ФИЗИКА ПЛАЗМЫ, 2022, том 48, № 3, с. 268–275

ПЫЛЕВАЯ ПЛАЗМА

УДК 533.9

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ АПЕРИОДИЧЕСКИХ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ ПЛАЗМЕННОГО КРИСТАЛЛА

А. М. Игнатов*

Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН, Москва, Россия

**e-mail: aign@fpl.gpi.ru*

Поступила в редакцию 26.10.2021 г.
После доработки 17.11.2021 г.
Принята к публикации 17.11.2021 г.

Теоретически исследуется нелинейная стадия апериодических неустойчивостей однослойного плазменного кристалла с треугольной решеткой. В зависимости от параметров окружающей плазмы теряют устойчивость либо поперечные, либо продольные волны. Показано, что в случае поперечных волн влияние нелинейности приводит к ускорению развития неустойчивости, и кристалл распадается на отдельные слои. В случае продольных волн неустойчивость насыщается на слабонелинейной стадии, и происходит структурный переход в фазу с двумя частицами в элементарной ячейке.

Ключевые слова: пылевая плазма, плазменный кристалл

DOI: 10.31857/S0367292122030076

1. ВВЕДЕНИЕ

Пылевая плазма представляет собой смесь электронов, ионов разных сортов и макроскопических частиц. В наземных лабораторных условиях пылинки левитируют в приэлектродной области газоразрядной плазмы и несут значительный отрицательный заряд. Благодаря этому пылинки часто образуют различные сильно скоррелированные структуры и, в частности, могут выстраиваться в двумерную кристаллическую решетку. Различные аспекты физики пылевой плазмы обсуждается в многочисленных обзорах и монографиях (например, [1–4]).

Благодаря тому, что в приэлектродном слое присутствует направленный поток ионов, силы между пылинками оказываются невзаимными, т.е. для них нарушается третий закон Ньютона. Для описания динамики ансамбля частиц в этих условиях часто используются различные модельные потенциалы взаимодействия. В работе [5] для исследования устойчивости двумерного плазменного кристалла использовался потенциал взаимодействия для заряженных частиц в плазме, состоящей из направленного потока холодных ионов и больцмановских электронов. Было обнаружено несколько различных каналов потери устойчивости кристалла, и настоящая статья посвящена нелинейной динамике двух апериодических неустойчивостей.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 кратко описана используемая модель, а в разделе 3 приведены необходимые данные линейной теории [5]. Далее (раздел 4) выводятся нелинейные уравнения, описывающие динамику поперечных и продольных волн вблизи порога развития неустойчивости для произвольного потенциала взаимодействия, и исследуются их общие свойства (раздел 5). Наконец, в разделе 6 обсуждаются результаты численных расчетов.

2. МОДЕЛЬ

Используется модель, подробно описанная в [5]. Предполагается, что в равновесии пылинки расположены на одной высоте $z^0_{m,n} = z_0$ и формируют треугольную решетку. Горизонтальные координаты частиц $\rho = (x, y)$ равны $\rho^0_{m,n} = a(m\mathbf{a}_1 + n\mathbf{a}_2)$, где a – межчастичное расстояние, а m и n – целые числа. В качестве базисных выбираются единичные векторы $\mathbf{a}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (1, \sqrt{3})/2$.

Частицы имеют одинаковые постоянные заряды Q и расположены в плазме, состоящей из направленного вдоль оси z потока холодных ионов (скорость $-u$) и больцмановских электронов с температурой T_e. Используются безразмерные переменные с масштабом длины $\lambda = u/\omega_{pi}$, где ω_{pi} – ионная плазменная частота. Межчастичные силы нормализованы на Q^2/λ^2, а масштаб времени для частиц с массой M_0 равен $M_0^{1/2}\lambda^{3/2}/|Q|$. В этих переменных электрический потенциал, создаваемый точечным зарядом, имеет вид

$$U(\rho, z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \frac{kJ_0(k\rho)\exp(ik_z z)}{(k_z^2 + k^2)\epsilon(k_z, \sqrt{k_z^2 + k^2})}, \quad (1)$$

где диэлектрическая проницаемость плазмы равна $\epsilon(\omega, k) = 1 + M^2/k^2 - 1/(\omega(\omega + i0))$ и величина $M = (n_e/n_i)u\sqrt{m_i/T_e}$ пропорциональна числу Маха ионного потока.

Общие уравнения движения для частицы с индексами m, n записываются в виде

$$\ddot{\mathbf{r}}_{m,n} = -\Omega_0^2 \mathbf{e}_z z_{m,n} + \sum_{m',n' \neq 0} \mathbf{F}(\mathbf{r}_{m,n} - \mathbf{r}_{m+m',n+n'}), \quad (2)$$

где Ω_0 — частота колебаний отдельной частицы во внешнем удерживающем потенциале, $\mathbf{e}_z$ — единичный вектор вдоль оси z, а суммирование проводится по ближайшим соседям. В выражении (2) сила $\mathbf{F}$ считается потенциальной, $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\rho, z)$.

