

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНОВЫЕ СТРУКТУРЫ, ФОРМИРУЕМЫЕ  
ЭЛЕКТРОННО-ЗВУКОВЫМИ ВОЛНАМИ В НЕЭКСТЕНСИВНОЙ  
ЗАМАГНИЧЕННОЙ ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОН-ИОННОЙ ПЛАЗМЕ© 2022 г. R. Maity<sup>a</sup>, B. Sahu<sup>a, \*</sup><sup>a</sup> Department of Mathematics, West Bengal State University, Barasat, Kolkata, India

\*e-mail: biswajit\_sahu@yahoo.co.in

Поступила в редакцию 14.07.2021 г.

После доработки 27.09.2021 г.

Принята к публикации 10.10.2021 г.

Исследуется нелинейное распространение электронно-звуковых волн в многокомпонентной бесстолкновительной замагниченной плазменной системе, состоящей из холодной подвижной электронной жидкости, горячих электронов и позитронов, характеризующихся неэкстенсивным распределением с индексом  $q$ , и неподвижных положительных ионов. Для сведения основной системы уравнений динамики жидкости к нелинейному уравнению Лидке–Шпачека используются методы теории возмущений. С использованием интегрируемости по Пенлеве нелинейных уравнений сплошных сред и преобразования Бэклунда получены некоторые аналитические решения уравнения нелинейной динамики. Кроме того, на основе графиков обсуждается влияние различных параметров плазмы на характеристики нелинейных волн, таких как одиночные солитоны, двугорбые солитоны, “бризеры”, а также периодические и “блуждающие” волновые структуры.

**Ключевые слова:** электронно-звуковые волны, уравнение Лидке–Шпачека, интегрируемость по Пенлеве, преобразование Бэклунда, нелинейные структуры

DOI: 10.31857/S0367292122030088

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Нелинейные волновые структуры занимают важное место среди самых захватывающих явлений в физическом мире. При исследовании космической плазмы многочисленные наблюдения предсказывают существование электронно-звуковых волн (ЭЗВ) в областях аврорального ускорения, пограничных областях плазменных слоев, в областях полярного каспа магнитосферы Земли, областях формирования головной ударной волны в магнитосфере Земли, геомагнитного хвоста, и т.д. [1–5]. ЭЗВ также наблюдались в лабораторных экспериментах, когда плазма состояла из двух ансамблей электронов с разной температурой, называемых холодными и горячими электронами [6], а также при численном моделировании [7]. По сути, это волны акустического типа, в которых инерциальные свойства определяются холодной электронной жидкостью, а возвращающая сила возникает в результате теплового давления горячих электронов, тогда как ионы играют роль нейтрализующего фона. ЭЗВ использовались для объяснения нескольких видов волновых излучений, наблюдавшихся в различных областях магнитосферы Земли [8]. Впервые они использовались для интерпретации “шипящих” шумов,

регистрируемых из области полярного каспа и ассоциируемых с низкоэнергетическими ( $\sim 100$  эВ) восходящими электронными пучками [9]. Кроме того, ЭЗВ привлекались для объяснения генерации широкополосных электростатических шумов, регистрируемых из плазменной оболочки [10] и авроральной зоны [8]. Отметим, что затухание ЭЗВ обычно является более сильным (по сравнению с ионно-звуковыми волнами) вследствие большей подвижности холодных электронов, чем ионов. Чтобы избежать возникновения затухания Ландау, необходимо, чтобы температура холодных электронов ( $T_c$ ) была намного меньше температуры горячих электронов ( $T_h$ ), и равновесная плотность холодных электронов была намного меньше, чем горячих электронов [11]. С точки зрения физики, при достаточно низкой плотности холодных электронов по сравнению с плотностью горячих электронов затухание ЭЗВ сильно уменьшается, но при этом холодные электроны все же обеспечивают распространение волны. В течение последних нескольких десятилетий исследования ЭЗВ проводились с целью изучения различных типов коллективных нелинейных структур и явлений, таких как солитоны, ударные волны, двойные слои, турбулентность,

волновые модуляции и т.д. [12–17]. В работе [18] исследовалось нелинейное распространение ЭЗВ в плазме, состоящей из холодной электронной жидкости, горячих электронов, подчиняющихся распределению типа ловушки/вихря, и стационарных ионов. В работе [19] было проведено теоретическое исследование свойств трехмерных (3D) уединенных ЭЗВ в замагниченной плазме, состоящей из неподвижных ионов, замагниченных холодных электронов, электронных пучков и замагниченных горячих электронов, подчиняющихся вихревому распределению. Большинство этих нелинейных структур ЭЗВ было зарегистрировано в нескольких миссиях космических аппаратов [20, 21].

Нелинейные волны в плазме с дополнительной позитронной компонентой ведут себя иначе, чем в обычной двухкомпонентной электронно-ионной плазме [22]. Электрон-позитрон-ионная (ЭПИ) плазма возникает в различных астрофизических объектах, таких как солнечная атмосфера [23], активные ядра галактик, магнитосферы пульсаров, области вблизи полярного каспа пульсаров [24–26], а также такая плазма может быть создана в лаборатории [27]. Таким образом, представляет интерес исследовать характеристики плазменных волн в ЭПИ-плазме. Часто отмечают, что электроны и позитроны являются высокоэнергетичными частицами, которые присутствуют в астрофизической и космической плазме и зачастую характеризуются немаксвелловским распределением частиц. Соответственно, для изучения электростатических волн в плазме в течение длительного времени проводятся исследования в области неэкстенсивной статистической механики, основанной на отклонении от стандартной энтропии Больцмана–Гиббса–Шеннона ( $B-G-S$ ). Обобщение энтропии  $B-G-S$  было впервые признано Реньи [28], и впоследствии Цаллис [29] распространил стандартную аддитивность энтропии на нелинейные, неэкстенсивные случаи, причем энтропийный индекс  $q$  характеризует степень неэкстенсивности системы. Неэкстенсивные распределения с индексом  $q$  эффективно использовались в различных прикладных задачах, включая лобовое столкновение черных дыр, излучение гравитационных волн и проблему солнечных нейтрино [30, 31]. В течение последних двух десятилетий было опубликовано большое количество работ, посвященных исследованию разнообразных линейных и нелинейных структур в рамках различных моделей плазмы с использованием неэкстенсивных распределений заряженных частиц с энтропийным индексом  $q$  [32–35]. В работе [36] были исследованы свойства полностью нелинейных удаленных ЭЗВ, распространяющихся в немагниченной и бесстолкновительной ЭПИ-плазме с надтепловыми электронами и позитронами. В работе [37] изучались

цилиндрические и сферические электронно-звуковые солитоны Гарднера, а также двойные слои в плазме, характеризуемой двумя электронными температурами и наличием нетепловых ионов. Исследовалась также роль неэкстенсивных горячих электронов и позитронов в распространении непроскочных ударных ЭЗВ в ЭПИ-плазме [38]. Исследовались и ударные ЭЗВ неплоской геометрии, распространяющиеся в немагниченной плазме с неэкстенсивными электронами [39].

