

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН С ПЛАЗМОЙ

УДК 533.9.082.74;537.87

О РАССЕЯНИИ МИКРОВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ С КОНЕЧНОЙ АПЕРТУРОЙ НА ФЛУКТУАЦИЯХ ПЛОТНОСТИ В НЕОДНОРОДНОЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

© 2022 г. Е. Д. Господчиков^{а,*}, Т. А. Хусаинов^а, А. Г. Шалашов^а

^а Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород, Россия

*e-mail: egos@ipfran.ru

Поступила в редакцию 11.11.2021 г.

После доработки 20.11.2021 г.

Принята к публикации 21.11.2021 г.

Электродинамическая теорема взаимности используется для построения теории рассеяния микроволновых пучков с конечной апертурой на флуктуациях плотности в неоднородной магнитоактивной плазме. Основным результатом работы является представление спектральной плотности мощности детектируемого антенной рассеянного излучения в виде свертки функций Вигнера, характеризующих произвольные неоднородные в пространстве распределения зондирующего поля и поля приемной антенны, со спектром автокорреляционной функции флуктуаций плотности плазмы. Проанализированы эффекты неоднородности волнового поля и среды в различных предельных случаях. Приведен пример расчета эффективного уширения спектра рассеяния за счет неоднородности в планируемом эксперименте по коллективному рассеянию на установке ГДЛ.

Ключевые слова: электродинамика плазмы, рассеяние излучения на флуктуациях, электромагнитная теорема взаимности, магнитоактивная плазма, диагностика методом коллективного томсоновского рассеяния, ГДЛ

DOI: 10.31857/S0367292122030064

1. ВВЕДЕНИЕ

Коллективное томсоновское рассеяние мощного миллиметрового излучения на флуктуациях плотности магнитоактивной плазмы позволяет получать информацию о распределении ионов плазмы по скорости [1, 2], исследовать ионный состав [3–5], скорость вращения плазмы [6], индуцированные плазменные неустойчивости [3, 7–11] и спектры турбулентных флуктуаций плазмы [12–15]. Возможности анализа спектров рассеянного сигнала для диагностики функции распределения ионов были продемонстрированы экспериментально на токамаках TFTR, JET, TEXTOR, ASDEX-U, стеллараторах L2M, W7AS, LHD, TJII, W7X. Коллективное рассеяние миллиметрового излучения рассматривается как основной способ диагностики термоядерных альфа-частиц в токамаке-реакторе ИТЭР [16]. Недавно такая диагностика была предложена для определения функции распределения энергичных ионов в крупномасштабной открытой магнитной ловушке ГДЛ [17, 18].

В отличие от рассеяния лазерного излучения, использование более длинноволнового СВЧ-излучения для диагностики лабораторной плазмы ставит перед исследователями задачу корректно-

го учета эффектов рефракции и дифракции квазиоптических волновых пучков в неоднородной магнитоактивной плазме. Эти эффекты, как правило, учитываются при расчете распространения внешнего зондирующего излучения от антенны до области рассеяния и, соответственно, транспорта детектируемого в соответствии с диаграммой направленности приемной антенны рассеянного излучения от области перекрытия пучков. Такая задача обсуждалась в работах [19–21]; при этом обращалось внимание в основном на искажение формы квазиоптических волновых пучков и проблему верного расчета интеграла их перекрытия.

В настоящей работе мы обсуждаем другой фундаментальный аспект этой проблемы, связанный с неоднородностью СВЧ-поля и плазмы внутри области рассеяния. Отметим, что вопрос о том, как в формулу для эффективности рассеяния волн на флуктуациях плазмы, изначально полученную для плоских волн [22], корректно ввести конечную ширину спектра падающего пучка ранее, поднимался в [19, 23–25]. Однако долгое время такого рода вопросы не имели практического смысла из-за отсутствия адекватных средств моделирования распространения излучения в плаз-

ме больших установок. Используемый стандартный геометрический метод трассировки лучей не обладает достаточной точностью, чтобы корректно описывать эффекты дифракции. Ставшие естественным развитием лучевого подхода методы безабберационной квазиоптики предполагают навязывание пучкам гауссовой структуры [26–28]. Для этого случая довольно подробно было исследовано поведение интеграла пространственного перекрытия пучков в задаче рассеяния [20, 29]; при этом влияние конечной ширины спектра волновых пучков обсуждалось лишь на качественном уровне с привлечением более или менее обоснованных оценок [23].

В последнее время активно развиваются методы полноволнового моделирования СВЧ-поля в плазменных установках [30–32]; достигнут значительный прогресс в ускорении таких расчетов с использованием параллельных вычислений [31]. Кроме того, реализовано несколько подходов, позволяющих без ресурсоемкого полноволнового моделирования рассчитывать распределение поля с учетом рефракции, дифракции и пространственной дисперсии среды. Это, например, абберационный квазиоптический подход [33–36] и подход, основанный на решении кинетического уравнения для функций Вигнера [37–39]. Новые методы дают возможность учесть электродинамику задачи рассеяния микроволнового излучения более точно. Это ставит вопрос о том, как применять стандартные формулы задачи рассеяния, полученные в приближении плоских волн в однородной среде, к более сложным распределениям волнового поля в неоднородных средах.

В данной статье излагается метод расчета спектральной мощности рассеянного излучения, основанный на использовании теоремы взаимности для магнитоактивной плазмы. Сама по себе техника, основанная на теореме взаимности, не является новой. Общие её основы можно найти в учебниках [40–42], конкретные примеры применения для задач приема излучения из магнитоактивной плазмы, в том числе, для задачи рассеяния на флуктуациях плазмы, развиты в работах [19, 24, 25]. Тем не менее, мы считаем, что достаточно подробное формальное обоснование этого подхода для задачи рассеяния не является лишним. В разд. 2 и 3 мы повторяем стандартный вывод теоремы взаимности и обсуждаем ее применение для определения попадающей на антенну мощности излучения для заданных монохроматических токов и в случае рассеяния монохроматического излучения на монохроматических флуктуациях проводимости среды. В разд. 4 приводится один из возможных вариантов вывода максимально общего выражения для спектральной плотности мощности детектируемого антенной рассеянного излучения в виде свертки функций Вигнера, характеризующих произвольно не-

однородные распределения зондирующего поля и поля приемной антенны, со спектром автокорреляционной функции флуктуаций плазмы. Далее общие формулы анализируются для случая квазиоптических волновых пучков в плавнонеоднородной магнитоактивной плазме, имеющего большое практическое значение. В разд. 5 рассматривается еще более простой и допускающий аналитические оценки случай, в котором учитывается только неоднородность (конечность спектра) волнового поля, а среда и спектр флуктуаций в области рассеяния считаются однородными. В разд. 6 на примере анализа планируемого на установке ГДЛ (ИЯФ СО РАН) эксперимента по регистрации коллективного рассеяния микроволнового излучения показано, как развитая в работе теория может быть применена для интерпретации результатов квазиоптического или полноволнового расчета распределения полей в области рассеяния для волн электронного-циклотронного диапазона частот.

2. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ВЗАИМНОСТИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОПАДАЮЩЕЙ НА АНТЕННУ МОЩНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ ЗАДАНЫХ ТОКОВ

Рассмотрим два локализованных распределения гармонически меняющихся во времени токов $\mathbf{j}_{1,2}e^{-i\omega t}$ в двух разных стационарных и, в общем случае, неоднородных средах, заданных тензорами электрической и магнитной проницаемости $\hat{\epsilon}_{1,2}(\omega)$ и $\hat{\mu}_{1,2}(\omega)$. Данные токи порождают поля $\mathbf{E}_{1,2}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ и $\mathbf{H}_{1,2}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$. Запишем уравнения Максвелла для комплексных амплитуд введенных величин

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{E}_1 = ik_0 \hat{\mu}_1 \mathbf{H}_1 \\ \text{rot } \mathbf{H}_1 = -ik_0 \hat{\epsilon}_1 \mathbf{E}_1 + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_1, \\ \text{rot } \mathbf{E}_2 = ik_0 \hat{\mu}_2 \mathbf{H}_2 \\ \text{rot } \mathbf{H}_2 = -ik_0 \hat{\epsilon}_2 \mathbf{E}_2 + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_2. \end{cases}$$

В наиболее общем случае операторы $\hat{\epsilon}$ и $\hat{\mu}$ описывают линейную анизотропную среду с пространственной дисперсией, т. е. для каждой из сред

$$\begin{aligned} (\hat{\epsilon} \mathbf{E})_i(\mathbf{r}) &= \int \epsilon_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') E_j(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}', \\ (\hat{\mu} \mathbf{E})_i(\mathbf{r}) &= \int \mu_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') E_j(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}', \end{aligned}$$

где индексы i, j обозначают проекции на координатные оси, по повторяющемуся индексу j подразумевается суммирование, интеграл берется по некоторому объему V , занятому полем. В

среде без пространственной дисперсии интегральные свертки вырождаются в умножение вектора \mathbf{E} на числовую матрицу. Несмотря на то, что уравнения Максвелла отвечают разным источникам и разным средам, они записаны в одном и том же координатном пространстве \mathbf{r} . Поэтому для решений этих уравнений можно сформулировать формальное тождество

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_2 \operatorname{rot} \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_1 \operatorname{rot} \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1 \operatorname{rot} \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_2 \operatorname{rot} \mathbf{H}_1 = \\ = ik_0 \{ \mathbf{H}_2 \hat{\mu}_1 \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_1 \hat{\mu}_2 \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \hat{\epsilon}_1 \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_1 \hat{\epsilon}_2 \mathbf{E}_2 \} + \\ + \frac{4\pi}{c} (\mathbf{E}_2 \mathbf{j}_1 - \mathbf{E}_1 \mathbf{j}_2). \end{aligned} \quad (1)$$

Проинтегрируем полученное равенство по объему V . При этом учтем два обстоятельства. Во-первых, в левой части равенства (1) стоит в точности дивергенция поля $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1$. Во-вторых, интеграл от слагаемого в фигурных скобках даст нулевой вклад, если

$$\epsilon_{2ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \epsilon_{1ji}(\mathbf{r}', \mathbf{r}), \quad \mu_{2ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mu_{1ji}(\mathbf{r}', \mathbf{r}),$$

или, более кратко,

$$\hat{\epsilon}_2 = (\hat{\epsilon}_1)^T, \quad \hat{\mu}_2 = (\hat{\mu}_1)^T.$$

Таким образом, в этой статье под “транспонированием” мы понимаем не только перестановку индексов соответствующих тензоров, но и перестановку аргументов интегральной свертки по пространству в средах с пространственной дисперсией. В случае магнитоактивной плазмы это эквивалентно тому, что среда 2 получается из среды 1 сменой направления внешнего магнитного поля на противоположное [43].