Уравнения движения (2) разлагаются по малым отклонениям от положения равновесия ($\mathbf{r}_{m,n} \to \mathbf{r}_{m,n}^0 + \mathbf{r}_{m,n}$), при этом коэффициенты разложения выражаются через производные потенциала взаимодействия

$$u_{i,j} = \left.\frac{\partial^{i+j} U(a, z)}{\partial a^i \partial z^j}\right|_{z=0}. \quad (3)$$

В общем случае межчастичные силы считаются невзаимными, т.е. $U(\rho, -z) \neq U(\rho, z)$, поэтому величины (3) с нечетным индексом j отличны от нуля. В дальнейшем все выражения выписываются для произвольного потенциала взаимодействия, а для построения графиков используется потенциал (1). Метод расчета коэффициентов (3) описан в работе [6].

3. ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ

Спектр линейных колебаний плазменного кристалла с потенциалом взаимодействия (1), полученный при помощи линеаризованных уравнений (2), был исследован в работе [5]. При изменении внешних управляющих параметров a, M и Ω_0 возникает довольно много различных каналов потери устойчивости кристалла. В настоящей работе обсуждается нелинейная динамика развития двух апериодических неустойчивостей.

На рис. 1 показана исследованная область параметров a, M. В области *1* развивается неустойчивость, условно называемая плавлением, в которой модуль упругого сдвига кристалла меняет

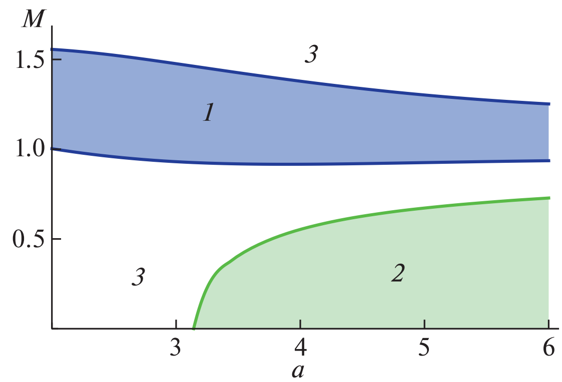

Рис. 1. Область *1* — неустойчивость поперечных волн, область *2* — неустойчивость продольных волн, в областях *3* может развиваться неустойчивость связанных колебаний.

знак. При пересечении границы области *2* теряют устойчивость продольные колебания, причем это происходит лишь для достаточно большой величины межчастичного расстояния $a > 3.14$. В области *3* для достаточно большого значения частоты внешнего удерживающего потенциала Ω_0 кристалл устойчив, однако при уменьшении этой величины до некоторого критического значения $\Omega_0 < \Omega_{cr}(a, M)$ развивается осцилляционная неустойчивость связанных волн, нелинейная динамика которой обсуждалась в [7].

В линейной теории считается, что смещение частицы с индексами m, n пропорционально $\exp(i\mathbf{k} \cdot (m\mathbf{a}_1 + n\mathbf{a}_2))$, где $\mathbf{k}$ — волновой вектор. Пример дисперсионной зависимости для ветви колебаний с минимальной частотой внутри области *1* (рис. 1) изображен на рис. 2, где границы первой зоны Бриллюэна показаны сплошным шестиугольником. Зависимость $\omega(\mathbf{k})$ периодична, $\omega(\mathbf{k} + m\mathbf{Q}_1 + n\mathbf{Q}_2) = \omega(\mathbf{k})$, где векторы обратной решетки равны $\mathbf{Q}_1 = (2\pi, -2\pi/\sqrt{3})$, $\mathbf{Q}_2 = (0, 4\pi/\sqrt{3})$. Частоты колебаний также инвариантны относительно поворота вектора $\mathbf{k}$ на угол $\pi/3$.

Белые полосы на рис. 2 соответствуют областям неустойчивости, в которых $\omega(k)^2 < 0$. Области неустойчивости расположены вдоль полос, параллельных векторам $\mathbf{q}_{1,2,3}$ и соединяющих центры соседних зон Бриллюэна. Векторы $\mathbf{q}_{1,2,3}$ лежат на границе зоны Бриллюэна, причем $\mathbf{q}_1 = (\pi, \pi/\sqrt{3})$, а остальные векторы получаются последовательным поворотом на угол $\pi/3$. Смещения частиц для этой ветви колебаний перпендикулярны векторам $\mathbf{q}_i$.