Однако большая часть упомянутых выше исследований нелинейных волн ограничивается их распространением в немагниченной плазме. Наблюдения за космической и астрофизической плазмой показывают, что внешнее магнитное поле играет существенную роль в линейной и нелинейной плазменной динамике, а также влияет на критерии устойчивости плазменных волн. В работе [40] была предложена модель для исследования распространения трехмерных нелинейных волн в различных замагниченных плазменных системах. Включение магнитного поля в плазменную систему полностью меняет динамику распространения нелинейных волн. Были исследованы трехмерные ЭЗВ в замагниченной плазме с нетепловыми горячими электронами [41] и изучено распространение линейных и нелинейных электростатических волн в замагниченной ЭПИ-плазме путем вывода уравнения Захарова–Кузнецова (ЗК) [42]. В работе [43] представлены решения в виде уединенных волн для нелинейного трехмерного модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза–ЗК (КдФ–ЗК) для нелинейных ионно-звуковых волн в замагниченной электрон-позитронной плазме, полученные с использованием расширенных и частичных прямых алгебраических методов. Теоретически исследованы основные особенности нелинейного распространения электростатических волн во внешнем магнитном поле в ЭПИ-плазме в присутствии тяжелых частиц [44]. Структуры ударных ЭЗВ, возникающие в ЭПИ-плазме под влиянием внешнего магнитного поля и надтепловых эффектов, исследовались в [45]. Недавно различные нелинейные структуры коллективной динамики ионов (такие как солитоны, периодическая, квазипериодическая и хаотическая структуры), возникающие в присутствии внешнего магнитного поля, были теоретически исследованы в [46] с помощью анализа оригинального нелинейного уравнения [47]. Совсем недавно в работе [48] была исследована динамика распространения ЭЗВ в присутствии слабого внешнего однородного магнитного поля, получено обобщенное трехмерное уравнение КдФ и представлено точное решение, полученное с использованием преобразования Бэклунда. Здесь можно упомянуть, что в присутствии внешнего магнитного поля (меняющего фазовую скорость волны), наличие неэкстенсив-

ных электронов и позитронов качественно модифицирует нелинейные когерентные структуры ЭЗВ. Неэкстенсивные распределения частиц получают все большее распространение в физике космической плазмы, поскольку они обеспечивают эффективное моделирование наблюдаемых распределений частиц. Изучение статистики систем частиц, характеризуемых неэкстенсивными распределениями с энтропийным индексом  $q$ , может создать надежную и удобную основу для анализа многих астрофизических и космологических явлений, таких как планетные кольца, солнечный ветер, хвосты комет [49], гало темной материи [50], адронная материя, кварк-глюонная плазма [51], и тому подобных явлений. Таким образом, ожидается, что присутствие неэкстенсивных электронов и позитронов изменяет область параметров, в которой могут существовать нелинейные электронно-звуковые структуры. Основное внимание в данной статье уделяется исследованию влияния горячих электронов и позитронов, характеризуемых неэкстенсивными распределениями с энтропийным индексом  $q$ , а также напряженности магнитного поля и концентрации позитронов, на характеристики ЭЗВ, что осуществляется посредством вывода уравнения Лидке–Шпачека [47]. Структура настоящей статьи выглядит следующим образом. Основные исходные уравнения и вывод нелинейного эволюционного уравнения приведены в разд. 2. Проверка интегрируемости по Пенелеве и получение аналитических решений нелинейного уравнения динамики с использованием преобразования Бэклунда приведены в разд. 3. Наконец, в разд. 4 приведены краткие выводы из полученных результатов.

## 2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ, ОПИСЫВАЮЩЕЕ ЭВОЛЮЦИЮ СИСТЕМЫ

Рассмотрим однородную бесстолкновительную и неограниченную плазменную среду, состоящую из инерционных холодных электронов, неэкстенсивных горячих электронов и позитронов, а также неподвижных положительных ионов, помещенную во внешнее однородное магнитное поле  $\mathbf{B} = B_0 \hat{z}$ , где  $\hat{z}$  – единичный вектор вдоль оси  $z$ . Ионы, имеющие низкую энергию и большую массу по сравнению с электронами, не успевают реагировать на быстрые процессы, протекающие на временных масштабах, характерных для электронов. Таким образом, условие равновесия имеет вид  $n_{c0} + n_{h0} = n_{p0} + n_{i0}$ , где  $n_{j0}$  – невозмущенная плотность частиц сорта  $j$  (здесь индекс  $j = c, h, p, i$  относится к холодным электронам, горячим электронам, горячим позитронам и положительно заряженным ионам, соответственно).

Для такой замагниченной плазменной среды можно написать следующие основные уравнения:

$$\frac{\partial n_c}{\partial t} + \nabla \cdot (n_c \mathbf{u}_c) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_c}{\partial t} + (\mathbf{u}_c \cdot \nabla) \mathbf{u}_c = \frac{e}{m_e} \nabla \varphi - \frac{e B_0}{m_e c} (\mathbf{u}_c \times \hat{z}), \quad (2)$$

$$\nabla^2 \varphi = 4\pi e (n_c + n_h - n_p - n_{i0}), \quad (3)$$

где  $n_j$  – плотность частиц плазмы сорта  $j$ ; вектор  $\mathbf{u}_c$ , а также его компоненты  $u_c, v_c, w_c$ , используемые ниже, описывают скорости жидкости холодных электронов в направлениях осей  $x, y, z$ ;  $\varphi$  – потенциал электростатической волны, и  $m_e(e)$  – масса (заряд) электрона.

Для моделирования неэкстенсивности компонент плазмы (горячих электронов и позитронов) будем использовать следующее неэкстенсивное распределение с индексом  $q$  [32, 52]:

$$n_h = n_{h0} \left[ 1 + (q-1) \frac{e\varphi}{k_B T_h} \right]^{\frac{q+1}{2(q-1)}} \quad (4)$$

$$n_p = n_{p0} \left[ 1 - (q-1) \frac{e\varphi}{k_B T_p} \right]^{\frac{q+1}{2(q-1)}}, \quad (5)$$

где индекс  $q$  характеризует степень неэкстенсивности,  $k_B$  – постоянная Больцмана и  $T_p$  – температура горячих позитронов. Заметим, что в случае  $q < -1$ , неэкстенсивное распределение с индексом  $q$  не нормализуется. В предельном случае ( $q \rightarrow 1$ ) (экстенсивный случай) оно переходит в хорошо известное распределение Максвелла – Больцмана. Для случая распространения плоской электростатической волны в бесстолкновительной плазме дисперсионное соотношение, записанное в рамках формализма Цаллиса, очень хорошо согласуется с экспериментальными данными при  $q < 1$  [53]. В настоящей работе мы рассматриваем значения индекса  $q$ , заключенные в пределах очень ограниченного диапазона  $0.6 < q \leq 1$ , поскольку только они соответствуют функциям распределения Цаллиса, которые с физической точки зрения могут быть реализованы [54].