С учетом сделанных замечаний после интегрирования (1) по конечному объему V получается равенство, известное в радиофизике как лемма Лоренца [40, 44]

$$\frac{c}{4\pi} \oint_{\partial V} (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) d\mathbf{S} = \int_V (\mathbf{E}_2 \mathbf{j}_1 - \mathbf{E}_1 \mathbf{j}_2) dV, \quad (2)$$

где под ∂V подразумевается граница области V . Поля на большом расстоянии от локализованных источников $\mathbf{j}_{1,2}$ должны иметь форму сферической волны, поэтому подынтегральное выражение в левой части спадает быстрее, чем $1/r^2$ при $r \rightarrow \infty$. Устремив область интегрирования в бесконечность, мы можем обратиться в ноль левую часть равенства (2). Полученное равенство

$$\int \mathbf{E}_2 \mathbf{j}_1 dV = \int \mathbf{E}_1 \mathbf{j}_2 dV, \quad (3)$$

связывающее комплексные амплитуды полей и токов в “прямой” и “транспонированной” средах, обычно и называется “теоремой взаимности” [40–43].

Пусть теперь $\mathbf{j}_1 = \mathbf{j}_{\text{pl}}$ описывает некоторый набор сторонних токов, возбужденных в магнитоактивной плазме, а $\mathbf{j}_2 = \mathbf{j}_{\text{ant}}$ описывает токи в некоторой антенне, работающей в режиме излучения. При этом в правой части (3) получается свертка поля, наводимого на антенну в режиме приема, с токами в антенне в режиме излучения. Вычислим квадрат модуля этой величины

$$\begin{aligned} \left| \int \mathbf{E}_1 \mathbf{j}_2 dV \right|^2 &= |U_{\text{rec}}|^2 |I_{\text{ant}}|^2 = \\ &= 16 \left(\frac{|U_{\text{rec}}|^2}{8R} \right) \left(\frac{|I_{\text{ant}}|^2 R}{2} \right) = 16 P_{\text{rec}} P_{\text{ant}}, \end{aligned} \quad (4)$$

где U_{rec} и P_{rec} – напряжение, наводимое на антенну в режиме приема, и детектируемая мощность в случае, когда поле создается токами \mathbf{j}_1 , I_{ant} и P_{ant} – ток в антенне и мощность в режиме работы на излучение, R – активная часть сопротивления излучения антенны. При определении детектируемой мощности мы учли, что в режиме согласованного приема сопротивление детектирующего элемента равно сопротивлению излучения антенны. С учетом (3) получаем универсальное соотношение, связывающее мощность излучения, принимаемого антенной, и излучающий ток

$$P_{\text{rec}} = \frac{1}{16 P_{\text{ant}}} \left| \int \mathbf{E}_2 \mathbf{j}_1 dV \right|^2 = \frac{1}{16 P_{\text{ant}}} \left| \int \mathbf{E}_{\text{ant}} \mathbf{j}_{\text{pl}} dV \right|^2. \quad (5)$$

Таким образом, общая схема расчета принимаемой антенной мощности выглядит следующим образом: рассчитывается поле \mathbf{E}_{ant} , создаваемое антенной в транспонированной среде в режиме на излучение, затем это поле сворачивается с заданными токами в плазме \mathbf{j}_{pl} и нормируется на полную излученную антенной мощность P_{ant} .

Заметим, что при выводе формулы (5) мы не требовали малость размеров антенны по сравнению с длиной волны, более того, наше утверждение не зависит от конкретной модели антенны. Например, в работе [25] полагалось, что антенна представляет собой рупор с волноводным выходом. В этой задаче формальные источники поля антенны находятся на бесконечности, а внутри объема V источники отсутствуют ($\mathbf{j}_2 = 0$). Поэтому вместо (4) мы должны рассчитать ненулевую левую часть выражения (2), считая, что интегрирование ведется по некоторому поперечному сечению волновода ∂V . Для этого разложим поля в волноводе по собственным модам, считая, что поле \mathbf{E}_1 состоит только из мод, бегущих от антен-

ны в сторону среды, а поле \mathbf{E}_2 представляет собой сумму встречных собственных мод, распространяющихся от антенны к среде и от среды к антенне:

$$\{\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1\} = \sum A_i \{\mathbf{E}_{(i)}^-, \mathbf{H}_{(i)}^-\},$$

$$\{\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2\} = \sum B_i^- \{\mathbf{E}_{(i)}^-, \mathbf{H}_{(i)}^-\} + \sum B_i^+ \{\mathbf{E}_{(i)}^+, \mathbf{H}_{(i)}^+\}.$$

Для собственных мод волновода выполнены соотношения ортогональности [40]

$$\oint_{\partial V} (\mathbf{E}_{(i)}^{\pm} \times \mathbf{H}_{(j)}^{\pm} - \mathbf{E}_{(j)}^{\pm} \times \mathbf{H}_{(i)}^{\pm}) d\mathbf{S} = 0,$$

$$\oint_{\partial V} (\mathbf{E}_{(i)}^+ \times \mathbf{H}_{(j)}^- - \mathbf{E}_{(j)}^- \times \mathbf{H}_{(i)}^+) d\mathbf{S} =$$

$$= 2 \oint_{\partial V} \mathbf{E}_{(i)}^+ \times \mathbf{H}_{(j)}^+ d\mathbf{S} = \frac{16\pi}{c} P_i \delta_{ij},$$

где P_i – полная мощность, переносимая модой через поперечное сечение волновода. Комбинируя эти соотношения, для левой части выражения (2) получим

$$\left| \frac{c}{4\pi} \oint_{\partial V} (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) d\mathbf{S} \right|^2 = \left| \sum 4A_i B_i^+ P_i \right|^2.$$

В режиме согласованного приема антенна настроена на прием/излучение одной выделенной моды, поэтому сумма в правой части состоит из одного слагаемого $(4P_i |A_i|^2)(4P_i |B_i^+|^2) = 16P_{\text{ant}} P_{\text{rec}}$. Учитывая также, что в правой части (2) стоит $\int \mathbf{E}_1 \mathbf{j}_2 dV = 0$, для принимаемой антенной мощности мы опять приходим к соотношению (5).

3. РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА МОНОХРОМАТИЧЕСКИХ ФЛУКТУАЦИЯХ ПЛОТНОСТИ ПЛАЗМЫ

В этом разделе мы рассмотрим излучение флуктуирующих токов, возбуждаемых в плазме внешним полем. Допустим, что монохроматический ток \mathbf{j}_p на заданной частоте ω есть результат взаимодействия монохроматической флуктуации плотности плазмы δn_e на частоте Ω и внешнего монохроматического поля \mathbf{E}_{in} , которое возбуждается источником с мощностью P_{in} на частоте $\omega' = \omega - \Omega$. Отметим, что поскольку внешнее поле осциллирует на смещенной частоте, то токи, его создающие, не входят в теорему взаимности для частоты ω . Усредненное по реализациям

флуктуаций равенство (5) можно представить в виде

$$P_{\text{rec}} = \frac{1}{16P_{\text{ant}}} \left\langle \left| \int \mathbf{E}_{\text{ant}} \left(\frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial n_e} \delta n_e \mathbf{E}_{\text{in}} \right) dV \right|^2 \right\rangle. \quad (6)$$

Здесь \mathbf{E}_{in} и δn_e комплексные амплитуды внешнего поля и флуктуаций плотности плазмы, а $\hat{\sigma}$ – тензор проводимости среды на частоте рассеянного поля ω ; все величины в круглых скобках должны вычисляться в “прямой” среде, а поле антенны \mathbf{E}_{ant} – в “транспонированной”. Поскольку отклик среды линеен по концентрации плазмы, в дальнейшем удобно использовать тензор поляризуемости $\hat{\chi} = (\hat{\epsilon} - \hat{I})/n_e$, который от концентрации плазмы не зависит. При этом

$$\frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial n_e} = \frac{\hat{\sigma}}{n_e} = \frac{(\hat{\epsilon} - \hat{I})\omega}{4\pi i n_e} = \frac{\omega}{4\pi i} \hat{\chi}.$$

Дальнейшие преобразования выражения (6) связаны с тем, что обычно нам не известно конкретное распределение величины δn_e , а известны только ее усредненные спектральные свойства, заданные автокорреляционной функцией флуктуаций

$$\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \left\langle \int \delta n_e(\mathbf{r} - \Delta\mathbf{r}/2) \delta n_e^*(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}/2) e^{i\mathbf{k}\Delta\mathbf{r}} d^3\Delta\mathbf{r} \right\rangle.$$

