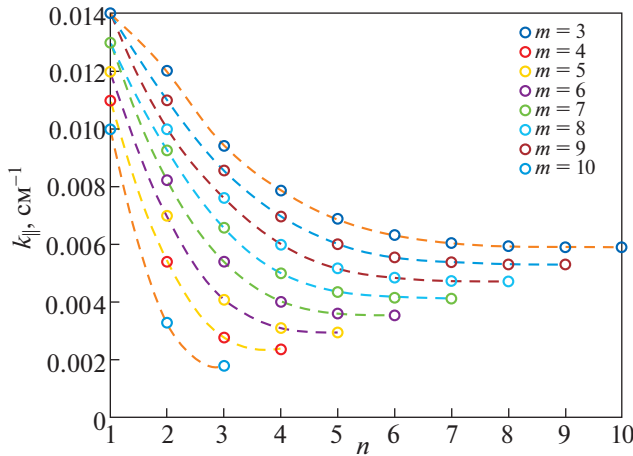


Рис. 1. Собственные значения  $k_{\parallel} = N_{\parallel}\omega/c$  для мод  $m = 3-10$ .

Характерную радиальную зависимость электрического поля собственных МЗК иллюстрирует рис. 2, построенный для моды  $m = 5$ ,  $p = 3$ .

Расчеты, результаты которых приведены на рис. 1, 2, производились для плазмы с гауссовским распределением плотности  $n(r) = n(0)\exp(-r/a)^2$ , при  $n(0) = 10^{12} \text{ см}^{-3}$ ,  $a = 1 \text{ см}$ ,  $\omega_0 = 1.25 \times 10^7 \text{ с}^{-1}$ , радиус идеально проводящей стенки принимался равным  $r_w = 6 \text{ см}$ .

Для нахождения амплитуды собственных колебаний используем уравнение баланса энергии, предполагающее, что работа тока псевдволн затрачивается на создание потока электромагнитной энергии собственных МЗК

$$\frac{dS}{ds} = -\mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{E}^*(\mathbf{r}), \quad (11)$$

где  $S = (c/4\pi)|\mathbf{E}|^2$ . Выражение для тока псевдволн было получено выше, см. (9). Квазинейтральность плазмы при наличии псевдволн поддерживается за счет продольных электронных токов. Их вклад в (11) не учитывается ввиду малой величины продольного электрического поля. Предполагается, что МЗК имеют вид волн, убегающих в сторону ослабления магнитного поля. В достаточно слабом магнитном поле они принимают вид геликонов, поглощение которых может быть обусловлено ЭЦР.

В (11) переменные величины представлены в комплексном виде, который более удобен при расчетах. Как и выше, считаем, что система при  $r = r_w$  ограничена идеально проводящей стенкой, поэтому поток электромагнитной энергии направлен вдоль оси системы от зоны ИЦР.

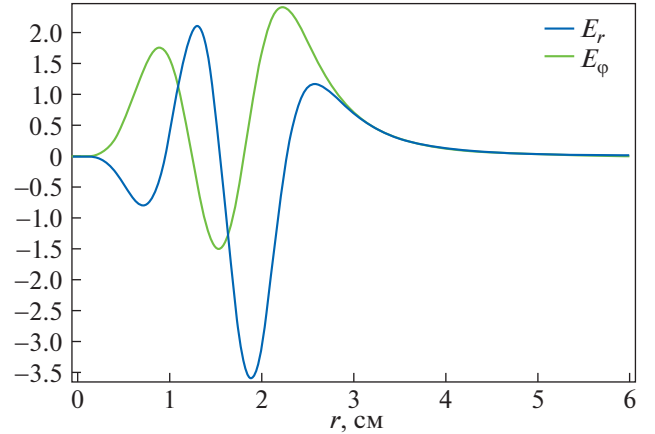


Рис. 2. Радиальная зависимость электрического поля моды  $m = 5$ ,  $p = 3$ .

Интегрируя (11) по объему, получаем

$$S_0 = -\int r dr d\chi \mathbf{j}_p \cdot \mathbf{E}^*, \quad (12)$$

где  $S_0$  — поток энергии в данной моде.

В системе VASIMR плазма неспокойна. Флуктуации плотности сопоставимы с ее средним значением, поэтому фаза собственных колебаний на пути от зоны ИЦР до области регистрации претерпевает значительные изменения. Будем считать, что флуктуации приводят к равномерному распределению фаз собственных колебаний в интервале  $(0, 2\pi)$ .

Способ регистрации суммарного сигнала с азимутальным числом  $m$  на частоте  $\omega = n\omega_0$ , ( $n = m$ ) определяет характер его связи с парциальными сигналами, обусловленными отдельными радиальными модами, нумеруемыми числом  $p$ . Если результирующий сигнал получен детектированием входящего, то

$$E_{r,\omega}^s = \sum_{1 \leq p \leq m} \langle E_{r,\omega,p} \sigma(E_{r,\omega,p}) \rangle, \quad (13)$$

где  $\sigma(E) = (1 + \text{sgn}(E))/2$ , скобки  $\langle \dots \rangle$  означают усреднение по случайному ансамблю.