Нелинейная динамика ЭЗВ может быть описана следующими нормализованными уравнениями:

$$\frac{\partial n_c}{\partial t} + \nabla \cdot (n_c \mathbf{u}_c) = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_c}{\partial t} + (\mathbf{u}_c \cdot \nabla) \mathbf{u}_c = \alpha \nabla \varphi - \Omega (\mathbf{u}_c \times \hat{z}), \quad (7)$$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{n_c}{\alpha} + [1 + (q-1)\varphi]^{\frac{q+1}{2(q-1)}} - \mu_1 [1 - (q-1)\sigma\varphi]^{\frac{q+1}{2(q-1)}} + \mu_2, \quad (8)$$

где плотности частиц  $n_j$  и скорость жидкости холодных электронов  $u_c$  нормализованы на  $n_{j0}$  и  $C_e = (k_B T_h / \alpha m_e)^{1/2}$ , соответственно;  $\varphi$  нормализован на  $k_B T_h / e$ , а пространственная и временная шкалы градуированы в единицах Дебаевской длины для горячих электронов  $\lambda_{Dh} = (k_B T_h / 4\pi n_{h0} e^2)^{1/2}$  и обратной плазменной частоты для холодных электронов  $\omega_{pc}^{-1} = (m_e / 4\pi n_{c0} e^2)^{1/2}$ , соответственно. Здесь  $\Omega = \Omega_c / \omega_{pc}$ , где  $\Omega_c \lambda_0 / m_e c$  — циклотронная частота холодных электронов,  $\mu_1 = n_{p0} / n_{h0}$ ,  $\mu_2 = n_{i0} / n_{h0} = 1 + \alpha^{-1} - \mu_1$ ,  $\alpha = n_{h0} / n_{c0}$  и  $\sigma = T_h / T_p$ .

Для исследования нелинейной динамики ЭЗВ в присутствии внешнего магнитного поля введем следующие растянутые пространственно-временные координаты

$$\xi = \varepsilon^{1/2}(z - Vt), \quad \zeta = \varepsilon x, \quad \eta = \varepsilon y, \quad \tau = \varepsilon^{3/2} t, \quad (9)$$

где  $V$  — нормированная фазовая скорость ЭЗВ и  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < 1$ ) представляет собой амплитуду слабо нелинейной волны. Все зависимые переменные раскладываются по степеням параметра  $\varepsilon$  следующим образом:

$$\begin{pmatrix} n_c \\ u_c \\ v_c \\ w_c \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} n_c^{(1)} \\ \sqrt{\varepsilon} u_c^{(1)} \\ \sqrt{\varepsilon} v_c^{(1)} \\ w_c^{(1)} \\ \varphi^{(1)} \end{pmatrix} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} n_c^{(2)} \\ \sqrt{\varepsilon} u_c^{(2)} \\ \sqrt{\varepsilon} v_c^{(2)} \\ w_c^{(2)} \\ \varphi^{(2)} \end{pmatrix} + \dots \quad (10)$$

Чтобы учесть влияние слабого магнитного поля на нелинейную динамику ЭЗВ, мы используем скейлинг  $\Omega \sim O(\sqrt{\varepsilon})$ . Подставляя (9) и (10) в уравнения (6)–(8), можно получить разные системы уравнений, включающие члены разного порядка по  $\varepsilon$ . В самом низком порядке разложения по  $\varepsilon$  получаем следующие соотношения:

$$w_c^{(1)} = V n_c^{(1)}, \quad \varphi^{(1)} = -\frac{V w_c^{(1)}}{\alpha}, \quad (11)$$

$$n_c^{(1)} = -\alpha(C_1 - \mu_1 D_1) \varphi^{(1)},$$

где  $C_1 = (q+1)/2$ ,  $D_1 = -C_1 \sigma$  и  $V^2 = (C_1 - \mu_1 D_1)^{-1}$ .

Комбинируя все члены более высокого порядка по  $\varepsilon$  и используя соотношения (11), мы получаем следующее нелинейное уравнение

Лидке–Шпачека [46, 47] для ЭЗВ, распространяющейся в неэкстенсивной замагниченной плазме

$$\left( V^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \Omega^2 \right) \left[ \frac{\partial n_c^{(1)}}{\partial \tau} + A n_c^{(1)} \frac{\partial n_c^{(1)}}{\partial \xi} + B \frac{\partial^3 n_c^{(1)}}{\partial \xi^3} \right] + \frac{V^3}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] n_c^{(1)} = 0, \quad (12)$$

где  $A = [3V + 2V^5(C_2 - \mu_2 D_2)/\alpha]/2$ ,  $B = V^3/2$ , причем  $C_2 = (q+1)(3-q)/8$  и  $D_2 = C_2 \sigma^2$ .

В зависимости от величины магнитного поля данное уравнение описывает следующие различные физические интересные случаи. В отсутствие магнитного поля ( $\Omega = 0$ ) оно превращается в уравнение Кадомцева–Петвиашвили (КП) [55], а в случае одномерного движения ( $\partial_\zeta = \partial_\eta = 0$ ) — в хорошо известное уравнение КдФ [56]. Если же магнитное поле сильное  $\Omega^2 \gg \partial_\xi^2$ , то можно получить уравнение схожее с уравнением ЗК [40].

### 3. ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ПО ПЕНЛЕВЕ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

В этом разделе мы выполняем анализ Пенлеве, чтобы изучить интегрируемость уравнения (12) и получить некоторые интересные аналитические решения. Для нелинейных уравнений в частных производных (НУЧП) полная интегрируемость обычно означает существование бесконечного набора законов сохранения. Интегрируемость играет важную роль в поиске точных решений НУЧП. Исследуя интегрируемость НУЧП, можно получить важные сведения о нелинейной структуре уравнения и природе его решений [57, 58]. Поскольку в реальных физических задачах большинство динамических систем являются нелинейными, большое внимание было уделено интегрируемости нелинейных моделей. Между интегрируемостью НУЧП и свойством Пенлеве существует тесная связь. В работе [59] Weiss–Tabor–Carnevale (WTC) предложили алгоритм, позволяющий проводить анализ Пенлеве для НУЧП, названный “методом WTC анализа Пенлеве”, который является эффективным методом не только для проверки интегрируемости по Пенлеве, но и для построения точных решений НУЧП. Позже, в работе [60] был предложен упрощенный вариант метода WTC. НУЧП, обладающее свойством Пенлеве, должно быть однозначным относительно множества подвижных особых точек, а множество особых точек не должно быть характеристическим [60]. Проводя анализ Пенлеве в соответствии с методом WTC, можно предположить, что функции  $\psi(\xi, \zeta, \eta, \tau)$  и  $n_j = n_j(\xi, \zeta, \eta, \tau)$  являются аналитическими в окрестности точек, принадле-

жащих множеству особых точек  $M$ , определяемо-  
му следующим образом:

$$M = \{(\xi, \zeta, \eta, \tau) | \psi(\xi, \zeta, \eta, \tau) = 0\}, \quad (13)$$

где  $\psi(\xi, \zeta, \eta, \tau) = 0$  – аналитическая функция пере-  
менных  $(\xi, \zeta, \eta, \tau)$  в окрестности точек множества  
 $M$ . Кроме того, предположим, что

$$n_c^{(1)} = n_c^{(1)}(\xi, \zeta, \eta, \tau) = \sum_{j=0}^{\infty} n_j \psi^{j+p}, \quad (14)$$