Введем по аналогии величины

$$W_{\text{ant}}^{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3 P_{\text{ant}}} \times$$

$$\times \int E_{\text{ant } i}(\mathbf{r} - \Delta\mathbf{r}/2) E_{\text{in } j}^*(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}/2) e^{i\mathbf{k}\Delta\mathbf{r}} d^3\Delta\mathbf{r},$$

$$W_{\text{in}}^{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3 P_{\text{in}}} \times$$

$$\times \int (\hat{\chi} \mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r} - \Delta\mathbf{r}/2))_i (\hat{\chi} \mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}/2))_j^* e^{i\mathbf{k}\Delta\mathbf{r}} d^3\Delta\mathbf{r},$$

которые можно интерпретировать как функции Вигнера для распределений комплексных амплитуд электрического поля, нормированные на мощность источников этих полей. Учитывая “обратные” соотношения

$$E_{\text{ant } i}(\mathbf{r} - \Delta\mathbf{r}/2) E_{\text{ant } j}^*(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}/2) =$$

$$= P_{\text{ant}} \int W_{\text{ant}}^{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\Delta\mathbf{r}} d^3\mathbf{k},$$

$$(\hat{\chi} \mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r} - \Delta\mathbf{r}/2))_i (\hat{\chi} \mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}/2))_j^* =$$

$$= P_{\text{in}} \int W_{\text{in}}^{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\Delta\mathbf{r}} d^3\mathbf{k},$$

$$\begin{aligned} \langle \delta n_e(\mathbf{r} - \Delta\mathbf{r}/2) \delta n_e^*(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}/2) \rangle = \\ = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\Delta\mathbf{r}} d^3\mathbf{k}, \end{aligned}$$

левую часть (6) можно выразить через введенные выше корреляторы:

$$\begin{aligned} \left\langle \left| \int \mathbf{E}_{\text{ant}} (\hat{\chi} \delta n_e \mathbf{E}_{\text{in}}) dV \right|^2 \right\rangle = \\ = \iint (\mathbf{E}'_{\text{ant}} \hat{\chi}' \mathbf{E}'_{\text{in}}) (\mathbf{E}''_{\text{ant}} \hat{\chi}'' \mathbf{E}''_{\text{in}})^* \langle \delta n_e \delta n_e^* \rangle d^3\mathbf{r}' d^3\mathbf{r}'' = \\ = \frac{1}{(2\pi)^3} P_{\text{ant}} P_{\text{in}} \int W_{\text{ant}}^{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{k}_1) W_{\text{in}}^{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{k}_2) \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{k}_3) \times \\ \times \exp[-i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)\Delta\mathbf{r}] d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2 d^3\mathbf{k}_3 d^3\mathbf{r} d^3\Delta\mathbf{r}. \end{aligned}$$

Здесь штрихи обозначают величины, зависящие от координат \mathbf{r}' и \mathbf{r}'' ; в последнем интеграле мы перешли к $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \Delta\mathbf{r}/2$, $\mathbf{r}'' = \mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}/2$ и учли, что якобиан преобразования от $(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')$ к $(\mathbf{r}, \Delta\mathbf{r})$ равен единице; по повторяющимся индексам i и j в тензорах W^{ij} берется суммирование. В результате взятия интеграла по $\Delta\mathbf{r}$ формируется дельта-функция $(2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)$, выражающая условие трехволнового синхронизма. В итоге выражение для принимаемой мощности (6) приводится к виду

$$\begin{aligned} P_{\text{rec}} = \frac{\omega^2 P_{\text{in}}}{(16\pi)^2} \int W_{\text{ant}}^{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{k}_1) W_{\text{in}}^{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{k}_2) \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \times \\ \times \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2 d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (7)$$

Обратим внимание еще раз на то, что при вычислении W_{ant}^{ij} излучаемое антенной поле должно определяться для транспонированной среды.

4. СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ МОЩНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ, РАССЕЯННОГО НА ФЛУКТУАЦИЯХ ПЛОТНОСТИ ПЛАЗМЫ

Важное практическое значение имеет обобщение формулы (7) на случай немонохроматических полей в стационарной фоновой среде с зависящими от времени флуктуациями. В этом случае мы можем ввести дополнительное усреднение по интервалу времени T , который предполагается много больше всех характерных времен рассматриваемой задачи. При этом спектральные харак-

теристики флуктуаций описываются “стационарной” автокорреляционной функцией

$$\begin{aligned} \Gamma_{\Omega}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi T} \left\langle \int \delta n_e(\mathbf{r} - \Delta\mathbf{r}/2, t - \Delta t/2) \times \right. \\ \left. \times \delta n_e^*(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}/2, t + \Delta t/2) e^{i\mathbf{k}\Delta\mathbf{r} - i\Omega\Delta t} d^3\Delta\mathbf{r} d\Delta t dt \right\rangle, \end{aligned}$$

где интеграл по t берется по интервалу времени T , а индекс Ω указывает на то, что величина относится к единичному интервалу частот $d\Omega$. Введенная величина связана с общепринятой спектральной функцией рассеяния соотношением [22]

$$\Gamma_{\Omega}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = n_e(\mathbf{r}) \frac{S(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \Omega)}{2\pi}, \quad (8)$$

зависимость S от пространственной координаты в магнитоактивной плазме может появляться из-за неоднородности магнитного поля. Для стационарных флуктуаций средняя автокорреляционная функция не зависит от центрального времени t , поэтому верно $\langle \delta n_{e\Omega} \delta n_{e\Omega}^* \rangle = \Gamma_{\Omega} \delta(\Omega - \Omega')$.

То есть при решении задач рассеяния электромагнитного излучения на стационарных флуктуациях плазмы в (7) следует подставлять величину Γ_{Ω} . При этом падающее электромагнитное поле можно без ограничения общности считать монохроматическим с частотой ω' , а мощность рассеянного на флуктуациях излучения должна быть отнесена к единичному интервалу частот, причем $d\omega = d\Omega$ в силу связи $\Omega = \omega - \omega'$. В результате соотношение (7) можно переписать для спектральной мощности излучения, приходящего на антенну, как

$$\begin{aligned} \frac{dP_{\text{rec}}}{d\omega} = \frac{\omega^2 P_{\text{in}}}{(16\pi)^2} \int W_{\text{ant}}^{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{k}_1) W_{\text{in}}^{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{k}_2) \Gamma_{\Omega}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \times \\ \times \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2 d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (9)$$

Рассмотрим более подробно случай рассеяния в плавнонеоднородной плазме. В рамках приближения геометрической оптики есть быстроменяющаяся в пространстве фаза поля, а остальные величины меняются в пространстве плавно на масштабах длины волны. В этих условиях можно выделить нормальные моды $\mathbf{E} = E\mathbf{e}$, которые характеризуются комплексным вектором поляризации $\mathbf{e}(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ и комплексной скалярной амплитудой $E(\mathbf{r})$ [43, 45]. В магнитоактивной плазме это обыкновенная и необыкновенная волны. При решении задачи рассеяния в плавнонеоднородной среде мы будем считать, что падающее и рассеянное поля отвечают определенным (не обязательно одинаковым) нормальным волнам. На

практике выбор моды рассеянного излучения определяется тем, на прием какой волны настроена антенна.

Можно показать, что в первом неисчезающем приближении по малому параметру геометрической оптики “тензорная” часть функции Вигнера определяется тензорным произведением векторов поляризации, а “скалярная” часть функция Вигнера берется как свертка скалярных комплексных амплитуд [38]. В нашем случае получаем

$$W_{\text{ant}}^{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = (\mathbf{e}_{\text{ant}})_i (\mathbf{e}_{\text{ant}})_j W_{\text{ant}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}),$$

$$W_{\text{in}}^{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = (\hat{\chi} \mathbf{e}_{\text{in}})_i (\hat{\chi} \mathbf{e}_{\text{in}})_j^* W_{\text{in}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}),$$

где

$$W_{\dots}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3 P_{\dots}} \times \int E_{\dots}(\mathbf{r} - \Delta\mathbf{r}/2) E_{\dots}^*(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}/2) e^{i\mathbf{k}\Delta\mathbf{r}} d^3\Delta\mathbf{r}, \quad (10)$$

многоточие означает “ant” для излучения антенны и “in” для падающего излучения. Заметим, что именно в рамках геометрооптического приближения свойства среды ($\hat{\chi}$) перестали входить в скалярную функцию Вигнера W_{in} . Прямым вычислением нетрудно убедиться, что

$$P_{\dots} \int W_{\dots}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) d^3\mathbf{k} = |E_{\dots}(\mathbf{r})|^2,$$

и ввести интеграл пересечения волновых пучков

$$I_b = \int |E_{\text{ant}}|^2 |E_{\text{in}}|^2 d^3\mathbf{r} = P_{\text{ant}} P_{\text{in}} \int W_{\text{ant}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}_1) W_{\text{in}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}_2) d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2 d^3\mathbf{r}.$$

Умножим и поделим на это соотношение правую часть (9) и возьмем интеграл по \mathbf{k} . В результате получим выражение для спектральной мощности рассеянного излучения в плавнонеоднородной среде в виде

$$\frac{dP_{\text{rec}}}{d\omega} = \frac{\omega^2 P_{\text{in}} I_b}{(16\pi)^2} \times \int \langle \langle |\mathbf{e}_{\text{ant}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}_1) \cdot \hat{\chi} \mathbf{e}_{\text{in}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}_2)|^2 \Gamma_{\Omega}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \rangle \rangle d^3\mathbf{k}, \quad (11)$$

где усреднение $\langle \langle \dots \rangle \rangle$ вводится как

$$\langle \langle F \rangle \rangle = \frac{\int F(\mathbf{r}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) W_{\text{ant}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}_1) W_{\text{in}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}_2) d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2 d^3\mathbf{r}}{\int W_{\text{ant}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}_1) W_{\text{in}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}_2) d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2 d^3\mathbf{r}}.$$

Здесь функции Вигнера определяют вес при усреднении геометрооптической, по сути, эффективности рассеяния; однако сами функции Вигнера должны находиться вне рамок геометрооптического приближения. Эта иерархия представляется нам наиболее удобной формой для качественного физического анализа, а также для применения в полноволновых расчетах, результатом которых является пространственное распределение комплексных амплитуд полей $E(\mathbf{r})$. Формула (11) позволяет решить задачу рассеяния непосредственно для поля $E(\mathbf{r})$ без привлечения какого-либо дополнительного способа введения волнового вектора в неоднородной среде. Отметим, что для квазиоптических волновых пучков скалярные функции Вигнера, как правило, плавные функции координат (нет быстро осциллирующих по пространственной координате гармоник) и узкие локализованные функции в пространстве волновых векторов.

