
**ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН
С ПЛАЗМОЙ**

УДК 533.9.01

СПОСОБЫ СНИЖЕНИЯ АНОМАЛЬНЫХ ПОТЕРЬ В ЭЦРН-ЭКСПЕРИМЕНТАХ НА ВТОРОЙ ГАРМОНИКЕ РЕЗОНАНСА

© 2022 г. Е. З. Гусаков^{а, *}, А. Ю. Попов^{а, **}^а Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербург, Россия*e-mail: evgeniy.gusakov@mail.ioffe.ru**e-mail: a.popov@mail.ioffe.ru

Поступила в редакцию 30.11.2021 г.

После доработки 19.12.2021 г.

Принята к публикации 25.12.2021 г.

Проанализирован подход, позволяющий уменьшить аномальное поглощение в экспериментах по электронному циклотронному резонансному нагреву (ЭЦРН) на второй гармонике ЭЦ-резонанса, связанное с возбуждением низкопороговой параметрической распадной неустойчивости необыкновенной СВЧ-волны накачки в локальном максимуме немонотонного профиля плотности. Рассмотрен общий случай, соответствующий нелинейному возбуждению в результате первичного распадного процесса только одной локализованной дочерней верхне-гибридной волны. Показано, что из-за довольно низкого порога неустойчивости ее полное подавление в ЭЦРН-экспериментах с мегаваттными пучками СВЧ-волн маловероятно. Однако увеличение радиуса пучка волны накачки способно существенно уменьшить соответствующее аномальное поглощение.

Ключевые слова: СВЧ-нагрев, параметрические распадные неустойчивости, аномальное поглощение СВЧ-волн

DOI: 10.31857/S0367292122040060

1. ВВЕДЕНИЕ

Электронный циклотронный резонансный нагрев (ЭЦРН) широко применяется в современных токамаках и стеллараторах. Предполагается, что он будет использоваться в тороидальных установках будущего поколения – токамаках-реакторах ITER [1] и DEMO [2]. Наличие надежных и относительно компактных генераторов (гиротронов) и концепция локального энерговыделения СВЧ-волн в области ЭЦ-резонанса [3], основанная, в частности, на теоретическом анализе, предсказывающем отсутствие нелинейных явлений при распространении обыкновенных и необыкновенных волн [4], делает этот метод очень привлекательным. Однако, за последнее два десятилетия в экспериментах по ЭЦРН-плазмы наблюдался ряд аномальных эффектов, среди которых аномальное обратное рассеяние СВЧ-волн [5–7], ускорение ионов [8–10] и сильное уширение профиля энерговыделения [11–15]. Эти эффекты было невозможно интерпретировать в рамках линейной модели взаимодействия волны и плазмы. Они также были необъяснимы в рамках нелинейной теории волн [4], которая предсказывает чрезвычайно высокие пороги возбуждения любых нелинейных явлений, включая параметрические распадные неустойчивости (ПРН), по

крайней мере, пока верхний гибридный резонанс (ВГР) для СВЧ-волны остается вне объема плазмы. Для объяснения этих аномальных явлений была предложена новая теоретическая модель, которая расширяет концепцию развития нелинейных (параметрических) явлений в неоднородной плазме, изложенную в обзоре [4], и учитывает особенности реальных профилей плотности и магнитного поля в тороидальных установках при ЭЦРН. С помощью новой модели оказалось возможным интерпретировать все аномальные явления и эффекты как следствие возбуждения низкопороговой ПРН-волны накачки. Ключевыми элементами новой теоретической модели являются, во-первых, возможность локализации нелинейно генерируемых дочерних волн (волны) вдоль направления неоднородности в локальном максимуме немонотонного профиля плотности, часто наблюдаемого в ЭЦРН-экспериментах [16–18]; во-вторых, дополнительная локализация дочерних волн на магнитной поверхности за счет конечной ширины пучка накачки. Следует отметить, что эффект локализации позволяет подавить потери энергии дочерних волн (волны) из области распада и приводит к возможности воз-

буждения абсолютной ПРН-волны накачки, при которой амплитуда дочерних волн (волны) растет экспоненциально во времени [19–25].