где  $p$  – целое число. Будем говорить, что уравне-  
ние (12) обладает свойством Пенлеве, если его ре-  
шения однозначны относительно множества по-  
движных особых точек  $M$ . После подстановки  
(14) в (12) и использования анализа членов выс-  
шего порядка получаем, что  $p = -2$  и

$$n_0 = -\left(\frac{12B}{A}\right) \psi_{\xi}^2. \quad (15)$$

Из рекуррентной формулы для  $n_j$ , объединяя сла-  
гаемые, содержащие  $n_j$ , находим, что

$$\psi_{\xi}^5 n_j (j^5 - 20j^4 143j^3 - 400j^2 + 156j + 720) = \quad (16)$$

$$= F(n_{j-1}, \dots, n_0, \psi_{\zeta}, \psi_{\eta}, \psi_{\tau}).$$

Из (16) легко видеть, что  $j = -1, 4, 5, 6$  – это точки  
резонанса. Резонанс при  $j = -1$  соответствует  
произвольному виду функции  $\psi$ , характеризу-  
ющей сингулярную гиперповерхность. Чтобы  
проверить, удовлетворяют ли точки резонанса  
 $j = 4, 5, 6$  условию совместимости (16), следуя ан-  
зацу Крускала, использованному в методе WTC  
[60], рассмотрим следующее преобразование:

$$\psi(\xi, \zeta, \eta, \tau) = \xi - \phi(\zeta, \eta, \tau), \quad n_j = n_j(\tau), \quad (17)$$

где  $\phi(\zeta, \eta, \tau)$  – произвольная функция, и получим  
следующее рекуррентное соотношение для  $n_j$

$$\begin{aligned} & \Omega^2 [n_{j-5, \tau} - (j-6)n_{j-4} \phi_{\tau}] + \\ & + A \Omega^2 \sum_{k=0}^j (k-4)n_{k-2} n_{j-k} + \\ & + B \Omega^2 (j-4)(j-5)(j-6)n_{j-2}, \\ & + V^2 (j-5)(j-6) [n_{j-3, \tau} - (j-4)n_{j-2} \phi_{\tau}] \\ & + AV^2 \sum_{k=0}^j (k-2)(k-3) \times \quad (18) \\ & \times [(k-4) + 3(j-k-2)] n_j n_{j-k} + (j-5)(j-6) \times \\ & \times [BV^2 (j-2)(j-3)(j-4)n_j - \\ & - \frac{V^3}{2} (\phi_{\zeta\zeta} + \phi_{\eta\eta}) n_{j-3} + \\ & + \frac{V^3}{2} (j-4)(\phi_{\zeta}^2 + \phi_{\eta}^2) n_{j-2}] = 0. \end{aligned}$$

Подставляя  $j = 0, \dots, 6$  в указанное выше рекур-  
рентное соотношение (18), получаем следующие  
соотношения:

$$n_0 = \left(\frac{-12B}{A}\right), \quad n_1 = 0, \quad n_2 = \frac{2\phi_{\tau} - V(\phi_{\zeta}^2 + \phi_{\eta}^2)}{2A}, \quad (19)$$

$$n_3 = \frac{-V(\phi_{\zeta\zeta} + \phi_{\eta\eta})}{2A},$$

при этом  $n_4, n_5$ , и  $n_6$  являются произвольными.  
Это показывает, что нелинейное уравнение (12),  
описывающее эволюцию системы, обладает ин-  
тегрируемостью по Пенлеве в рамках метода WTC  
и следовательно может быть решено аналити-  
чески.

### 3.1. Применение преобразования Бэклунда для нахождения точных решений

Мы изучили свойство Пенлеве уравнения (12)  
и показали, что укороченное разложение Пенле-  
ве, предназначенное для определения точных  
решений уравнения (12), имеет следующий вид  
[48, 61]:

$$n_c^{(1)} = n_0 \psi^{-2} + n_1 \psi^{-1} + n_2. \quad (20)$$

Подставив (20) в (12) и приравняв коэффициенты  
при  $\psi^{-6}$  и  $\psi^{-7}$ , получаем

$$n_0 = \left(\frac{-12B}{A}\right) \psi_{\xi}^2, \quad n_1 = \left(\frac{12B}{A}\right) \psi_{\xi\zeta}, \quad (21)$$

а для  $\psi^0$  было найдено, что  $n_2$  удовлетворяет нели-  
нейному уравнению (12), которое имеет тривиаль-  
ное решение  $n_2 = 0$ . Возьмем за отправную точку  
это тривиальное решение  $n_2 = 0$ , и запишем пре-  
образование Бэклунда (ПБ) для уравнения (12)  
в следующем виде:

$$n_c^{(1)} = \left(\frac{12B}{A}\right) \frac{\partial^2 \ln(\psi)}{\partial \xi^2}. \quad (22)$$

Чтобы определить локализованные аналити-  
ческие решения уравнения (12) с помощью выше-  
упомянутого ПБ (22), введем плоскую волну  
 $\theta = \zeta + \eta + \xi - M\tau$  на искривленной поверхности  
 $\psi$ , такую что  $\psi = \psi(\theta)$ , где  $M$  – это число Маха. На  
плоскости  $\theta$  ПБ может быть записано в следую-  
щем виде

$$n_c^{(1)} = \left(\frac{12B}{A}\right) \frac{d^2 \ln(\psi(\theta))}{d\theta^2} = \left(\frac{12B}{A}\right) \left[ \frac{\psi''}{\psi} - \left(\frac{\psi'}{\psi}\right)^2 \right]. \quad (23)$$

Здесь штрих (') обозначает производную по  $\theta$ .  
Опять же, на плоскости  $\theta$  после однократного ин-

тегрирования уравнение (12) сводится к следующему уравнению,

$$\frac{d^4 n_c^{(1)}}{d\theta^4} + \left[ \frac{A}{B} n_c^{(1)} + \frac{\Omega^2}{V^2} + \frac{V-M}{B} \right] \frac{d^2 n_c^{(1)}}{d\theta^2} + \frac{3A}{2B} \left( \frac{dn_c^{(1)}}{d\theta} \right)^2 + \frac{\Omega^2 n_c^{(1)}}{BV^2} (An_c^{(1)} - M) = 0. \quad (24)$$

Для локализованного решения можно принять постоянную интегрирования равной нулю. Подставляя (23) в (24) и приравнявая коэффициенты при разных степенях  $\psi$ , получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Для физически допустимых решений мы рассматриваем ОДУ, соответствующие коэффициентам при  $\psi^{-1}$ , что дает

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left[ \frac{d^4}{d\theta^4} + \left( \frac{\Omega^2 + 2}{V^2} - \frac{2M}{V^3} \right) \frac{d^2}{d\theta^2} - \frac{2M\Omega^2}{V^5} \right] \psi = 0. \quad (25)$$

Решение уравнения (25) может быть записано следующим образом:

$$\psi(\theta) = k_1 + k_2\theta + k_3 e^{-\lambda_1\theta} + k_4 e^{\lambda_1\theta} + k_5 e^{-\lambda_2\theta} + k_6 e^{\lambda_2\theta}, \quad (26)$$

где  $k_i, s(i = 1, \dots, 6)$  – произвольные константы интегрирования,  $\lambda_{1(2)} = \sqrt{\phi_{1(2)}}$  – собственное значение, а

$$\phi_{1(2)} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{2M}{V^3} - \frac{\Omega^2 + 2}{V^2} \right) \mp \sqrt{\left( \frac{\Omega^2 + 2}{V^2} - \frac{2M}{V^3} \right)^2 + \frac{8M\Omega^2}{V^5}} \right]. \quad (27)$$