В квазиоптическом приближении скалярная амплитуда поля наиболее естественно нормируется на интенсивность излучения J в пучке, определенную как плотность потока энергии в направлении локальной групповой скорости [46]. В геометрической оптике эта величина связана со скалярной амплитудой поля стандартным соотношением

$$J_{\dots}(\mathbf{r}) = \kappa_{\dots}(\mathbf{r}) \frac{c}{8\pi} |E_{\dots}(\mathbf{r})|^2, \quad \kappa_{\dots} = \frac{(\mathbf{e}_{\dots}^* \hat{\epsilon}^H \mathbf{e}_{\dots})}{N_{\dots} |\cos \theta_{\dots}|},$$

где $\hat{\epsilon}^H$ – эрмитова часть тензора диэлектрической проницаемости, N – показатель преломления заданной нормальной волны, θ – угол между волновым вектором и групповой скоростью в анизотропной среде (в изотропной среде $\kappa = N$). Зависимость коэффициента κ от координаты определяется только фоновой средой, но не полем и флуктуациями. В неоднородной магнитоактивной плазме вариация коэффициента κ в области рассеяния может быть существенной. Поэтому удобно с самого начала ввести этот коэффициент в нормировку функций Вигнера, определив

$$\tilde{W}_{\dots}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \kappa_{\dots}(\mathbf{r}) W_{\dots}(\mathbf{r}, \mathbf{k}).$$

Это позволяет определить стандартный интеграл перекрытия пучков по интенсивности, традиционно используемый в теории рассеяния,

$$O_b = \frac{1}{P_{\text{ant}} P_{\text{in}}} \int J_{\text{ant}} J_{\text{in}} d^3\mathbf{r} = \frac{c^2}{(8\pi)^2} \int \tilde{W}_{\text{ant}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}_1) \tilde{W}_{\text{in}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}_2) d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2 d^3\mathbf{r},$$

и переписать формулу (11), введя операцию усреднения с новой весовой функцией

$$\begin{aligned} \langle\langle F \rangle\rangle^{\sim} &= \\ &= \frac{\int F(\mathbf{r}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \tilde{W}_{\text{ant}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}_1) \tilde{W}_{\text{in}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}_2) d^3 \mathbf{k}_1 d^3 \mathbf{k}_2 d^3 \mathbf{r}}{\int \tilde{W}_{\text{ant}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}_1) \tilde{W}_{\text{in}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}_2) d^3 \mathbf{k}_1 d^3 \mathbf{k}_2 d^3 \mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Как и прежде, операция усреднения содержит информацию о пространственном распределении интенсивностей полей и о ширине их спектров, кроме того она учитывает зависимость поляризации фактора рассеяния от волновых векторов волн. В результате для спектральной плотности рассеянной мощности получим

$$\begin{aligned} \frac{dP_{\text{rec}}}{d\omega} &= r_e^2 \lambda_{\text{in}} \lambda_{\text{ant}} n_e P_{\text{in}} O_b \times \\ &\times \int \langle\langle G(\mathbf{r}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \frac{S(\mathbf{r}, \mathbf{k})}{2\pi} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \rangle\rangle^{\sim} d^3 \mathbf{k}, \end{aligned} \quad (13)$$

где $r_e = e^2/m_e c^2 \approx 2.8 \times 10^{-13}$ см⁻³ – классический радиус электрона, λ_{in} и λ_{ant} – длина волны падающего и рассеянного излучения, G – поляризационный форм-фактор, определяемый из соотношения

$$r_e^2 \lambda_{\text{in}} \lambda_{\text{ant}} G(\mathbf{r}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{\omega^2}{4c^2} \frac{|\mathbf{e}_{\text{ant}} \hat{\chi} \mathbf{e}_{\text{in}}|^2}{\kappa_{\text{ant}} \kappa_{\text{in}}}.$$

Множитель $r_e^2 \lambda_{\text{in}} \lambda_{\text{ant}}$ введен для совместимости с наиболее распространенным выражением для спектра рассеянной мощности, введенного в [22] и [29]. После несложных подстановок получим

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) &= \\ &= \frac{\omega^3 \omega'}{\omega_{\text{pe}}^4} \frac{N_{\text{ant}} N_{\text{in}} |\cos \theta_{\text{ant}} \cos \theta_{\text{in}}|}{(\mathbf{e}_{\text{ant}}^* \hat{\epsilon}_{\text{ant}}^{\text{H}} \mathbf{e}_{\text{ant}})(\mathbf{e}_{\text{in}}^* \hat{\epsilon}_{\text{in}}^{\text{H}} \mathbf{e}_{\text{in}})} |\mathbf{e}_{\text{ant}} (\hat{\epsilon} - \hat{I}) \mathbf{e}_{\text{in}}|^2, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\omega_{\text{pe}}^2 = 4\pi e^2 n_e / m_e$ определяет плазменную частоту. Напомним, что индекс “ant” относится к полю антенны, излучающей в транспонированной среде, все геометрооптические величины с этим индексом зависят от волнового вектора \mathbf{k}_1 , частоты ω и пространственных координат. Поляризуемость $\hat{\chi}$ и связанный с ней тензор $\hat{\epsilon}$ тоже вычисляются на частоте ω , но в прямой среде. Индекс “in” относится к падающему полю в прямой среде, геометрооптические величины с этим индексом зависят от волнового вектора \mathbf{k}_2 , частоты ω' и пространственных координат.

5. РАССЕЯНИЕ НА ЛОКАЛЬНО ОДНОРОДНЫХ ФЛУКТУАЦИЯХ В ЛОКАЛЬНО ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Прежде всего покажем, что формулы (12)–(14) могут привести к стандартному выражению для спектральной плотности рассеиваемой мощности плоских волн в однородной плазме. Для этого достаточно положить, что спектр волновых чисел в пучке бесконечно узкий, то есть

$$\begin{aligned} W_{\text{ant}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}_1) &= \frac{|E_{\text{sc}}|^2(\mathbf{r})}{P_{\text{sc}}} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_{\text{sc}}), \\ W_{\text{in}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}_2) &= \frac{|E_{\text{in}}|^2(\mathbf{r})}{P_{\text{in}}} \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_{\text{in}}). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь мы ввели новый индекс “sc”, характеризующий поле рассеянного излучения, принимаемого антенной. Заметим, что волновой вектор принимаемого излучения \mathbf{k}_{sc} противоположен волновому вектору \mathbf{k}_1 излучающей антенны. Подставляя указанные распределения в (12) и (13) получим, что операция усреднения по волновому полю сводится к подстановке $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_{\text{sc}}$ и $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_{\text{in}}$, а рассеиваемая мощность равна

$$\frac{dP_{\text{rec}}}{d\omega} = r_e^2 \lambda_{\text{in}} \lambda_{\text{sc}} n_e P_{\text{in}} O_b G \frac{S(\mathbf{k}_{\text{sc}} - \mathbf{k}_{\text{in}}, \Omega)}{2\pi}. \quad (16)$$

Для того, чтобы получить стандартный ответ [29], осталось избавиться от транспонированной среды в поляризационном факторе. Для этого вспомним, что рассеянное поле распространяется в той же (не транспонированной) среде, что и падающее излучение, то есть $\hat{\epsilon}_{\text{ant}}^{\text{H}} = (\hat{\epsilon}_{\text{sc}}^{\text{H}})^{\text{T}}$. В пространственно однородной плазме “транспонирование”, то есть смена направления внешнего магнитного поля, не меняет распределения скалярных амплитуд нормальных мод, при этом вектора поляризации заменяются на комплексно-сопряженные величины [43]. В наших обозначениях это означает, что

$$\mathbf{e}_{\text{ant}} = \mathbf{e}_{\text{sc}}^* \Rightarrow (\mathbf{e}_{\text{ant}}^* \hat{\epsilon}_{\text{ant}}^{\text{H}} \mathbf{e}_{\text{ant}}) = (\mathbf{e}_{\text{sc}} (\hat{\epsilon}_{\text{sc}}^{\text{H}})^{\text{T}} \mathbf{e}_{\text{sc}}^*) = (\mathbf{e}_{\text{sc}}^* \hat{\epsilon}_{\text{sc}}^{\text{H}} \mathbf{e}_{\text{sc}}).$$

Все эти величины четны по \mathbf{k} , поэтому могут подсчитываться как при $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1$, так и при $\mathbf{k} = -\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_{\text{sc}}$. В результате поляризационный фактор (14) записывается в виде

$$G = \frac{\omega^3 \omega'}{\omega_{\text{pe}}^4} \frac{N_{\text{sc}} N_{\text{in}} |\cos \theta_{\text{sc}} \cos \theta_{\text{in}}|}{(\mathbf{e}_{\text{sc}}^* \hat{\epsilon}_{\text{sc}}^{\text{H}} \mathbf{e}_{\text{sc}})(\mathbf{e}_{\text{in}}^* \hat{\epsilon}_{\text{in}}^{\text{H}} \mathbf{e}_{\text{in}})} |\mathbf{e}_{\text{sc}}^* (\hat{\epsilon}_{\text{sc}} - \hat{I}) \mathbf{e}_{\text{in}}|^2. \quad (17)$$

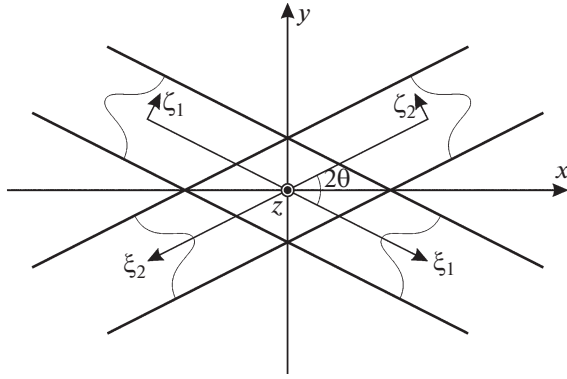


Рис. 1. Локальные координаты для описания полей двух пучков, пересекающихся под углом 2θ . Ось z , направленная перпендикулярно плоскости рисунка, общая для обоих пучков.