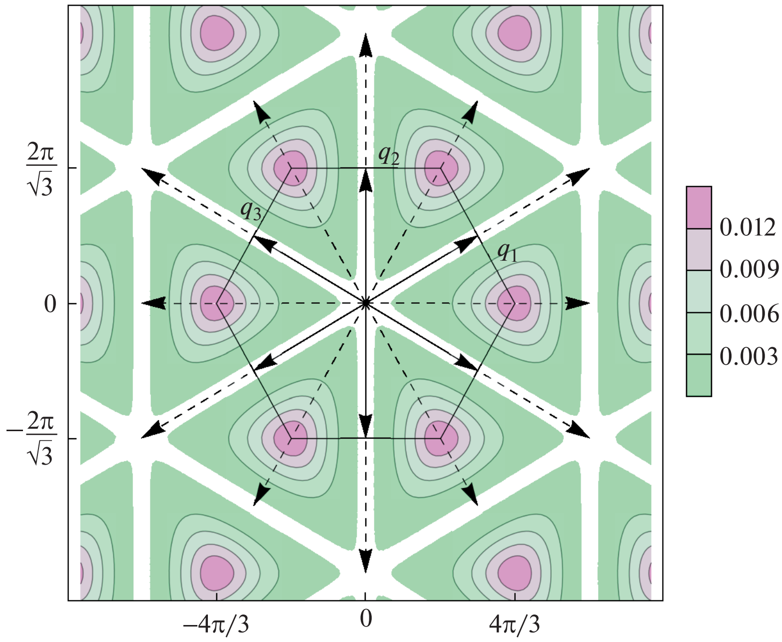

Рис. 2. Контурный график $\omega(\mathbf{k})^2$ для низкочастотной ветви колебаний вблизи границы области *1* на рис. 1. Сплошными стрелками показаны векторы $\pm\mathbf{q}_{1,2,3}$, штриховыми – их различные суммы; $a = 4$, $M = 0.926$.

Для поперечной волны, распространяющейся, например, вдоль вектора $\mathbf{q}_2$, закон дисперсии имеет вид $\omega(k)^2 = \omega_{tr}^2 \sin^2(\sqrt{3}/4k_y)$, где

$$\omega_{tr}^2 = \frac{6}{a}u_{1,0} + 2u_{2,0}. \quad (4)$$

Область неустойчивости *1* на рис. 1 определяется условием $\omega_{tr}^2 < 0$. При изменении знака величины ω_{tr}^2 теряют устойчивость колебания с волновыми векторами, лежащими в некоторых полосах (рис. 2), а максимум инкремента достигается на границе зоны Бриллюэна при $\mathbf{k} = \pm\mathbf{q}_{1,2,3}$.

При переходе в область *2* на рис. 1 устойчивость теряют продольные колебания с теми же волновыми векторами $\pm\mathbf{q}_{1,2,3}$. Характерный пример дисперсионной зависимости показан на рис. 3, где белыми пятнами показаны области неустойчивости $\omega(\mathbf{k})^2 < 0$. Смещения частиц для колебаний этого типа параллельны волновым векторам $\mathbf{q}_{1,2,3}$.

Явное выражение для частоты продольных колебаний оказывается довольно громоздким и здесь не выписывается. Пример дисперсионных зависимостей для низкочастотных ветвей колебаний показан на рис. 4. Кривой *1* на этом рисунке показана дисперсия продольно-вертикальной волны, в которой смещения частиц лежат в плоскости yz, а кривой *2* – дисперсия поперечной волны со смещениями частиц вдоль оси x. Обе кривые пересекаются в некоторой точке k_0, однако вследствие различия поляризаций волн гибридизации при этом не происходит.

На границе зоны Бриллюэна ($k_y = 2\pi/\sqrt{3}$) смещения частиц в волне *1* на рис. 4 параллельны оси y, а частота равна

$$\omega_l^2 = \frac{2}{a}u_{1,0} + 6u_{2,0}. \quad (5)$$

Область *2* на рис. 1 определяется условием $\omega_l^2 < 0$. Таким образом, при пересечении границы *2* на рис. 1 неустойчивость развивается в небольших окрестностях волновых векторов $\mathbf{q}_{1,2,3}$.

4. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В этом разделе обсуждается вывод нелинейных уравнений, описывающих динамику развития неустойчивости. Заметим прежде всего, что при пересечении границ областей *1* или *2* на рис. 1 одновременно теряют устойчивость шесть волн с векторами $\pm\mathbf{q}_{1,2,3}$. Поскольку все эти векторы лежат на границе зоны Бриллюэна, пространственные конфигурации смещений для волновых векторов с противоположными знаками совпадают. Поэтому достаточно рассмотреть динамику трех волн с векторами $\mathbf{q}_{1,2,3}$.