Из приведенных выше выражений видно, что собственное значение  $\lambda_1$  всегда чисто мнимое, поскольку  $\phi_1 < 0$ , и мы положили  $\phi_1 = i\lambda$ , где  $\lambda$  является действительным. Более того, собственное значение  $\lambda_2$  всегда действительное в присутствии внешнего магнитного поля. В итоге, подставив (26) в уравнение (23), получаем общее решение уравнения (12) в виде

$$n_c^{(1)}(\xi, \zeta, \eta, \tau) = \left( \frac{12B}{A} \right) \times \left[ \frac{\lambda_1^2 (k_3 e^{-\lambda_1\theta} + k_4 e^{\lambda_1\theta}) + \lambda_2^2 (k_5 e^{-\lambda_2\theta} + k_6 e^{\lambda_2\theta})}{k_1 + k_2\theta + k_3 e^{-\lambda_1\theta} + k_4 e^{\lambda_1\theta} + k_5 e^{-\lambda_2\theta} + k_6 e^{\lambda_2\theta}} - \left( \frac{k_2 - \lambda_1 (k_3 e^{-\lambda_1\theta} - k_4 e^{\lambda_1\theta}) - \lambda_2 (k_5 e^{-\lambda_2\theta} - k_6 e^{\lambda_2\theta})}{k_1 + k_2\theta + k_3 e^{-\lambda_1\theta} + k_4 e^{\lambda_1\theta} + k_5 e^{-\lambda_2\theta} + k_6 e^{\lambda_2\theta}} \right)^2 \right]. \quad (28)$$

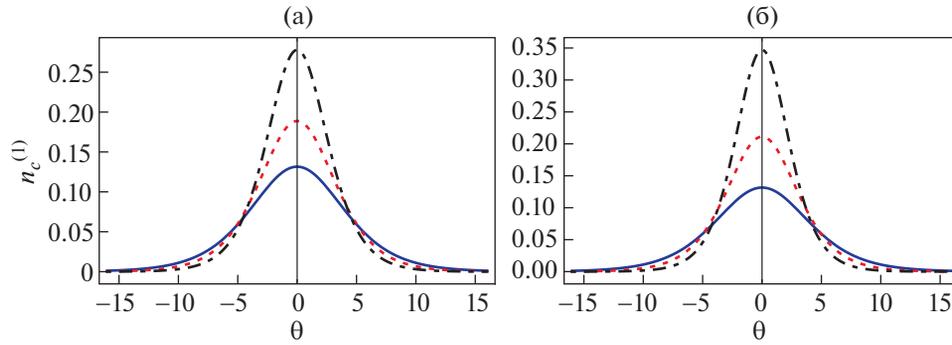
### 3.2. Решения в виде солитонов

Для получения решений в виде солитонов, положим в общем решении (28)  $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$  и  $k_5 = k_6$ ; тогда после проведения простых алгебраических преобразований мы получим

$$n_c^{(1)} = \left( \frac{12B\lambda_2^2}{A} \right)^2 (\lambda_2\theta). \quad (29)$$

Таким образом, нелинейное уравнение (12), описывающее эволюцию системы, имеет решение в виде одиночного солитона (29) с одним пиком. Чтобы получить некоторую численную оценку полученных результатов, возьмем типичные значения параметров, соответствующие авроральной зоне [8, 19]:  $T_c \approx 5$  эВ,  $T_h \approx 250$  эВ,  $n_{c0} \approx 0.5$  см<sup>-3</sup>, и  $n_{h0} \approx 2.0$  см<sup>-3</sup>. Эти параметры соответствуют  $\alpha \approx 4.0$ . Кроме того, настоящий анализ ограничен следующим диапазоном значений параметра неэкстенсивности  $q$ :  $0.6 < q \leq 1$  [54]. На рис. 1 представлено влияние параметра неэкстенсивности  $q$  и концентрации позитронов  $\mu_1$  на вид решения в виде солитона. Видно, что солитон сжимается, а его амплитуда увеличивается с увеличением  $q$  и  $\mu_1$ , т.е. увеличивающиеся неэкстенсивность и концентрация позитронов могут сделать солитон более острым. С физической точки зрения, увеличение концентрации позитронов приводит к уменьшению концентрации ионов ( $n_{i0}$ ) вследствие условия квазинейтральности, и, следовательно, амплитуда солитона увеличивается, в то время как его ширина уменьшается. Эту особенность можно использовать в диагностических целях в случаях, когда возможно введение позитронной популяции в электронно-ионную плазму.

Кроме того, положив в общем решении (28)  $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ ,  $k_5 = k_6 = P$  и  $k_4 = P/2$ , мы получим решение в виде  $M$ -образного солитона. На рис. 2 представлены решения в виде  $M$ -образных солитонов, полученные при различных значениях напряженности магнитного поля  $\Omega$ . Видно, что амплитуда солитона возрастает с увеличением магнитного поля  $\Omega$ . Кроме того, протяженность (ширина)  $M$ -образного солитона уменьшается с увеличением внешнего магнитного поля. Следовательно, увеличение магнитного поля приводит к усилению нелинейности и уменьшению дисперсии и, таким образом, локализованные структуры становятся намного выше и уже. С физической точки зрения, увеличение магнитного поля увеличивает частоту колебаний электронов, что приводит к увеличению фазовой скорости волн при постоянной длине волны. Далее солитон распространяется с большей скоростью. Поскольку



**Рис. 1.** Решения уравнения (12) в виде солитонов, описываемые формулой (29) для различных значений (а) параметра неэкстенсивности  $q$  ( $q = 0.7$  (сплошная линия),  $q = 0.8$  (пунктир) и  $q = 0.9$  (штриховая линия)) при  $\mu_1 = 0.3$  и (б) концентрации позитронов  $\mu_1$  ( $\mu_1 = 0.3$  (сплошная линия),  $\mu_1 = 0.4$  (пунктир) и  $\mu_1 = 0.5$  (штриховая линия)) при  $q = 0.7$ . Остальные параметры имеют следующие значения:  $\Omega = 0.05$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\alpha = 4$ , and  $M = 0.9$ .

скорость солитона прямо пропорциональна его амплитуде, то амплитуда солитона также увеличивается.

### 3.3. Периодическое решение

Из теории динамических систем известно, что чисто мнимые собственные значения всегда соответствуют периодическому решению нелинейной системы уравнений. Поэтому для нахождения периодического решения из общего решения (28) положим  $k_1 = k_3 = P$ ,  $k_2 = k_5 = k_6 = 0$  и  $k_4 = -P$ , где  $P$  – положительная константа. Таким

образом, периодическое решение уравнения (12) имеет вид

$$n_c^{(1)} = \left( \frac{24B\lambda^2}{A} \right) \left[ \frac{(2 + i \sin(\lambda\theta))}{\{1 - 2i \sin(\lambda\theta)\}^2} \right]. \quad (30)$$

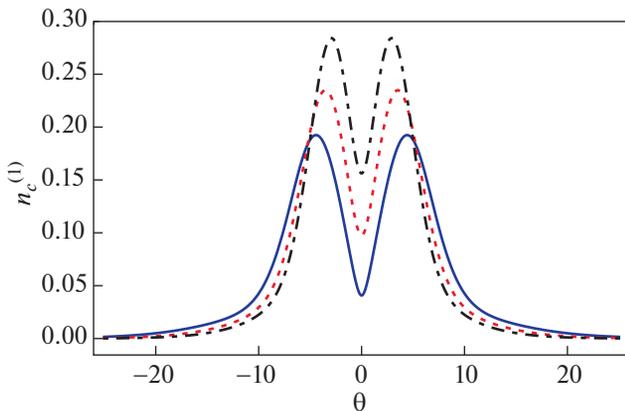
На рис. 3 приведены периодические решения уравнения (12) для нескольких значений параметра неэкстенсивности  $q$  и напряженности внешнего магнитного поля  $\Omega$ . Из рис. 3а видно, что амплитуда колебаний, а также число колебаний уменьшается с ростом  $q$ , в то время как из рис. 3б видно, что при увеличении напряженности магнитного поля возрастают число и амплитуда колебаний.