Это выражение полностью совпадает со стандартным форм-фактором в теории рассеяния плоских волн в однородной среде [29, 47].

Рассмотрим теперь более общий случай, в котором волновые пучки падающего и рассеянного излучения характеризуются конечным спектром по волновым числам, но неоднородностью среды и спектра флуктуаций в области перекрытия пучков можно пренебречь. В этом случае усредняемые в формуле (13) величины не зависят от координат, поэтому само усреднение становится более простым. Интегрирование по пространству можно выполнить непосредственно в (12), в результате получим

$$\langle\langle F \rangle\rangle = \frac{\int F(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) w(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) d^3 \mathbf{k}_1 d^3 \mathbf{k}_2}{\int w(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) d^3 \mathbf{k}_1 d^3 \mathbf{k}_2}, \quad (18)$$

где

$$w(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \int W_{\text{ant}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}_1) W_{\text{in}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}_2) d^3 \mathbf{r}. \quad (19)$$

По условию, поляризационный фактор κ не зависит от координат, поэтому вместо \tilde{W} мы можем вернуться к W . В результате выражение для рассеиваемой мощности (13) можно представить как усреднение формулы (16)

$$\begin{aligned} \frac{dP_{\text{rec}}}{d\omega} &= \left\langle\left\langle \left(\frac{dP_{\text{rec}}}{d\omega} \right)_{\text{GO}} \right\rangle\right\rangle = \\ &= \int \left(\frac{dP_{\text{rec}}}{d\omega} \right)_{\text{GO}} w(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) d^3 \mathbf{k}_1 d^3 \mathbf{k}_2, \end{aligned} \quad (20)$$

где $(dP_{\text{rec}}/d\omega)_{\text{GO}}$ определяется геометрическими формулами (16) и (17), а весовая формула нормирована на единицу $\int w(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) d^3 \mathbf{k}_1 d^3 \mathbf{k}_2 = 1$.

Интуиция подсказывает, что $w(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ должно быть близко к (или точно равно) произведению спектров интенсивности падающего и рассеянного излучения. В этом случае выражение (20) для рассеяния тривиально – для того, чтобы получить ответ для пучков с конечным спектром достаточно сложить геометрические вклады для каждой из \mathbf{k} -гармоник с весом, пропорциональным их спектральной мощности. Ниже мы показываем, что это феноменологическое рассуждение не всегда справедливо – и это есть основной физический результат данной работы! Формальной причиной является то, что интеграл по пространству от каждой функции Вигнера по отдельности дает спектр в соответствующей нормировке, однако при вычислении рассеянной мощности с помощью теоремы взаимности свертка двух функций Вигнера по координатам производится не независимо. В результате “комбинированный” спектр (19) может существенно отличаться от произведения спектров отдельных пучков.

Для определенности рассмотрим волновые пучки, пересекающиеся под углом 2θ в плоскости (x, y) , см. рис. 1. Каждый из пучков распространяется вдоль координаты ξ и имеет в поперечной плоскости (ζ, z) круглое (без астигматизма) гауссовское распределение с шириной a и кривизной волнового фронта R

$$E_i = \frac{1}{\sqrt{\pi a_i}} \exp \left(i \kappa_i \xi_i + \frac{1}{2} \left(\frac{i \kappa_i}{R_i} - \frac{1}{a_i^2} \right) r_i^2 \right),$$

где $r_i^2 = \zeta_i^2 + z^2$, а индексы $i = 1$ и 2 относятся к рассеянному (“ant”) и падающему (“in”) полю, соответственно. Локальные координаты вводятся отдельно для каждого пучка в соответствии с рис. 1

$$\xi_{1,2} = \pm x \cos \theta - y \sin \theta, \quad \zeta_{1,2} = \pm x \sin \theta + y \cos \theta.$$

Отвечающие этим полям функции Вигнера (10) будут иметь вид

$$W_{\text{ant}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}_1) = \frac{1}{\pi^2} \delta(k_{\xi_1} - \kappa_1) \times \\ \times \exp\left(-\frac{1}{2a_1^2} r_1^2 - a_1^2 (k_{\zeta_1} - \kappa_1 \zeta_1 / R_1)^2 - \right. \\ \left. - a_1^2 (k_{z_1} - \kappa_1 z / R_1)^2\right),$$

$$W_{\text{in}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}_2) = \frac{1}{\pi^2} \delta(k_{\xi_2} - \kappa_2) \times \\ \times \exp\left(-\frac{1}{2a_2^2} r_2^2 - a_2^2 (k_{\zeta_2} - \kappa_2 \zeta_2 / R_2)^2 - \right. \\ \left. - a_2^2 (k_{z_2} - \kappa_2 z / R_2)^2\right),$$

где

$$k_{\xi_{1,2}} = \pm k_{x_{1,2}} \cos \theta - k_{y_{1,2}} \sin \theta, \\ k_{\zeta_{1,2}} = \pm k_{x_{1,2}} \sin \theta + k_{y_{1,2}} \cos \theta$$

проекции волновых векторов на соответствующие орты.

На этом простом примере видно, что разброс волновых векторов в пучках связан с двумя физически разными факторами – конечной шириной распределения интенсивности и кривизной фазового фронта. Первый разброс характеризуется величиной $\Delta k_i = 1/a_i$, он отвечает за среднюю по пространству дисперсию волновых векторов в каждой отдельной точке. Второй разброс характеризуется величиной $\delta k_i = \kappa_i a_i / R_i$, он отвечает за дисперсию распределения по пространству средних значений волновых векторов. Чтобы пояснить это, рассмотрим функцию Вигнера как функцию распределения по волновым векторам и координатам и определим операции усреднения

$$\langle \dots \rangle_{\mathbf{k}} = \int \dots W_i(\mathbf{k}, \mathbf{r}) d^3 \mathbf{k}, \\ \langle \dots \rangle = \int \dots W_i(\mathbf{k}, \mathbf{r}) d^3 \mathbf{k} d^3 \mathbf{r} = \int \dots |E_i(\mathbf{r})|^2 d^3 \mathbf{r}, \quad (21)$$

здесь предполагается, что весовые функции нормированы на единицу, $\langle 1 \rangle = 1$; переход к $|E(\mathbf{r})|^2$ справедлив, только если усредняемая функция не зависит от \mathbf{k} . Интенсивность и спектр “проекторного” пучка вдоль направления его распространения не меняется, поэтому при усреднении по пространству координату ξ можно не учиты-

вать. Тогда введенные выше величины и полный разброс спектра выражаются как

$$\begin{cases} (\Delta k_i)^2 = \langle \langle (k_i - \langle k_i \rangle)^2 \rangle_{\mathbf{k}} \rangle \\ (\delta k_i)^2 = \langle \langle (k_i)_{\mathbf{k}} - \langle k_i \rangle \rangle^2 \rangle \\ K_i^2 = \langle (k_i - \langle k_i \rangle)^2 \rangle = (\Delta k_i)^2 + (\delta k_i)^2 \end{cases}. \quad (22)$$

В случае плоских фазовых фронтов ($R_i \rightarrow \infty$, $\delta k_i \rightarrow 0$) функции Вигнера представляют собой произведение распределения интенсивности на спектр, поэтому после свертки по пространству мы получим обсуждавшийся выше тривиальный результат – результатом (19) является простое произведение спектров пучков. Если же радиусы кривизны не равны бесконечности, то ответ будет выглядеть сложнее.