Для типичных условий экспериментов по ЭЦРН на второй гармонике ЭЦ-резонанса с использованием СВЧ-волны необыкновенной поляризации наиболее опасным сценарием ПРН-волны накачки является двухплазмонный распад, ведущий к генерации двух верхних гибридных (ВГ) квазипродольных волн [21]. Скорее всего, первичная двухплазмонная ПРН насыщается в результате двух конкурирующих процессов: каскада вторичных распадов [26–29] и истощения волны накачки [30–32]. Анализ, результаты которого могут быть найдены в [33–36], показывает, что независимо от того, локализованы ли обе первичные дочерние волны или только одна из них, уровень аномального поглощения определяется числом возможных ступеней каскада вторичных распадов. В случае каскада вторичных распадов первичной дочерней волны (волн) с нечетным числом ступеней именно этот каскадный процесс приводит к насыщению неустойчивости. Однако, в случае четного числа вторичных неустойчивостей истощение волны накачки играет решающую роль в переходе первичной неустойчивости в режим насыщения и ответственно за аномальное поглощение на чрезвычайно высоком уровне (до 80% мощности накачки). В работе [27] было показано, что основные предсказания разработанной теоретической модели, в частности, пороговая мощность первичной неустойчивости и спектр вторичных волн, находятся в разумном согласии с результатами, полученными при детальном исследовании аномального обратного рассеяния в токамаке TEXTOR [6]. Следует отметить, что возможность сильного аномального поглощения волны накачки необыкновенной поляризации в ЭЦРН-экспериментах на второй гармонике ЭЦ-резонанса была экспериментально обнаружена в модельных экспериментах, проведенных на линейной плазменной установке [37].

Таким образом, низкороговый двухплазмонный распад может привести к ухудшению эффективности дополнительного нагрева. Это обстоятельство делает важным поиск способа избежать или уменьшить влияние этого паразитного эффекта. В частном случае, когда обе первичные ВГ волны, возникающие в результате параметрического распада необыкновенной волны накачки, могут быть локализованы в окрестности максимума профиля плотности, метод уменьшения аномального поглощения был предложен в работе [38]. Однако, этот случай очень специфичен и может иметь место только в узком диапазоне параметров плазмы. В общем случае, необыкновенная волна накачки в ЭЦРН-экспериментах может распадаться на захваченную ВГ-волну и незахваченную ВГ- (или необыкновенную) волну.

Именно такой сценарий распада наблюдался в установках ASDEX-Upgrade [39] и Wendelstein 7-X [40] в их последних экспериментальных сессиях. Следует отметить, что в обеих установках ПРН была обнаружена в широком диапазоне параметров при прохождении пучка СВЧ-волн необыкновенной поляризации через плазменное образование, в котором наблюдался локальный максимум плотности (вращающиеся или стационарные магнитные острова, центр плазменного шнура, ЕЛМы (edge localized modes)). К сожалению, насыщение неустойчивости в этом случае описывается совсем другим, в сравнении с [38], набором нелинейных уравнений. По этой причине результаты анализа, изложенные в работе [38], и предложенный там подход к подавлению аномальных эффектов в общем случае неприменимы.

Чтобы заполнить этот теоретический пробел, в настоящей работе мы рассматриваем возможности уменьшения аномального поглощения, в ситуации, когда первичный низкороговый распад приводит только к возбуждению лишь одной локализованной дочерней ВГ-волны, в то время как вторая дочерняя ВГ- (или необыкновенная) волна покидает область нелинейного взаимодействия вдоль направления неоднородности. В работе анализируются каскады вторичных распадов захваченной первичной ВГ-волны как с нечетным, так и с четным числом шагов. Учитывается также эффект истощения волны накачки. В результате проведенного анализа, показано, что увеличение ширины пучка волны накачки может приводить к уменьшению аномального поглощения необыкновенной волны накачки.