### 3.4. Решения типа “бризеров” и “блуждающих волн”

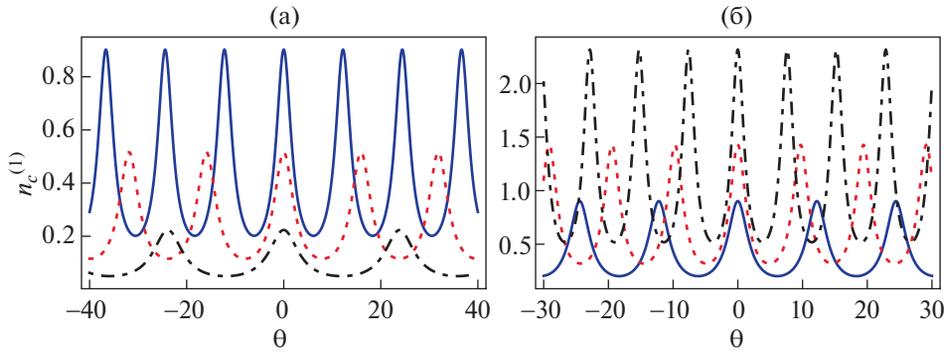
Название “бризер” отражает поведение профиля волны, в котором энергия локализована и меняется колебательным образом. Выбирая параметры  $k_1 = k_5 = k_6 = P$ ,  $k_2 = 0$  и  $k_3 = k_4 = P/2$ , где  $P$  – положительная константа, мы получаем решение типа “бризера”, которое выглядит следующим образом:

$$n_c^{(1)} = \left( \frac{12B}{A} \right) (\lambda_2\theta) [2\lambda_2^2 + (2\lambda_2^2 - 2\lambda^2) \cos(\lambda\theta) + (4\lambda_2^2 - \lambda^2) \cosh(\lambda_2\theta) - \lambda^2 \cos(\lambda\theta)(\lambda_2\theta) + 4\lambda\lambda_2 \sin(\lambda\theta) \tanh(\lambda_2\theta)] \{2 + \cos(\lambda\theta)(\lambda_2\theta) + (\lambda_2\theta)\}^2. \quad (31)$$

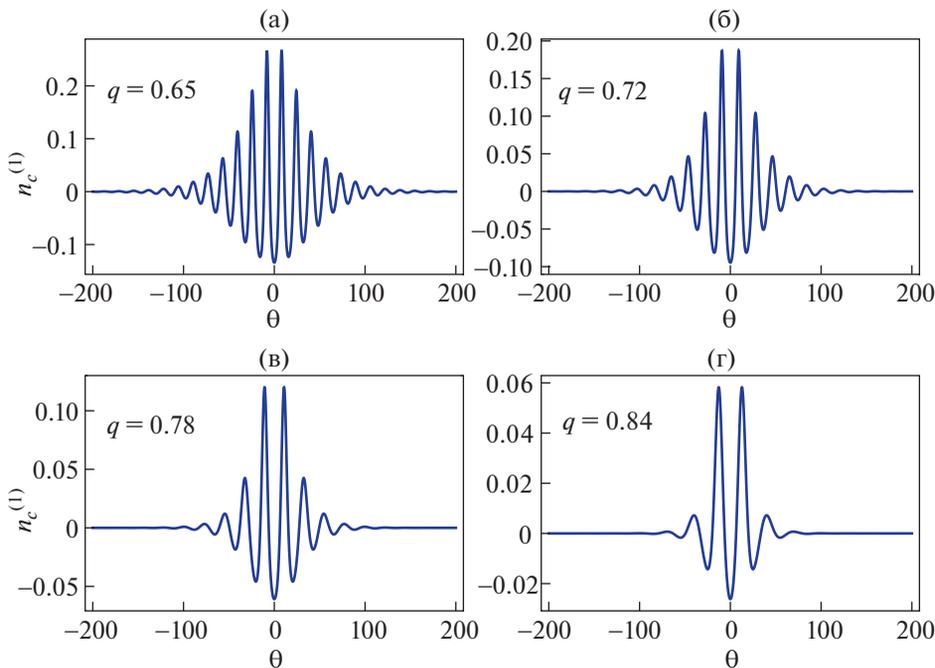
Для иллюстрации поведения бризерных колебаний на рис. 4 изображено решение (31) для различных значений параметра неэкстенсивности  $q$ . Видно, что колебания и их огибающая распространяются с разными скоростями. Также видно, что число колебаний в волновом пакете и их амплитуда уменьшаются с увеличением  $q$ . Наблюда-



**Рис. 2.** Решения уравнения (12) в виде  $M$ -образных солитонов для различных значений напряженности магнитного поля ( $\Omega = 0.06$  (сплошная линия),  $\Omega = 0.08$  (пунктир) и  $\Omega = 0.1$  (штриховая линия)) при  $q = 0.7$ ,  $\mu_1 = 0.3$ ,  $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ ,  $k_5 = k_6 = 1$ ,  $k_4 = 1/2$ . Остальные параметры имеют те же значения, что и на рис. 1.



**Рис. 3.** Периодическое решение уравнения (12), описываемое формулой (30), для различных значений (а) параметра неэкстенсивности ( $q = 0.8$  (сплошная линия),  $q = 0.85$  (пунктир) и  $q = 0.9$  (штриховая линия)) при  $\mu_1 = 0.3$ ,  $\Omega = 0.01$  и (б) напряженности магнитного поля ( $\Omega = 0.01$  (сплошная линия),  $\Omega = 0.04$  (пунктир) и  $\Omega = 0.08$  (штриховая линия)) при  $\mu_1 = 0.3$  и  $q = 0.8$ ,  $k_1 = k_3 = 1$ ,  $k_2 = k_5 = k_6 = 0$ ,  $k_4 = -1$ . Остальные параметры имеют те же значения, что и на рис. 1.

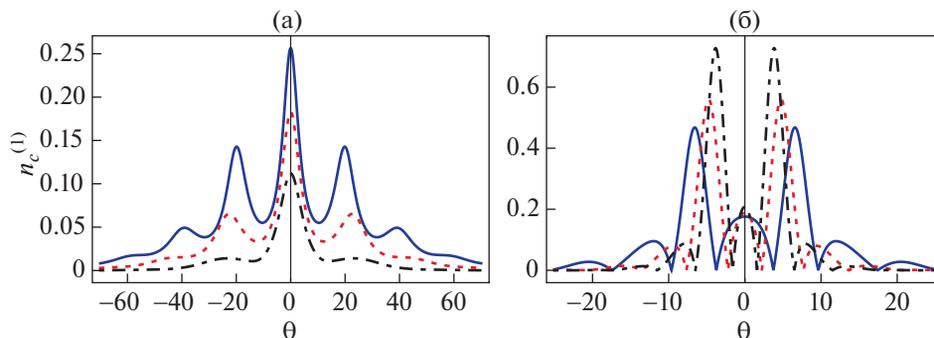


**Рис. 4.** Решения уравнения (12) типа “бризера”, описываемое формулой (31), для различных значений параметра неэкстенсивности  $q$  при  $\sigma = 1$ ,  $\mu_1 = 0.3$ ,  $\Omega = 0.01$ ,  $\alpha = 4$  и  $M = 0.9$ .  $k_1 = k_5 = k_6 = 1$ ,  $k_2 = 0$  и  $k_3 = k_4 = 1/2$ .