Обозначим через $\delta\mathbf{r}_{i,mn}$ смещения частиц для волны с волновым вектором $\mathbf{q}_i$ $(i = 1,2,3)$. Эти

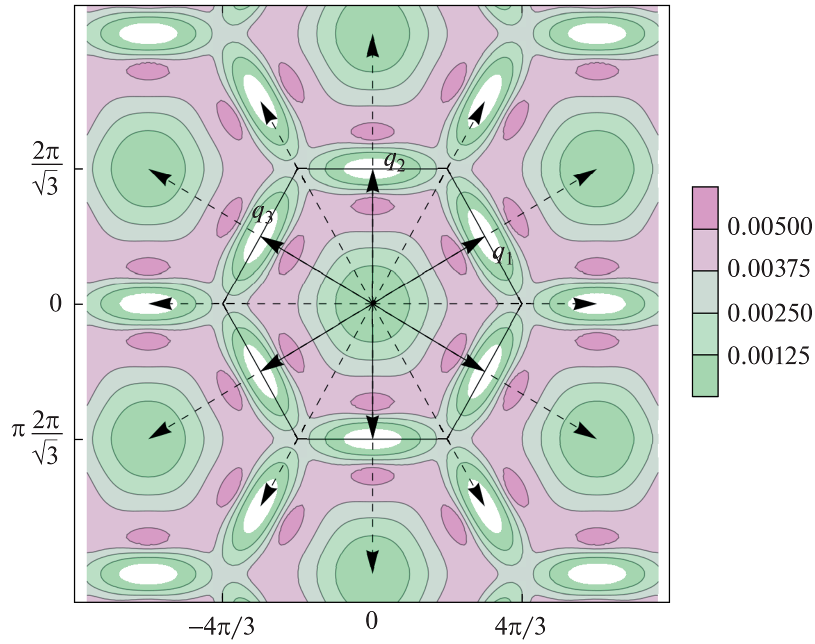

Рис. 3. Контурный график $\omega(\mathbf{k})^2$ для низкочастотной ветви колебаний вблизи границы области *2* на рис. 1; $a = 4$, $M = 0.543$, $\Omega_0 = 0.4$.

смещения пропорциональны $\delta\mathbf{r}_{1,mn} \sim (-1)^{m+n}$, $\delta\mathbf{r}_{2,mn} \sim (-1)^n$, $\delta\mathbf{r}_{3,mn} \sim (-1)^m$. На рис. 1, 2 штриховыми стрелками обозначены суммы векторов $\mathbf{q}_i$, соответствующие квадратичным членам в разложении сил в общем уравнении движения (2). Очевидно, что квадратичные комбинации $\delta\mathbf{r}_{i,mn}$ либо не зависят от индексов (m, n), либо выражаются в виде степеней -1. Отметим также, что удвоенные векторы $2\mathbf{q}_i$ на рис. 2, 3 попадают в центры соседних зон Бриллюэна, и в этом смысле вторые пространственные гармоники совпадают с нулевыми гармониками.

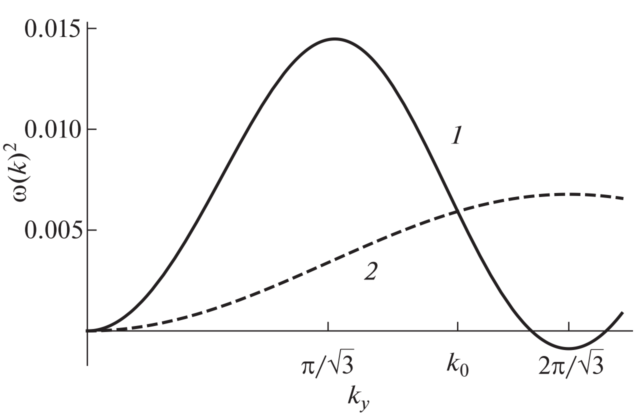

Рис. 4. Дисперсионные зависимости для двух низкочастотных ветвей колебаний вблизи границы области *2* на рис. 1: сплошная линия – продольно-вертикальные колебания, штриховая – поперечные колебания. $a = 4$, $M = 0.543$, $\Omega_0 = 0.4$.

Эти обстоятельства существенно облегчают вывод нелинейных уравнений вблизи границ неустойчивости. Начнем с обсуждения неустойчивости поперечных волн.

4.1. Поперечные волны

Введем формальный малый параметр $\varepsilon \ll 1$ и вблизи границ области *1* на рис. 1 будем считать, что частота поперечных колебаний (4) мала, $\omega_{tr}^2 = \varepsilon^2\omega_0^2$. Представим смещения частиц в виде

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{r}_{mn}(t) = \varepsilon\Big[\mathbf{p}_1 A_1(\tau)(-1)^{m+n} +\\ + \mathbf{p}_2 A_2(\tau)(-1)^n + \mathbf{p}_3 A_3(\tau)(-1)^m\Big] +\\ + \varepsilon^2\mathbf{B}_{mn}(\tau) + \varepsilon^3\mathbf{C}_{mn}(\tau),\end{aligned} \quad (6)$$

где $\tau = \varepsilon t$ – медленное время. Амплитуды $A_i(\tau)$ описывают медленную динамику колебаний с волновыми векторами $\mathbf{q}_i$, при этом единичные векторы поляризации $\mathbf{p}_i$ лежат в плоскости xy и перпендикулярны векторам $\mathbf{q}_i$. Поправки следующего порядка разложения по ε в (6) подлежат определению.