2. ПЕРВИЧНЫЙ РАСПАД НЕОБЫКНОВЕННОЙ ВОЛНЫ НАКАЧКИ И ДВА МЕХАНИЗМА ЕЕ НАСЫЩЕНИЯ

Параметрический распад происходит в небольшом объеме, где выполняются распадные условия для волновых векторов и частот взаимодействующих волн. Это позволяет использовать декартову систему координат (x, y, z) , где координата x играет роль потоковой переменной и направлена внутрь плазменного шнура, а координаты y, z направлены поперек и вдоль магнитной силовой линии на магнитной поверхности. Начало системы координат совпадает с локальным максимумом профиля верхней гибридной (ВГ) частоты. Рассмотрим монохроматическую необыкновенную (X) волну накачки, распространяющуюся квазиперпендикулярно внешнему маг-

нитному полю. В ВКБ-приближении ее можно представить в виде

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{e}_0 \frac{C_0(\mathbf{r})}{2} \sqrt{\frac{\omega_0}{k_x(\omega_0, x)c}} \times \exp\left(i \int^x k_x(\omega_0, x') dx' - i\omega_0 t\right) + c.c., \quad (1)$$

где $\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_{0x} + \mathbf{e}_{0y} = \mathbf{e}_y - i\mathbf{e}_x \frac{g_0}{\epsilon_0}$ – вектор поляризации, $\mathbf{e}_{x,y}$ – единичные вектора вдоль соответствующего направления, $k_x = \frac{\omega_0}{c} \sqrt{\epsilon_0 - \frac{g_0^2}{\epsilon_0}}$ – локальное значение волнового вектора, $g_0 = g(\omega_0)$ и $\epsilon_0 = \epsilon(\omega_0)$ – перпендикулярные компоненты тензора диэлектрической проницаемости холодной плазмы [41]. Потенциалы дочерних ВГ-волн, – обозначаемых индексами “a” и “b”, где первая волна локализована в окрестности максимума немоного профиля плотности, а вторая является нелокализованной, – в ВКБ-приближении могут быть представлены в следующем виде [22, 23]

$$\begin{aligned} \varphi_a &= \frac{C_a}{2} \phi_m(x) \exp(-i\omega_m t) + c.c., \\ \varphi_b &= \frac{C_b}{2} \times \\ &\times \exp\left(i \int_0^x q_x^-(\omega_0 - \omega_m, x') dx' + i(\omega_0 - \omega_m)t\right) + c.c., \end{aligned} \quad (2)$$

где собственная функция [21]

$$\begin{aligned} \phi_m(x) &= \frac{1}{\sqrt{L_m^+(x)}} \exp\left(i \int_{x_i^*}^x q_x^+(\omega_m, \xi) d\xi - i\frac{\pi}{4}\right) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{L_m^-(x)}} \exp\left(i \int_{x_i^*}^x q_x^-(\omega_m, \xi) d\xi + i\frac{\pi}{4}\right), \end{aligned} \quad (3)$$

описывает локализацию волны “a” вдоль координаты x . В выражениях (2) и (3) волновые числа $q_x^\pm(\omega, \xi)$ соответствуют “теплому” (+) и “холодному” (–) решению локального дисперсионного уравнения ВГ-волны $D_{UH}(\omega_m, q_x^\pm) = 0$, полученному при $q_y = 0$ и $q_z = 0$, и $D_q^\pm = \partial D_{UH} / \partial q_x|_{q_x^\pm(\omega, x)}$. Явный вид дисперсионного уравнения может быть найден в [21, 41]. Частота локализованной волны подчиняется условию квантования Бора–