При вычислении комбинированного спектра w для пучков с фокусировкой в интеграле (19) удобно перейти к новым пространственным переменным (ζ_1, ζ_2, z) с якобианом

$$dx dy dz = \frac{1}{|\sin 2\theta|} d\zeta_1 d\zeta_2 dz.$$

После этого удается получить ответ в аналитическом виде: интеграл перекрытия равен

$$O_b = \frac{1}{\sqrt{\pi} |\sin 2\theta| \sqrt{a_1^2 + a_2^2}},$$

а нормированный на единицу комбинированный спектр –

$$w = \frac{\cos(\Psi_+ - \Psi_-)}{\pi^2 K_1 K_2 K_+ K_-} \delta(k_{\xi_1} - \kappa_1) \delta(k_{\xi_2} - \kappa_2) \times \\ \times \exp\left(-\frac{k_{\zeta_1}^2}{K_1^2} - \frac{k_{\zeta_2}^2}{K_2^2} - \frac{(k_{z_1} \cos \Psi_+ + k_{z_2} \sin \Psi_+)^2}{K_+^2} - \right. \\ \left. - \frac{(k_{z_1} \sin \Psi_- - k_{z_2} \cos \Psi_-)^2}{K_-^2}\right). \quad (23)$$

Здесь

$$K_-^2 = \frac{(\delta k_1)^2 + (\delta k_2)^2}{(\delta k_1 / \Delta k_2)^2 + (\delta k_2 / \Delta k_1)^2},$$

$$K_+^2 = \frac{K_1^2 + K_2^2}{(\Delta k_1)^2 + (\Delta k_2)^2} \frac{(\delta k_1)^2 + (\delta k_2)^2}{(\delta k_1 / \Delta k_1)^2 + (\delta k_2 / \Delta k_2)^2},$$

$$\tan \Psi_+ = \frac{a_2 \kappa_2 R_1}{a_1 \kappa_1 R_2} \tan \Psi_- = \frac{\kappa_2 R_1}{\kappa_1 R_2}.$$

Распределение по волновым векторам (k_x, k_z) в плоскости пересечения пучков представляет собой произведение спектров отдельных пучков, а вот проинтегрированное по пространству распределение компонент волновых векторов k_z вдоль направления, ортогонального плоскости пересечения, может существенно отличаться от произведения спектров. Выражения упрощаются, когда параметры падающего и рассеянного пучков одинаковы: $a_1 = a_2$, $R_1 = \pm R_2$, $\kappa_1 = \kappa_2$. В этом случае $\psi_1 = \psi_2 = \pm\pi/4$, $K_- = \Delta k$, $K_+ = K$ и

$$w = \frac{1}{\pi^2 K^4} \delta(k_{x1} - \kappa_1) \delta(k_{x2} - \kappa_2) \times \\ \times \exp\left(-\frac{k_{z1}^2 + k_{z2}^2 + k_{z1}^2 + k_{z2}^2}{K^2}\right) \times \\ \times \left\{ \sqrt{1 + (\delta k / \Delta k)^2} \exp\left(-\frac{(k_{z1} \mp k_{z2})^2 (\delta k)^2}{K^2 (\Delta k)^2}\right) \right\}.$$

Множитель в фигурных скобках описывает отличие комбинированного спектра от произведения спектров отдельных пучков. Видно, что комбинированный спектр в направлении z всегда более узкий, чем произведение спектров, причем эффект обужения становится заметным при $\delta k \gg \Delta k$.

Для сильно сфокусированных пучков основной вклад в рассеяние дают гармоники с $k_{z1} \mp k_{z2} = 0$.

Особенностью приведенного примера является то, что спектры пучков мы считаем одинаковыми во всех точках в области перекрытия пучков, при этом мы пренебрегаем дифракцией, рефракцией и диссипацией излучения. Такое приближение можно назвать приближением “прожекторных” пучков. Это приближение имеет право на существование, поскольку обычно характерная длина дифракции много больше поперечных размеров пучков, поэтому при достаточно больших углах пересечения мы можем считать поперечную структуру пучков неизменной в области пересечения. Для “прожекторных” волновых пучков учет конечности спектра в плоскости пересечения полностью сводится к замене дельта-функций в выражении (15) на нормированные спектры пучков в этой плоскости, произведение этих спектров определяет весовые функции в (20). В ортогональном направлении подобная процедура возможна, только если

$$\delta k / \Delta k = \kappa a^2 / R \ll 1,$$

то есть для пучков с плоским фазовым фронтом. В тех случаях, когда на ширину спектра существенно влияет кривизна фазового фронта или

сам спектр перестраивается из-за дифракции и рефракции, следует честно вычислять комбинированный спектр (19) или его приближение для гауссовских пучков (23).

6. ПРИМЕР: УЧЕТ ЭФФЕКТОВ НЕОДНОРОДНОСТИ ДЛЯ ДИАГНОСТИКИ КОЛЛЕКТИВНОГО РАССЕЯНИЯ НА УСТАНОВКЕ ГДЛ

В качестве примера использования предложенной теории рассмотрим анализ условий рассеяния микроволнового излучения на флуктуациях плотности плазмы, удерживаемой в новосибирской ловушке ГДЛ. Для этой установки разрабатывается диагностика функции распределения энергичных ионов методом регистрации спектров коллективного томсоновского рассеяния излучения на частоте 54.5 ГГц [17, 18]. Приведенный далее анализ не следует рассматривать как исследование, направленное на совершенствование диагностики для ГДЛ (это тема отдельной публикации), здесь мы хотим проиллюстрировать общие моменты, возникающие при практическом применении теории, на удобном для нас примере. Для целей нашей работы важно, что волновые поля в области рассеяния были рассчитаны не только с помощью лучевого моделирования [17], но и с помощью квазиоптического кода QOOT [35, 36], дающего информацию о пространственном распределении комплексной амплитуды $E_i(\mathbf{r})$ в падающем и рассеянном СВЧ-пучках. Результаты таких расчетов и общее описание геометрии рассеяния можно найти в [18], мы будем опираться на содержание этой работы. Важно отметить, что из-за рефракции в неоднородной магнитоактивной плазме квазиоптические пучки имеют в области рассеяния существенно негауссову форму и заметный разброс волновых векторов по поперечному сечению пучков.

Во-первых, заметим, что вдали от областей поглощения и линейного взаимодействия для волн электронно-циклотронного диапазона частот смена направления магнитного поля во всей установке на противоположное не влияет на распределение скалярной амплитуды. Это означает, что в пространственно неоднородной задаче мы можем поступить в точности также как в однородной задаче – заменить расчет поля излучающей антенны в транспонированной среде на расчет поля в исходной среде, учитывая при этом комплексное сопряжение векторов нормальной поляризации в формулах для рассеяния (как это было описано в предыдущем разделе). Эта ситуация полностью отвечает рассматриваемому нами примеру для ГДЛ. Для более низких частот или вблизи областей с сильной пространственной дисперсией такой прием может не сработать – на

Таблица 1. Параметры зондирующего и рассеянного волновых пучков и поляризационный форм-фактор для двух базовых геометрий рассеяния на установке ГДЛ [18]. Рассеяние обыкновенной волны в обыкновенную. В силу симметрии геометрии расчетные параметры для падающего и рассеянного пучков с высокой точностью совпадают. Индекс “||” и “⊥” относятся к компонентам волнового вектора вдоль и поперек магнитного поля лопушки, соответственно

Геометрия рассеяния по классификации [18]	CTS-I	CTS-II
Вакуумное волновое число k_0 [см ⁻¹]	11.5	11.5
Среднее по пучку продольное волновое число $\langle k_{ } \rangle$ [см ⁻¹]	8.1	±8.1
Среднее по пучку поперечное волновое число $\langle k_{\perp} \rangle$ [см ⁻¹]	4.7	5.0
Средний разброс продольных волновых чисел $\Delta k_{ }$ [см ⁻¹]	0.14	0.14
Средний разброс поперечных волновых чисел Δk_{\perp} [см ⁻¹]	0.22	0.22
Разброс средних продольных волновых чисел $\delta k_{ }$ [см ⁻¹]	0.11	0.11
Разброс средних поперечных волновых чисел δk_{\perp} [см ⁻¹]	0.33	0.18
Усредненный поляризационный фактор $\langle\langle G \rangle\rangle$ и его среднеквадратичное отклонение	0.507 ± 0.056	0.51 ± 0.06
Поляризационный фактор G , вычисленный в точке пересечения центральных лучей	0.537	0.535

распространение волн в магнитоактивной плазме начинает влиять взаимное направление градиентов параметров среды и магнитного поля, поэтому поле антенны в области рассеяния оказывается зависящим от знака магнитного поля.

Во-вторых, распределения полей в области рассеяния в условиях ГДЛ сильно отличаются от гауссовских. Однако это не мешает нам ввести величины Δk и δk в соответствии с общей процедурой (21)–(22) и использовать их для качественного анализа. Для удобства читателя выведем формулы, связывающие искомые величины непосредственно с результатами расчета $E(\mathbf{r}) = U \exp(i\Phi)$. Вычислим локальный средний волновой вектор

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) &= \langle \mathbf{k} \rangle_{\mathbf{k}} = \frac{1}{(2\pi)^3 U^2} \times \\ &\times \int \mathbf{k} E(\mathbf{r} - \mathbf{r}'/2) E^*(\mathbf{r} + \mathbf{r}'/2) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}'} d^3\mathbf{r}' d^3\mathbf{k} = \\ &= \frac{-i}{(2\pi)^3 U^2} \int E(\mathbf{r} - \mathbf{r}'/2) E^*(\mathbf{r} + \mathbf{r}'/2) \times \\ &\quad \times \nabla'(e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}'}) d^3\mathbf{r}' d^3\mathbf{k} = \\ &= \frac{i}{2U^2} (E \nabla E^* - E^* \nabla E) = \nabla \Phi. \end{aligned}$$

При усреднении по пространству мы ограничим объем интегрирования областью пересечения

пучков O_b , для компактности записи нормируем весовую функцию на единицу, то есть

$$\langle \dots \rangle = \int_{O_b} \dots U^2(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}, \quad \int_{O_b} U^2(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = 1.$$

После из (22) можно получить, что для проекций волнового вектора вдоль и поперек внешнего магнитного поля (различаются индексом α , который принимает значения “||” или “⊥”) справедливо

$$\begin{aligned} (\delta k_{\alpha})^2 &= \langle \bar{k}_{\alpha}^2 \rangle - \langle \bar{k}_{\alpha} \rangle^2 = \\ &= \int \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 U^2 d^3\mathbf{r} - \left(\int \frac{\partial \Phi}{\partial x_{\alpha}} U^2 d^3\mathbf{r} \right)^2. \end{aligned}$$

Аналогично можно определить

$$\begin{aligned} (\Delta k_{\alpha})^2 &= \langle k_{\alpha}^2 - \bar{k}_{\alpha}^2 \rangle = \\ &= \left\langle -\frac{1}{4U^2} \left(\frac{\partial^2 (EE^*)}{\partial x_{\alpha}^2} + \frac{\partial E}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial E^*}{\partial x_{\alpha}} \right) - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 \right\rangle = \\ &= \int \left(\left(\frac{\partial U}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 U^2}{\partial x_{\alpha}^2} \right) d^3\mathbf{r}. \end{aligned}$$