Далее выражение (6) подставляется в уравнения движения (2), а результат разлагается по степеням ε. В первом порядке разложения уравнения движения выполняются тождественно. Во втором порядке разложения по ε получаем выражения для квадратичных поправок $\mathbf{B}_{mn}(\tau)$. При этом горизонтальные компоненты смещений обращаются в нуль, $B_{x,mn} = B_{y,mn} = 0$, а вертикальные смещения равны

$$\begin{aligned} B_{z,mn} &= \beta_1(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) + \\ &+ \beta_2\left[(-1)^{m+n}A_2A_3 + (-1)^m A_1A_2 - (-1)^n A_1A_3\right], \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -\frac{2(3u_{1,1} + au_{2,1})}{a\Omega_0^2}, \\ \beta_2 &= -\frac{2(3u_{1,1} - au_{2,1})}{a(\Omega_0^2 + 8u_{0,2})}. \end{aligned} \tag{8}$$

Член, пропорциональный β_1 в (7), описывает вертикальное смещение решетки в целом и ведет свое присхождение от возмущений на второй и нулевой гармониках исходных волн. Заметим, что в знаменателе выражения для β_1 (8) стоит величина Ω_0^2, равная квадрату частоты вертикальных колебаний при $\mathbf{k} = 0$. Член, пропорциональный β_2, описывает возмущения с волновыми векторами $\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2$ и им эквивалентных, показанных на рис. 2, 3 штриховыми стрелками, при этом величина $\Omega_0^2 + 8u_{0,2}$ совпадает с квадратом частоты вертикальных колебаний при $\mathbf{k} = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2$. Коэффициенты (8) возникают только благодаря невзаимности ($U(\rho,-z) \neq U(\rho,z)$) и обращаются в нуль в случае чисто двумерного движения при $\Omega_0 \to \infty$.

В третьем порядке разложения уравнений (2) по степеням ε получается система линейных уравнений для поправок $\mathbf{C}_{mn}$ (6). Условие существования решения этих уравнений записывается в виде

$$\begin{aligned} \ddot{A}_1(\tau) &= -\omega_0^2 A_1 - 4\gamma_1 A_1^3 - 2\gamma_2 A_1(A_2^2 + A_3^2), \\ \ddot{A}_2(\tau) &= -\omega_0^2 A_2 - 4\gamma_1 A_2^3 - 2\gamma_2 A_2(A_1^2 + A_3^2), \\ \ddot{A}_3(\tau) &= -\omega_0^2 A_3 - 4\gamma_1 A_3^3 - 2\gamma_2 A_3(A_1^2 + A_2^2), \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= -\frac{u_{2,0}}{a^2} + \frac{3u_{3,0}}{2a} + \frac{u_{4,0}}{12}, \\ \gamma_2 &= \frac{13u_{2,0}}{a^2} - \frac{3u_{3,0}}{2a} + \frac{u_{4,0}}{4} + 2\beta_2 u_{2,1}, \end{aligned} \tag{10}$$

а величина β_2 задается выражением (8).

Соотношения (9) представляют собой укороченные уравнения для амплитуд $A_i(\tau)$ и имеют простой физический смысл. Первые члены в правых частях описывают либо медленные осцилляции (при $\omega_0^2 > 0$), либо медленное нарастание (при $\omega_0^2 < 0$) амплитуд A_i. Члены, пропорциональные γ_1, приводят к зависимости частоты колебаний от амплитуды, а последние члены в (9) описывают параметрическое взаимодействие колебаний с различными волновыми векторами. Заметим, что величины (10) не зависят от коэффициента β_1 (8), т.е. смещение кристалла как целого не влияет на динамику развития неустойчивости.

4.2. Продольные колебания

Поведение кристалла вблизи границы области *2* на рис. 1 описывается практически таким же образом, то есть смещения частиц записываются в виде (6). Отличие заключается в том, что теперь частота (5) считается малой, т.е. $\omega_l^2 = \varepsilon^2\omega_0^2$, а единичные векторы поляризации $\mathbf{p}_i$ в (6) параллельны векторам $\mathbf{q}_i$. Выражения для вертикальных смещений также совпадают с (7), а коэффициенты $\beta_{1,2}$ равны

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -\frac{2(u_{1,1} + 3au_{2,1})}{a\Omega_0^2}, \\ \beta_2 &= \frac{2(u_{1,1} - 3au_{2,1})}{a(\Omega_0^2 + 8u_{0,2})}. \end{aligned} \tag{11}$$

Укороченные уравнения для амплитуд попрежнему имеют вид (9), однако коэффициенты $\gamma_{1,2}$ изменяются

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= -\frac{11u_{2,0}}{a^2} + \frac{3u_{3,0}}{2a} + \frac{3u_{4,0}}{4}, \\ \gamma_2 &= \frac{15u_{2,0}}{a^2} - \frac{3u_{3,0}}{2a} + \frac{9u_{4,0}}{4} - 2\beta_2\frac{u_{1,1}}{a}, \end{aligned} \tag{12}$$

где коэффициент β_2 определяется (11).