емые здесь бризерные структуры являются результатом взаимодействия волн с различными фазами. Таким образом, формирование бризера является признаком фазового смещения волн. С другой стороны, возможные решения в виде “блуждающих волн” (“волн-убийц”), которые представляют собой сильные вейвлеты, которые могут “внезапно появиться из ниоткуда и бесследно исчезнуть в никуда” [62]. На сегодняшний день признано, что блуждающие волны по сути являются собственными нелинейными структурами. Волны-убийцы – это короткоживущие явления, с

небольшой вероятностью возникающие внезапно из обычных волн. Подставляя  $k_1 = k_5 = k_6 = P$ ,  $k_2 = k_3 = 0$  и  $k_4 = -P$  в общее решение (28), мы получим решение типа волны-убийцы в следующем виде:

$$n_c^{(1)} = \left(\frac{12B}{A}\right) [4\lambda_2^2 + 2(\lambda_2^2 - \lambda_2^2 e^{i\lambda\theta} + \lambda_2^2 e^{i\lambda\theta})(\lambda_2\theta) + (4\lambda_2^2 - \lambda_2^2 e^{i\lambda\theta})^2(\lambda_2\theta) + 4i\lambda\lambda_2 e^{i\lambda\theta} \times \tanh(\lambda_2\theta)(\lambda_2\theta)] \{2 + (1 - e^{i\lambda\theta})(\lambda_2\theta)\}^{-2}. \tag{32}$$



**Рис. 5.** (а)- Профиль решения уравнения (12) типа волны-убийцы (32) для различных значений параметра неэкстенсивности ( $q = 0.75$  (сплошная линия),  $q = 0.8$  (пунктир) и  $q = 0.86$  (штриховая линия)) при  $\Omega = 0.01$  и  $k_1 = k_5 = k_6 = 1$ ,  $k_2 = k_3 = 0$ ,  $k_4 = -1/2$  и (б) профиль решения, соответствующего другому типу волны-убийцы (33), для различных значений напряженности магнитного поля ( $\Omega = 0.05$  (сплошная линия),  $\Omega = 0.1$  (пунктир) и  $\Omega = 0.15$  (штриховая линия)) при  $q = 0.7$ ,  $k_1 = k_3 = k_4 = k_5 = k_6 = 1$  и  $k_2 = 0$ . Остальные параметры имеют те же значения, что и на рис. 4.

Это решение описывает случай, когда энергия волны конденсируется в относительно небольшой области пространства, которая создается из-за наличия нелинейных свойств плазменной среды, и такая волна может иметь структуру волны-убийцы, как это показано на рис. 5а. Из рисунка

видно, что отсутствие экстенсивности снижает амплитуду волны-убийцы. Чтобы получить другой тип решения типа волны-убийцы из соотношения (28), возьмем  $k_1 = k_3 = k_4 = k_5 = k_6 = P$  и  $k_2 = 0$  и получим следующее выражение:

$$n_c^{(1)} = \left(\frac{12B}{A}\right)(\lambda_2\theta) \left[ \frac{4(\lambda_2^2 - \lambda^2)\{\cos(\lambda\theta) + (\lambda_2\theta)\} + 8\lambda\lambda_2 \sin(\lambda\theta) \tanh(\lambda_2\theta)}{\{2 + (1 + 2 \cos(\lambda\theta))(\lambda_2\theta)\}^2} \right]. \quad (33)$$

Профиль решения (33) показан на рис. 5б для различных значений напряженности магнитного поля  $\Omega$ . Видно, что амплитуда волны-убийцы увеличивается с увеличением  $\Omega$ . С физической точки зрения, магнитное поле в плазменной системе усиливает связь и генерирует новые возмущения на электронных орбитах. Эта нелинейность, вносимая магнитным полем, создает новые гармоники, и возникающие структуры типа волн-убийц выявляют эти нелинейные явления. Как правило, бризеры и структуры типа волн-убийц можно описать, используя хорошо известное нелинейное уравнение Шредингера [62, 63].

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе исследовалось нелинейное распространение ЭЗВ в замагниченной плазме, состоящей из горячих электронов и позитронов, характеризуемых неэкстенсивным распределением, подвижных холодных электронов и неподвижных положительных ионов. Используя стандартную методику теории возмущений, получено уравнение Лидке–Шпачека, которое определяет нелинейную динамику ЭЗВ малой амплитуды в неэкстенсивной замагниченной плазме. Мы ис-

пользовали анализ Пенлеве, чтобы показать интегрируемость нелинейного уравнения, описывающего динамику системы. Путем применения преобразования Бэклунда была получена серия аналитических решений уравнения Лидке–Шпачека. Решения показывают, что нелинейное уравнение, описывающее ЭЗВ, описывает различные типы нелинейных структур, такие как одиночный солитон,  $M$ -образный солитон, бризер и структуры типа блуждающих волн (волн-убийц). Было показано, что эти нелинейные структуры существенно определяются соответствующими параметрами плазмы (энтропийным индексом  $q$ , напряженностью магнитного поля, концентрацией позитронов). Полученные аналитические результаты описывают широкий класс чрезвычайно интересных когерентных нелинейных явлений и могут быть использованы в различных областях физики [63, 64].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Henry D., Treguier J.P. // J. Plasma Phys. 1972. V. 8. P. 311.
2. Gary S.P., Tokar R.L. Phys. Fluids. 1985. V. 28. P. 2439.