Из этих определений мы снова можем заключить, что δk_{α} отражает кривизну фазового фронта Φ , а

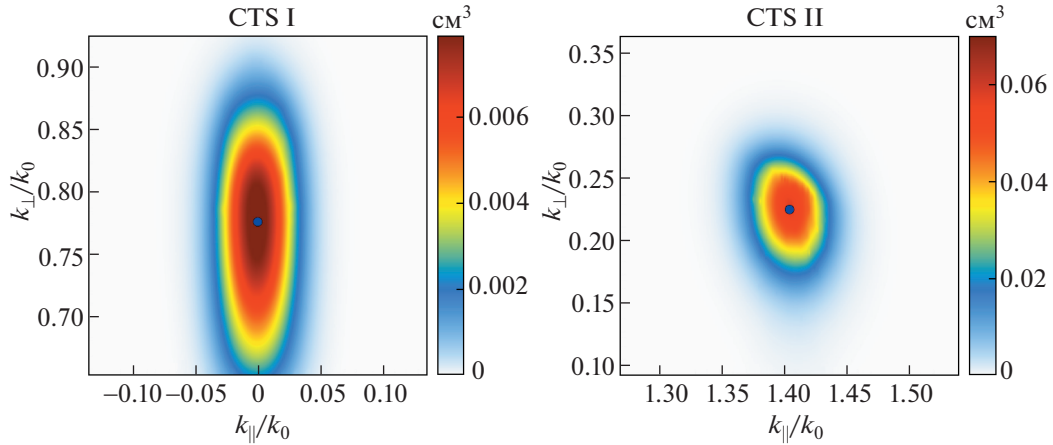


Рис. 2. Карта плотности поляризационного фактора $g(k_{\perp}, k_{\parallel})$ для геометрии рассеяния CTS I и CTS II на ГДЛ. Точками отмечены значения $\langle k_{\parallel} \rangle = 0, \langle k_{\perp} \rangle = 8.9 \text{ см}^{-1}$ для CTS I и $\langle k_{\parallel} \rangle = 16.2 \text{ см}^{-1}, \langle k_{\perp} \rangle = 2.6 \text{ см}^{-1}$ для CTS II, полученные в геометрикооптическом приближении в точке пересечения центральных лучей падающего и рассеянного пучков.

Δk_{α} возникает из-за неоднородности амплитуды поля U .

В табл. 1 представлены результаты расчетов этих величин для двух геометрий рассеяния на ГДЛ, описанных в [18]. Заметим, что здесь мы не различаем падающий и рассеянный пучки, поскольку в условиях ГДЛ они симметричны и характеризуются одинаковыми статистиками для волнового вектора. Видно, что для реального распределения полей разбросы δk_{α} и Δk_{α} одного порядка, то есть могут проявиться описанные выше тонкие эффекты усреднения, связанные с “нефакторизируемой” весовой функцией $w(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$.

При усреднении спектральной плотности рассеянной мощности в соответствии с формулой (13) основная неоднородность возникает из-за достаточно резкой зависимости поляризационного форм-фактора $G(\mathbf{r}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ от всех трех аргументов, в то время как неоднородность спектральной функции флуктуаций в области пересечения пучков дает несущественную поправку. Поэтому в анализируемом случае формулу (13) можно представить в виде свертки по волновым векторам флуктуаций $\mathbf{k} = -\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_{sc} - \mathbf{k}_{in}$

$$\frac{dP_{rec}}{d\omega} = r_e^2 \lambda_{in} \lambda_{sc} n_e P_{in} O_b \times \int g(k_{\perp}, k_{\parallel}) S(k_{\perp}, k_{\parallel}) k_{\perp} dk_{\perp} dk_{\parallel}, \quad (24)$$

где

$$g(k_{\perp}, k_{\parallel}) = \langle\langle G(\mathbf{r}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \rangle\rangle$$

– эффективная плотность поляризационного фактора, в которой закодирована вся информация о неоднородности волнового поля и среды в области рассеяния. Эта форма кажется нам наиболее удобной для визуализации эффекта неоднородности. В геометрической оптике плотность поляризационного фактора сингулярна

$$g = G \delta(k_{\perp} - \langle k_{\perp} \rangle) \delta(k_{\parallel} - \langle k_{\parallel} \rangle).$$

Здесь $\langle k_{\perp} \rangle$ и $\langle k_{\parallel} \rangle$ представляют собой проекции “разностного” вектора $\mathbf{k} = \mathbf{k}_{sc} - \mathbf{k}_{in}$ и определяются только геометрией рассеяния. В нашей теории эта функция приобретает конечную ширину, характерные масштабы которой определяются величинами $\delta k_{\alpha}, \Delta k_{\alpha}$ и отвечающим им разбросом $G(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$. На рис. 2 приведена итоговая карта $g(k_{\perp}, k_{\parallel})$, полученная в результате квазиоптического расчета для геометрий рассеяния CTS I и CTS II на установке ГДЛ. Обратим внимание, что пространственные спектры пучков в CTS I и CTS II одинаковые, поэтому наивный подход к усреднению привел бы к одинаковым распределениям $g(k_{\perp}, k_{\parallel})$ в виде произведения двух спектров. Существенное различие двух случаев, изображенных на рисунке 2, возникает только в рамках нашей полной теории за счет эффекта кривизны фазовых фронтов пучков. В CTS I зондирующий и антенный пучки распространяются навстречу друг другу, поэтому их фазовые фронты выгнуты в противоположные стороны, а в CTS II эти пучки распространяются в одну сторону, поэтому их фазовые фронты выгнуты в одну сторону. Рисунок 2 дает некоторое качественное представление о масштабе эффектов неоднородности, однако

ожидаемые сигналы рассеяния определяются в результате конволюции (24) со спектральной плотностью флуктуаций $S(\mathbf{k})$, которая в свою очередь сильно зависит от ионного состава плазмы. Мы оставим анализ этих вопросов для отдельной публикации.

В рассмотренном для установки ГДЛ примере эффекты неоднородности проявляются не слишком заметно. Например, как это видно из таблицы 1, корректно усредненный в соответствии с нашей теорией поляризационный фактор отличается от геометрического аналога, вычисленного в точке пересечения центральных лучей падающего и рассеянного пучков, всего на 6%. Дело в том, что при проектировании диагностики базовые геометрии рассеяния CTS I и CTS II были специально оптимизированы с целью уменьшить дисперсию поляризационного фактора (за счет поворота на 30° зондирующей антенны относительно приемной вокруг оси ловушки) и эффекты рефракции зондирующего и рассеянного пучков (выбор поляризации обыкновенных нормальных волн) [11]. В неоптимизированных сценариях рассеяния эффекты неоднородности существенно выше. В частности, при использовании пучков с необыкновенной поляризацией возможно отражение излучения (формирование каустик) непосредственно в области рассеяния. При этом мы ожидаем, что разброс волнового вектора из-за кривизны фазового фронта будет доминировать, $\delta k_\alpha \gg \Delta k_\alpha$, и учитываемые нами эффекты перестанут быть “тонкими”.

Отметим еще раз, что рассмотренный пример носит методический характер: мы последовательно описываем ряд общих, как нам кажется, достаточно универсальных вопросов, с которыми мы столкнулись при применении общей техники к конкретной задаче расчета рассеяния волн электронно-циклотронного диапазона. В этом смысле этот раздел нужно рассматривать как продолжение построения общего подхода к задаче рассеяния.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основным результатом данной работы является представление спектральной плотности мощности детектируемого антенной рассеянного излучения в виде свертки функций Вигнера, характеризующих неоднородные в пространстве распределения зондирующего поля и поля приемной антенны, со спектром автокорреляционной функции флуктуаций плазмы. Формула (9) определяет это представление в случае произвольной неоднородности, в нее входят тензорные функции Вигнера, характеризующие распределения векторного поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$. Эта форма наиболее удобна для обработки результатов полноволново-

го моделирования. Формулы (11) и (13) определяют наш ответ для плавнонеоднородных сред, допускающих описание поля скалярной амплитудой и скалярной функцией Вигнера. Это представление наиболее удобно для использования в квазиоптических моделях или для расчетов, основанных на решениях кинетического уравнения непосредственно для скалярной функции Вигнера. Наконец, при анализе задач зондирования плазмы мм-излучением часто можно пренебречь пространственной вариацией спектра флуктуаций плазмы в области рассеяния; в этом случае наиболее удобное и наглядное представление нашего ответа дается формулой (24).