Как для поперечных, так и продольных колебаний динамика развития неустойчивости на нелинейной стадии определяется коэффициентами $\gamma_{1,2}$ (10), (12). Однако прежде, чем обсуждать зависимость этих коэффицентов от внешних параметров, проведем качественное исследование уравнений (9).

5. ЭФФЕКТИВНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

Уравнения (9) удобно переписать в виде уравнений движения частицы единичной массы во внешнем потенциальном поле

$$\ddot{A}_i(\tau) = -\frac{\partial U}{\partial A_i(\tau)} \quad (i = 1,2,3), \tag{13}$$

где эффективный потенциал равен

$$U = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\omega_0^2}{2} A_i(\tau)^2 + \gamma_1 A_i(\tau)^4 + \gamma_2 A_i(\tau)^2 A_{i+1}(\tau)^2 \right), \quad (14)$$

и подразумевается, что $A_{3+1}(\tau) = A_1(\tau)$.

Заметим, что учет малой диссипации в исходных уравнениях движения (2) приводит к появлению диссипативных членов в уравнениях (9), (13). При этом решение (9), (13) релаксирует к минимумам потенциала (14), если они существуют.

Система уравнений (9), (13) имеет очевидный интеграл движения $E = \sum_i \dot{A}_i^2/2 + U$, аналогичный энергии. При $\omega_0^2 < 0$ потенциал (14) имеет локальный максимум при $A_i = 0$, и глобальная динамика определяется знаком четвертой степени разложения потенциала (14) $U_4 = U|_{\omega_0 = 0}$. Если величина $U_4 > 0$ для произвольных амплитуд A_i, то, поскольку $E = \text{const}$, любое решение (9), (13) остается в конечной области пространства A_i. В этом случае неустойчивость насыщается на слабонелинейной стадии.

Если же величина U_4 может менять знак, то условие $E = \text{const}$ не запрещает неограниченного роста амплитуд, и существует путь, по которому решение уравнений (9), (13) может уходить на бесконечность за конечное время. В этом случае реализуется взрывной сценарий развития неустойчивости.

Вводя сферические координаты в пространстве амплитуд A_i, легко убедиться, что член четвертого порядка в (14) всегда положителен $U_4 > 0$, если выполняются неравенства $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > -\gamma_1$. При выполнении этих условий существуют стационарные решения уравнений (9), (13) $A_i = \text{const}$, соответствующие экстремальным точкам потенциала (14). Для первого решения только одна из амплитуд A_i отлична от нуля, например,

$$A_1^0 = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{\omega_0^2}{\gamma_1}}, \quad A_{2,3}^0 = 0. \quad (15)$$

Для другого стационарного решения все три амплитуды равны

$$A_{1,2,3}^0 = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{\omega_0^2}{\gamma_1 + \gamma_2}}. \quad (16)$$

Линеаризуя уравнения (9), (13) в окрестности экстремальных точек (15), (16), легко убедиться, что решение (15) устойчиво при выполнении условий

$$\gamma_2 > 2\gamma_1 > 0. \quad (17)$$

При выполнении неравенств

$$\gamma_1 > 0, \quad -\gamma_1 < \gamma_2 < 2\gamma_1, \quad (18)$$

устойчивым оказывается состояние с тремя одинаковыми амплитудами (16).

Если коэффиценты $\gamma_{1,2}$ лежат за пределами области, определяемой неравенствами (17), (18), то потенциал U_4 оказывается незнакоопределенной функцией A_i, и неустойчивость носит взрывной характер. В этом случае уравнения (13) описывают движение частицы в отталкивающем анизотропном потенциале. Получить представление о наиболее быстро удаляющихся от центра траекториях можно, вычислив максимальную радиальную компоненту “силы” в (13). При выполнении неравенств

$$\gamma_1 < 0, \quad \gamma_2 > 2\gamma_1 \quad (19)$$

минимум градиента потенциала достигается при условии, что лишь одна из амплитуд отлична от нуля, например, $A_1 \neq 0$, $A_{2,3} = 0$. На границе неустойчивости $\omega_0 = 0$, и в этом случае взрывное решение имеет вид

$$A_1(\tau) = \frac{1}{\sqrt{-2\gamma_1}} \frac{1}{\tau_0 - \tau}, \quad A_{2,3} = 0, \quad (20)$$

где время τ_0 определяется начальными условиями.