3. *Matsumoto H., Kojima H., Miyatake T., Omura Y., Oka-da M., Nagano I., Tsutsui M.* // *Geophys. Res. Lett.* 1994. V. 21. P. 2915.
4. *Bale S.D., Kellogg P.J., Larson D.E., Lin R.P., Goetz K., Leeping R.P.* *Geophys. Res. Lett.* 1998. V. 25. P. 2929.
5. *Vasko I.Y., Agapitov O.V., Mozer F.S., Bonnell J.W., Artemyev A.V., Krasnoselskikh V.V., Reeves G., Hospodarsky G.* // *Geophys. Res. Lett.* 2017. V. 44. P. 4575. <https://doi.org/10.1002/2017GL074026>
6. *Ikezawa S., Nakamura Y.* // *J. Phys. Soc. Japan.* 1981. V. 50. P. 962.
7. *Anderegg F., Driscoll C.F., Dubin D.H.E., O'Neil T.M.* // *Phys. Rev. Lett.* 2009. V. 102. P. 095001.
8. *Dubouloz N., Treumann R.A., Pottelette R., Malingre M.* // *J. Geophys. Res.* 1993. V. 98. P. 17415.
9. *Lin C.S., Burch J.L., Shawhan S.D., Gurnett D.A.* // *J. Geophys. Res.* 1984. V. 89. P. 925.
10. *Schrivver D., Ashour-Abdalla M.* // *Geophys. Res. Lett.* 1989. V. 16. P. 899.
11. *Gary S., Tokar R.L.* // *Phys. Fluids.* 1985. V. 28. P. 2439.
12. *Mamun A.A., Shukla P.K., Stenflo L.* // *Phys. Plasmas.* 2002. V. 9. P. 1474.
13. *Anowar M.G.M., Mamun A.A.* *Phys. Plasmas.* 2008. V. 15. P. 102111.
14. *Lakhina G.S., Singh S.V., Kakad A.P., Verheest F., Bharuthram R.* // *Nonlinear Process. Geophys.* 2008. V. 15. P. 903.
15. *Dutta M., Ghosh S., Chakrabarti N.* // *Phys. Rev. E.* 2012. V. 86. P. 066408.
16. *Mannan A., Mamun A.A., Shukla P.K.* // *Chin. J. Phys.* 2013. V. 51. P. 983.
17. *Bansal S., Aggarwal M., Gill T.S.* // *Plasma Phys. Rep.* 2020. V. 46. P. 715.
18. *Mamun A.A., Shukla P.K.* // *J. Geophys. Res.* 2002. V. 107. P. 1135.
19. *Shukla P.K., Mamun A.A., Eliasson B.* // *Geophys. Res. Lett.* 2004. V. 31. P. L07803.
20. *Angelopoulos V.* // *Space Sci. Rev.* 2008. V. 141. P. 5.
21. *Agapitov O.V., Krasnoselskikh V., Mozer F.S., Artemyev A.V., Volokitin A.S.* // *Geophys. Res. Lett.* 2015. V. 42. P. 3715.
22. *Popel S.I., Vladimirov S.V., Shukla P.K.* // *Phys. Plasmas.* 1995. V. 2. P. 716.
23. *Tandberg-Husen E., Emslie A.G.* // *The Physics of Solar Flares.* Cambridge University Press, Cambridge, England, 1988, p. 124.
24. *Miller H.R., Witta P.J.* // *Active Galactic Nuclei.* Springer-Verlag, Berlin, 1987, p. 202.
25. *Michel F.C.* // *Rev. Mod. Phys.* 1982. V. 54. P. 1.
26. *Daniel J., Tajima T.* // *Astrophys. J.* 1998. V. 498. P. 296.
27. *Greaves R.G., Surko C.M.* // *Phys. Rev. Lett.* 1995. V. 75. P. 3847.
28. *Renyi A.* // *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 1955. V. 6. P. 285.
29. *Tsallis C.* // *J. Stat. Phys.* 1988. V. 52. P. 479.
30. *Aranha R., Soares I., Tonini E.* // *Phys. Rev. D.* 2010. V. 81. P. 104005.
31. *de Oliveira H., Soares I.D., Tonini E.V.* // *Phys. Rev. D.* 2003. V. 67. P. 063506.
32. *Tribeche M., Sabry R.* // *Astrophys. Space Sci.* 2012. V. 341. P. 579.
33. *Shahmansouri M., Alinejad H.* // *Astrophys. Space Sci.* 2013. V. 344. P. 463.
34. *Ferdousi M., Mamun A.A.* // *Braz. J. Phys.* 2015. V. 45. P. 89.
35. *Golshan A.N.* // *Plasma Phys. Rep.* 2020. V. 46. P. 943.
36. *Jilani K., Mirza A.M., Khan T.A.* // *Astrophys. Space Sci.* 2014. V. 349. P. 255.
37. *Shuchy S.T., Mannan A., Mamun A.A.* // *JETP Lett.* 2012. V. 95. P. 282.
38. *Rafat A., Rahman M.M., Alam M.S., Mamun A.A.* // *Commun. Theor. Phys.* 2015. V. 63. P. 243.
39. *Bansal S., Aggarwal M.* // *Plasma Phys. Rep.* 2019. V. 45. P. 991.
40. *Zakharov V.E., Kuznetsov E.A.* // *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 1974. V. 66. P. 594. [*Sov. Phys. JETP.* 1974. V. 39. P. 285.]
41. *Shalaby M., El-Labany S.K., Sabry R., El-Sherif L.S.* // *Phys. Plasmas.* 2001. V. 6. P. 18.
42. *Adnan M., Williams G., Qamar A., Mahmood S., Kourakis I.* // *Eur. Phys. J. D.* 2014. V. 68. P. 247.
43. *Seadawy A.R.* // *Physica A.* 2016. V. 455. P. 44.
44. *Sarker M., Hossen M.R., Shah M.G., Hosen B., Mamun A.A.* // *Z. Naturforsch.* 2018. V. 73. P. 501.
45. *Bansal S., Aggarwal M., Gill T.S.* // *Contrib. Plasma Phys.* 2019. V. 59. P. e201900047.
46. *Poria S., Ghosh S.* // *Phys. Plasmas.* 2016. V. 23. P. 062315.
47. *Laedke E.W., Spatschek K.H.* // *Phys. Fluids.* 1982. V. 25. P. 985.
48. *Biswas A., Ghosh S., Chakrabarti N.* // *Phys. Scr.* 2020. V. 95. P. 105603.
49. *Kopp A., Schröer A., Birk G.T., Shukla P.K.* // *Phys. Plasmas.* 1997. V. 4. P. 4414.
50. *Feron C., Hjorth J.* // *Phys. Rev. E.* 2008. V. 77. P. 022106.
51. *Gervino G., Lavagno A., Pigato D.* // *Cent. Eur. J. Phys.* 2012. V. 10. P. 594.
52. *Silva R., Plastino A.R., Lima J.A.S.* // *Phys. Lett. A.* 1998. V. 249. P. 401.
53. *Lima J.A.S., Silva R., Santos J.* // *Phys. Rev. E.* 2000. V. 61. P. 3260.
54. *Williams G., Kourakis I., Verheest F., Verheest F.* // *Phys. Rev. E.* 2013. V. 88. P. 023103.
55. *Kadomstev B.B., Petviashvili V.I.* // *Dokl. Akad. Nauk SSSR.* 1970. V. 192. P. 753. [*Sov. Phys. Dokl.* 1970. V. 15. P. 539.]
56. *Korteweg D., de Vries G.* // *Philos. Mag.* 1895. V. 39. P. 422.

57. Ablowitz M.J., Segur H. // *Solitons and the Inverse Scattering Transformation*. Philadelphia, SIAM, 1981.
58. Lakshmanan M., Rajasekar S. // *Nonlinear Dynamics: Integrability, Chaos and Patterns*. Berlin, Heidelberg, Springer, 2003.
59. Weiss J., Tabor M., Carnevale G. // *J. Math. Phys.* 1983. V. 24. P. 522.
60. Kruskal M.D., Joshi N., Halburd R. // *Integrability of Nonlinear Systems*. Lecture Notes in Physics, ed. Y. Kosmann-Schwarzbach, B. Grammaticos, and K.M. Tamizhmani. Springer, Berlin, Germany, 1997, Vol. 495. P. 171.
61. Weiss J. // *Partially Integrable Evolution Equations in Physics*. NATO ASI Series. Mathematical and Physical Sciences, ed. R. Conte and N. Boccara. Dordrecht, Springer, 1990. V. 310. P. 375.
62. Akhmediev N., Ankiewicz A., Soto-Crespo J.M. // *Phys. Rev. E*. 2009. V. 80. P. 026601.
63. Dysthe K.B., Trulsen K. // *Phys. Scr.* 1999. V. T82. P. 48.
64. Dudley J.M., Genty G., Mussot A., Chabchoub A., Dias F. // *Nature Rev. Phys.* 2019. V. 1. P. 675.