На модельном примере в работе показано, что уширение спектра волнового пучка, связанное с неоднородностью амплитуды и с кривизной фазового фронта падающего и рассеянного излучения, по-разному влияет на “уширение” эффективного разностного спектра, определяющего взаимодействие с флуктуациями среды. В итоге сформулирован критерий, при выполнении которого учет конечного разброса волновых векторов в квазиоптических пучках не может быть сведен к усреднению эффективности рассеяния, рассчитанной в приближении плоских волн, или, что тоже самое, к сложению вкладов отдельных пространственных гармоник. В заключительной части работы показано, что этот критерий может выполняться в экспериментах по коллективному рассеянию на установке ГДЛ.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПФ РАН (тема № 0035-2019-0002) и ФТИ РАН (по договору между ФТИ РАН и ИПФ РАН № ОК44-2-21 от 06.08. 2021); моделирование для ГДЛ, описанное в разделе 6, выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 19-72-20139).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bindslev H.* // Review of Scientific Instruments. 1999. V. 70. 1093. <https://doi.org/10.1063/1.1149521>
2. *Moseev D., Salewski M., Garcia-Muñoz M., Geiger B., Nocente M.* // Rev. Mod. Plasma Phys. 2018. V. 2. P. 7. <https://doi.org/10.1007/s41614-018-0019-4>
3. *Suvorov E.V., Holzhauer E., Kasperek W., Burov A.B., Dryagin Y.A., Fil'chenkov S.E., Fraiman A.A., Lubyako L.V., Ryndyk D.A., Skalyga N.K., Smolyakova O.B., Erckmann V., Geist T., Kick M., Rust N., W7-AS Team and ECRH Team* // Nucl. Fusion. 1998. V. 38 P. 661. <https://doi.org/10.1088/0029-5515/38/5/302>
4. *Salewski M., Korsholm S.B., Bindslev H., Delabie E., Leipold F., and the TEXTOR team* // Plasma Phys. Control. Fusion. 2013. V. 55. P. 085002. <https://doi.org/10.1088/0741-3335/55/8/085002>

5. *Van der Meiden H.J., Vernimmen J.W.M., Bystrov K., Jesko K., Kantor M.Y., Temmerman G. De, Morgan T.W.* // Appl. Phys. Lett. 2016. V. 109 P. 261102. <https://doi.org/10.1063/1.4973211>
6. *Stejner M., Nielsen S.K., Jacobsen A.S., Korsholm S.B., ... and the ASDEX Upgrade Team* // Plasma Phys. Control. Fusion. 2015. V. 57 P. 062001. <https://doi.org/10.1088/0741-3335/57/6/062001>
7. *Shalashov A.G., Suvorov E.V., Lubyako L.V., Maassberg H., and the W7-AS Team* // Plasma Phys. Control. Fusion. 2003. V. 45 P. 395. <https://doi.org/10.1088/0741-3335/45/4/306>
8. *Westerhof E., Nielsen S.K., Oosterbeek J.W., Salewski M., De Baar M.R., Bongers W.A., Bürger A., Hennen B.A., Korsholm S.B., Leipold F., Moseev D., Stejner M., and the TEXTOR Team* // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 103. P. 125001.
9. *Gusakov E.Z., Popov A.Yu.* // Phys. Rev. Lett. 2010. V. 105. P. 115003. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.105.115003>
10. *Gusakov E.Z., Popov A.Yu.* // Physics of Plasmas. 2016. V. 23. P. 082503. <https://doi.org/10.1063/1.4959849>
11. *Hansen S.K., Nielsen S.K., Salewski M., Stejner M., Stober J. and the ASDEX Upgrade team* // Plasma Phys. Control. Fusion. 2017. V. 59. P. 105006. <https://doi.org/10.1088/1361-6587/aa7978>
12. *Батанов Г.М., Колик Л.В., Сарксян К.А., Сапожников А.В., Скворцова Н.Н., Шац М.Г.* // Физика плазмы. 1986. Т. 12. № 9. С. 1027.
13. *Батанов Г.М., Колик Л.В., Петров А.Е., Пшеничников А.А., Сарксян К.А., Скворцова Н.Н., Харчев Н.К., Хольнов Ю.В., Окубо К., Шимозума Т., Йошимора И., Кубо Ш., Санчез Х., Эстрада Т., Ван Миллиген Б.* // Физика плазмы. 2003. Т. 29. № 5. С. 395. <https://doi.org/10.1134/1.1575307>
14. *Kharchev N., Tanaka K., Kubo S., Igami H., Batanov G., Petrov A., Sarkisyan K., Skvortsova N., Azuma Yo., Tsujii Iio S.* // Rev. Sci. Instrum. 2008. V. 79. P. 10E721. <https://doi.org/10.1063/1.2982774>
15. *Skvortsova N.N., Akulina D.K. Batanov G.M., Kharchev N.K., Kolik L.V., Kovrizhnykh L.M., Voronov G.S.* // Plasma Phys. Control. Fusion. 2010. V. 52. P. 055008. <https://doi.org/10.1088/0741-3335/52/5/055008>
16. *Bindslev H., Meo F., Tsakadze E.L., Korsholm S.B., Woskov P.* // Rev. Sci. Instrum. A. 2004. V. 75 (10). P. 3598. <https://doi.org/10.1063/1.1779620>
17. *Shalashov A.G., Gospodchikov E.D., Khusainov T.A., Lubyako L.V., Smolyakova O.B., Solomakhin A.L.* // Plasma Phys. Control. Fusion. 2020. V. 62. P. 065010. <https://doi.org/10.1088/1361-6587/ab83cc>
18. *Shalashov A.G., Gospodchikov E.D., Khusainov T.A., Lubyako L.V., Solomakhin A.L., Viktorov M.E.* // Journal of Instrumentation. 2021. V. 16. P. P07007. <https://doi.org/10.1088/1748-0221/16/07/P07007>
19. *Пермитин Г.В., Суворов Е.В.* // Физика плазмы. 1998. Т. 24. № 1. С. 58.
20. *Bindslev H., Meo F., Korsholm S.B.* ITER Fast Ion Collective Thomson Scattering: Feasibility study. Risø National Laboratory (2003). <https://core.ac.uk/download/pdf/19786587.pdf>
21. *Salewski M., Meo F., Stejner M., Asunta O., Bindslev H., Furtula V., Korsholm S.B., Kurki-Suonio T., Leipold F., Leuterer F. ... and the ASDEX Upgrade team* // Nucl. Fusion. 2010. V. 50. P. 035012. <https://doi.org/10.1088/0029-5515/50/3/035012>
22. *Sheffield J.* Plasma Scattering of Electromagnetic Radiation (New York: Academic) 1975.
23. *Holzhauser E., Massig J.H.* // Plasma Physics. 1978. V. 20. P. 867. <https://doi.org/10.1088/0032-1028/20/9/002>
24. *Bindslev H.* // Plasma Phys. Control. Fusion. 1991. V. 33. P. 1775. <https://doi.org/10.1088/0741-3335/33/14/005>
25. *Piliya A.D., Popov A.Yu.* // Plasma Phys. Control. Fusion. 2002. V. 44. P. 467. <https://doi.org/10.1088/0741-3335/44/5/301>
26. *Pereverzev G.V.* // Phys. Plasmas. 1998. V. 5. P. 3529. <https://doi.org/10.1063/1.873070>
27. *Farina D.* // Fusion Sci. Technol. 2007. V. 52. P. 154. <https://doi.org/10.13182/FST07-A1494>
28. *Maj O., Balakin A.A., Poli E.* // Plasma Phys. Control. Fusion. 2010. V. 52. P. 085006. <https://doi.org/10.1088/0741-3335/52/8/085006>
29. *Bindslev H.* On the theory of Thomson scattering and reflectometry in a relativistic magnetized plasma, PhD thesis, Risø National Laboratory (1992). https://inis.iaea.org/search/search.aspx?orig_q=RN:24037118
30. *Lechte C., Conway G.D., Görler T., Tröster-Schmid C. and the ASDEX Upgrade* // Plasma Phys. Control. Fusion. 2017. V. 59. P. 075006. <https://doi.org/10.1088/1361-6587/aa6fe7>
31. *Aleynikov P., Marushchenko N.B.* // Computer Physics Communications. 2019. V. 241. P. 40. <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2019.03.017>
32. *Vicente J., Ribeiro T., Silva F.Da., Heurax S., Conway G.D., Scott B., Silva C.* // Plasma Phys. Control. Fusion. 2020. V. 62. P. 025031. <https://doi.org/10.1088/1361-6587/ab5fa8>
33. *Balakin A.A., Balakina M.A., Smirnov A.I., Permittin G.V.* // J. Phys. D. 2007. V. 40. P. 4285. <https://doi.org/10.1088/0022-3727/40/14/028>
34. *Balakin A.A., Balakina M.A., Westerhof E.* // Nucl. Fusion. 2008. V. 48. P. 065003. <https://doi.org/10.1088/0029-5515/48/6/065003>
35. *Shalashov A.G., Balakin A.A., Khusainov T.A., Gospodchikov E.D., Solomakhin A.L.* // J. Exp. Theor. Phys. 2017. V. 124. P. 325. <https://doi.org/10.1134/S1063776117010162>
36. *Shalashov A.G., Balakin A.A., Gospodchikov E.D., Khusainov T.A.* Quasi-optical theory of microwave plasma heating in open magnetic trap // Physics of Plasmas. 2016. V. 23. P. 112504. <https://doi.org/10.1063/1.4967765>
37. *McDonald S.W.* // 1991 Phys. Rev. A. V. 43. P. 4484. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.43.4484>
38. *Weber H.* Ausbreitung hochfrequenter Wellen in fluktuierenden Plasmen. IPP report 5/134, Garching: Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, 2013. Cite as: <http://hdl.handle.net/11858/00-001M-0000-0026-E19B-F>

39. Köhn A., Guidi L., Holzhauser E., Maj O., Poli E., Sni-cker A., Weber H. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2018. V. 60. P. 075006.
<https://doi.org/10.1088/1361-6587/aac000>
40. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М.: Ра-дио и связь, 1990.
41. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. Теоретическая физика. М.: Госте-хиздат, 1957. 532 с.
42. Altman C., Such K. Reciprocity, Spatial Mapping and Time Reversal in Electromagnetics (Kluwer: Dor-drecht, 1991).
43. Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука, 1967.
44. Lorentz H.A. The theorem of Poynting concerning the energy in the electromagnetic field and two general propositions concerning the propagation of light, Am-sterdammer Akademie der Wetenschappen 4, p. 176 (1896).
45. Балакин А.А. // Изв. вузов. Радиофизика. 2012. Т. 55. С. 521.
<https://doi.org/10.1007/s11141-012-9383-z>
46. Железняков В.В. Излучение в астрофизической плазме. М.: Янус-К 1997.
47. Hughes T.P., Smith S.R.P. // J. Plasma Phys. 1989. V. 42. P. 215.
<https://doi.org/10.1017/S0022377800014318>