При выполнении неравенств

$$\gamma_2 < 0, \quad \gamma_2/2 < \gamma_1 < -\gamma_2 \quad (21)$$

максимум радиальной “силы” в (13) достигается в случае равенства всех трех амплитуд, и на границе неустойчивости взрывное решение записывается как

$$A_i(\tau) = \frac{1}{\sqrt{-2(\gamma_1 + \gamma_2)}} \frac{1}{\tau_0 - \tau}, \quad i = 1,2,3.$$

Таким образом, в зависимости от соотношений между коэффициентами уравнений (9) на нелинейной стадии возможны несколько различных сценариев развития апериодических неустойчивостей. Реализация того или иного сценария в конечном итоге определяется потенциалом межчастичного взаимодействия.

6. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

Величины (3), определяющие коэффициенты уравнений (9), рассчитывались численными методами при помощи потенциала (1). Поскольку выше речь шла о слабонелинейной стадии развития неустойчивостей, коэффициенты (9) достаточно вычислять на границах областей неустойчивости.

Для случая неустойчивости поперечных волн обозначим через $M_1(a)$ минимальный корень

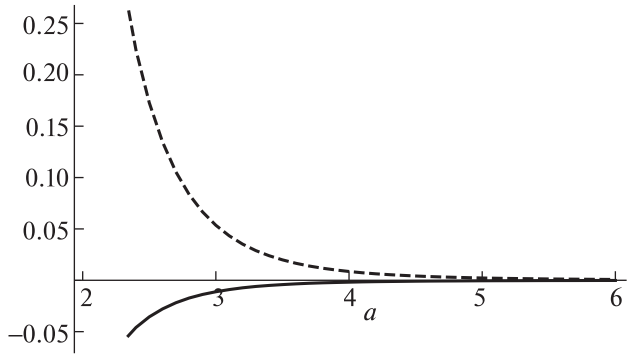

Рис. 5. Зависимость коэффициентов (10) от межчастичного расстояния на нижней границе области *1* на рис. 1. Сплошная линия – γ_1, штриховая линия – γ_2; $\Omega_0 = 1.2$.

уравнения $\omega_{tr}^2 = 0$ (4), определяющий нижнюю границу области *1* на рис. 1. Пример зависимости коэффициентов $\gamma_{1,2}$ (10) при условии, что $M = M_1(a)$, от межчастичного расстояния показан на рис. 5. Аналогичным образом рассчитываются коэффициенты (10) на верхней границе области *1* на рис. 1. Численное различие коэффициентов на верхней и нижней границах оказывается небольшим, менее 10%.

Поскольку зависимость коэффицентов нелинейности (10) от частоты Ω_0 известна (8), легко проанализировать выполнение неравенств (17)–(19), (21) при произвольном значении параметра Ω_0. При условии, что неустойчивость связанных волн не развивается ($\Omega_0 > \Omega_{cr}$), во всей области исследованных параметров выполняются неравенства (19). В этом случае неустойчивость носит взрывной характер, причем наиболее быстро растет решение уравнений (13), для которого лишь одна амплитуда отлична от нуля (20).

При распространении волны вдоль оси *y* смещения частиц параллельны оси *x*, что показано сплошными стрелками на рис. 5. В результате развития неустойчивости поперечных волн треугольная решетка распадается на отдельные слои, причем соседние слои движутся в противоположных направлениях. Выяснение вопроса о механизме насыщения неустойчивости требует учета следующих членов разложения уравнений (2) по степеням отклонений от положения равновесия и представляется достаточно сложной задачей.

Для выяснения характера развития неустойчивости продольных волн вблизи границы области *2* на рис. 1 рассчитывались величины (12). Пример зависимости коэффицентов $\gamma_{1,2}$ от межчастичного расстояния показан на рис. 7, где считается, что параметры *a* и *M* лежат на границе области *2* (рис. 1). В отличие от поперечных волн для про-