Усредняться может также квадрат сигнала

$$E_{r,\omega}^s = \left( \sum_{1 \leq p \leq m} \langle E_{r,\omega,p}^2 \rangle \right)^{1/2}.$$

Для каждого конкретного значения  $m$  сигнал (радиальное электрическое поле) формируется всеми модами, различающимися значениями числа  $p$  ( $1 \leq p \leq m$ ), которое характеризует радиальную и аксиальную структуру колебаний. Суммирование полей этих мод по формуле (13) с весами, определяемыми (12), дает результат, приведенный на рис. 3. Значение поля бралось при  $r = 2.5 \text{ см}$ , где плотность составляет  $\sim 2\%$  от плот-

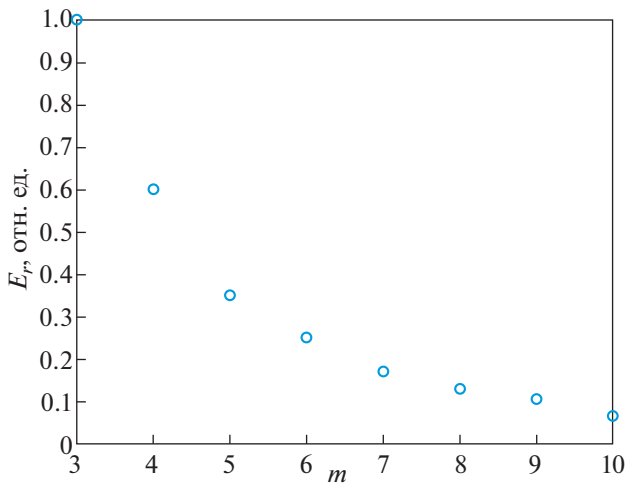


Рис. 3. Зависимость радиальной компоненты электрического поля собственных колебаний от азимутального волнового числа;  $n_0 = 10^{13} \text{ см}^{-3}$ ,  $a = 1 \text{ см}$ ,  $r = 2.5 \text{ см}$ ,  $r_w = 6 \text{ см}$ ,  $\Delta\rho_i/a = 3$ .

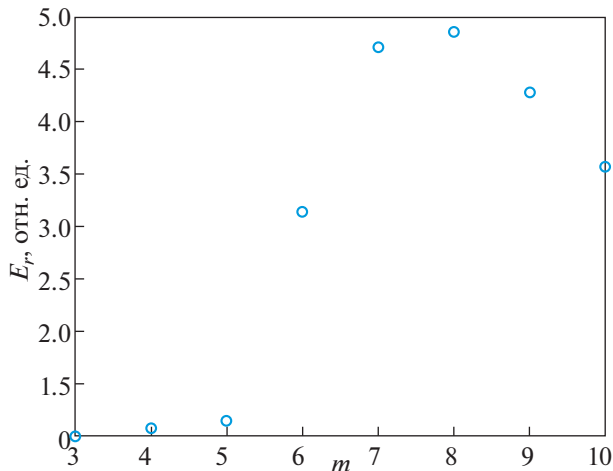


Рис. 4. Зависимость радиальной компоненты электрического поля собственных колебаний от азимутального волнового числа при  $r = 3 \text{ см}$ . Остальные параметры те же, что указаны в подписи к рис. 3.

ности в центре системы (в [1] электрическое поле измерялось на краю плазменного шнура). Как можно видеть, с номером  $m$  величина сигнала уменьшается. Однако на некотором участке изменения радиуса эта зависимость обращается, см. рис. 4, полученный для  $r = 3 \text{ см}$ . Можно предполагать, что датчик радиального электрического поля в [1] размещался в этой области.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе дается интерпретация ряда особенностей вторичных ВЧ-полей, наблюдавшихся при ИЦР-нагреве потока плазмы в системе VASIMR. Показано, что появление гар-

моник внешнего – первичного ВЧ-поля, используемого для ИЦР-нагрева, является следствием режима “сильного” нагрева, при котором приращение энергии ларморовского вращения существенно превосходит ее начальное значение. В этом случае распределение ионов на ларморовских окружностях становится неравномерным – ионы стягиваются к фазе, обеспечивающей максимальное ускорение – происходит образование псевдоволн, частоты которых кратны частоте первичного ВЧ-поля. Квазинейтральность псевдоволн поддерживается продольными электронными токами.

Псевдоволны “привязаны” к зоне ИЦР, однако они могут возбуждать собственные колебания плазмы, которые способны распространяться на значительные расстояния. Этим можно объяснить появление ВЧ-полей в области, удаленной от резонансной зоны. “Переносчиком” сигнала могут служить магнитозвуковые колебания, для которых плазма в системе VASIMR является прозрачной средой. В пользу этого предположения свидетельствует, в частности, крайне малая величина вторичного поля с частотой  $\omega = \omega_0$  [1, 2]. Действительно, МЗК с такой частотой имеют правую – электронную поляризацию электрического вектора, и поэтому не могут эффективно взаимодействовать с ионными псевдоволнами, возбуждаемыми при ИЦР-нагреве.

Электрическое поле собственных магнитозвуковых колебаний зависит от радиуса. Это свойство присуще и суммарному полю на частоте  $\omega = n\omega_0$ , которое определяется дискретным числом собственных радиальных мод. Анализ показал, что в зависимости от значения радиуса суммарное поле может как возрастать с номером  $n$ , так и спадать. Хотя вторая область имеет больший размер, не исключено попадание датчика радиального электрического поля в первую, что, по-видимому, происходило в экспериментах [1].

Авторы благодарны В.А. Жильцову, обратившему их внимание на проблему, рассматриваемую в настоящей работе.

Работа поддержана грантом РФФИ № 18-29-21002.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Olsen C.S. Space Physics Seminar at the University of Houston at Clear Lake. April 18, 2013, Bayou 1218; Dissertation Ph.D., University of Houston, 2013.
2. Giambusso M., Carter M.D., Chang Diaz F.R., McCaskill G., Squire J.P., Bering E.A. AIAA Propulsion and Energy Forum. Cincinnati, Ohio. 2018. Joint Propulsion Conference; Dissertation Ph. D., University of Houston, 2018.
3. Тимофеев А.В. Резонансные явления в колебаниях плазмы. М.: Физматлит, 2009.