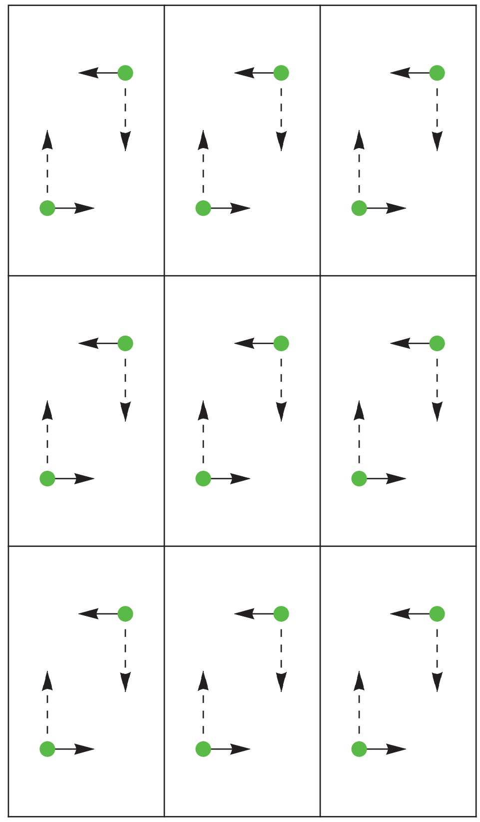

Рис. 6. Сплошные стрелки показывают направления смещений частиц при развитии взрывной неустойчивости поперечных волн, штриховые стрелки – смещения частиц при насыщении неустойчивости продольных волн.

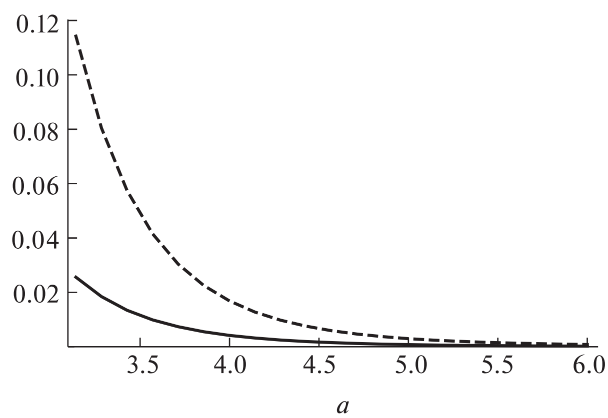

Рис. 7. Зависимость коэффициентов (12) от межчастичного расстояния на границе области *2* на рис. 1. Сплошная линия – γ_1, штриховая линия – γ_2; $\Omega_0 = 0.6$.

дольных волн коэффициент $\gamma_1 > 0$, т.е. неустойчивость насыщается на слабонелинейной стадии. Анализ коэффициентов $\gamma_{1,2}$ для произвольной частоты $\Omega_0 > \Omega_{cr}$ показывает, что всегда выполняются неравенства (17), при этом устойчивому стационарному состоянию соответствует решение (15), пропорциональное инкременту неустойчивости. Смещения отдельных частиц показаны на рис. 6 штриховыми стрелками. В результате развития неустойчивости происходит структурный фазовый переход, и, как показано на рис. 6, элементарные ячейки новой фазы содержат две частицы и могут быть представлены в виде прямоугольников со сторонами $\Delta_x = a$, $\Delta_y = \sqrt{3}a$.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, апериодические неустойчивости продольных и поперечных колебаний плазменного кристалла развиваются по двум принципиально разным сценариям. В случае продольных волн неустойчивость насыщается на слабонелинейной стадии, причем смещения частиц пропорциональны инкременту неустойчивости. Такое поведение типично для структурных фазовых переходов второго рода, связанных с возникновением мягкой моды. При этом амплитуда неустойчивой волны играет роль параметра порядка.

В случае поперечных волн нелинейные процессы приводят к ускорению развития неустойчивости, которая приобретает взрывной характер. В рамках обсуждаемой модели трудно судить, что произойдет в результате развития неустойчивости. Возможно полное разрушение кристалла или формирование новой структуры, однако этот процесс аналогичен фазовому переходу первого рода. Заметим, что при ударном воздействии на кристалл [8] исходное состояние восстанавливается после снятия внешнего воздействия. В настоящей работе подразумевалось адиабатически медленное изменение параметров плазмы, поэтому аналогичное поведение должно наблюдаться и в данном случае.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Комплексная и пылевая плазма / Ред. Фортов В.Е., Морфилл Г.Е. М.: Физматлит, 2012.
2. *Tsytovich V.N., Morfill G.E., Vladimirov S.V., Thomas H.M.* Elementary Physics of Complex Plasmas. Lect. Notes Phys. 731. Belin, Heidelberg: Springer, 2008.
3. *Vladimirov S.V., Ostrikov K., Samarian A.A.* Physics and Applications of Complex Plasmas. Imperial College Press, 2005.
4. *Кедель Л., Носенко В., Жданов С., Ивлев А.В., Лаут И., Яковлев Е.В., Крючков Н.П., Овчаров П.В., Липаев А.М., Юрченко С.О.* // УФН. 2019. Т. 189. С. 1070.
5. *Игнатов А.М.* // Физика плазмы. 2020. Т. 46. С. 358.
6. *Игнатов А.М.* // Физика плазмы. 2020. Т. 46. С. 847.
7. *Игнатов А.М.* // Физика плазмы. 2021. Т. 47. С. 117.
8. *Samsonov D., Zhdanov S.K., Quinn R.A., Popel S.I., Morfill G.E.* // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 92. P. 255004.