Зоммерфельда [21]

$$\int_{x_i^*}^{x_r^*} q_x^+(\omega_m, \xi) d\xi + \int_{x_r^*}^{x_i^*} q_x^-(\omega_m, \xi) d\xi = \pi(2m + 1),$$

где $x_{i,r}^*$ – два решения уравнения $D_q(x_{i,r}^*) = 0$. В отсутствие нелинейной связи амплитуды всех волн $C_{0,a,b}$ в выражениях (1) и (2) постоянны. При возбуждении неустойчивости они перестают быть постоянными величинами. В частности, истощение волны накачки (1) в результате распада при естественном предположении слабой её дифракции описывается следующим уравнением, полученным впервые в работе [35]

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_0}{\partial x} &= -i \frac{\omega_0}{2cB_0} \chi_e^{(p)} C_a \phi_m C_b^* \times \\ &\times \exp\left(-i \int^x (q_x^-(x') + k_0(x')) dx'\right). \end{aligned} \quad (4)$$

Граничное условие для амплитуды $C_0(\mathbf{r})$ волны накачки, падающей на слой плазмы, где происходит нелинейное взаимодействие, имеет вид

$$C_0|_{-\infty} = \sqrt{\frac{8P_0}{cw^2}} \exp\left(-\frac{y^2}{2w^2} - \frac{z^2}{2w^2}\right), \quad (5)$$

где P_0 и w – мощность и ширина пучка. В выражении (4) B_0 – величина индукции магнитного поля в области распада, $\chi_e^{(p)}$ – нелинейная восприимчивость плазмы, описывающая взаимодействие двух продольных волн и необыкновенной волны [42].

Амплитуда второй бегущей ВГ-волны, φ_b , покидающей область взаимодействия и распространяющейся в сторону границы плазмы, описывается следующим уравнением

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_b}{\partial x} &= -i C_a C_0^* \frac{\chi_e^{(p)}}{2B_0} \frac{\phi_m}{D_q^-(\omega_0 - \omega_m, x)} \times \\ &\times \exp\left(-i \int^x (q_x(x') + k_0(x')) dx'\right) \end{aligned} \quad (6)$$

с граничным условием $C_b|_{\infty} = 0$. Проинтегрируем уравнение (6) и подставим получившуюся амплитуду в уравнение (4) и в уравнение, которое описывает локализованную ВГ-волну. В результате, после интегрирования уравнения для запертой ВГ-волны по координате x с весом $\phi_m(x)^*$ получим следующую систему интегро-дифференци-

альных уравнений [35, 36] для волны накачки и запертой ВГ-волны

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} a_0 &= -\gamma_p \frac{T_e \omega_0}{P_0 \omega_m} |a_m(y, z)|^2 \times \\ &\times \int_{\xi}^{\infty} d\xi' a_0(\xi') \exp(i\Psi_p(\xi) - i\Psi_p(\xi')) \\ \frac{\partial a_m}{\partial t} - i\Lambda_{my} \frac{\partial^2 a_m}{\partial y^2} - i\Lambda_{mz} \frac{\partial^2 a_m}{\partial z^2} &= \\ &= \tilde{\gamma}_p a_m W(t, y, z; a_0) \exp\left(-\frac{y^2}{w^2} - \frac{z^2}{w^2}\right). \end{aligned} \right. \quad (7)$$

В уравнениях (7) a_0, a_m – безразмерные амплитуды волны накачки и захваченной ВГ-волны определяемые следующим образом $C_0 = \sqrt{8P_0 / (\nu_{0g} w^2)} a_0$,

$C_a = \sqrt{16T_e / (\omega_m \langle D_{m\omega} \rangle w^2)} a_m$, где ν_{0g} – проекция групповой скорости волны накачки на направление неоднородности плазмы. В уравнениях (7) $\Psi_p(\xi) = \xi^3 - \lambda_p \xi$ – это фаза, возникающая в результате расстройки распадного условия при первичной неустойчивости $\Delta K_p = k_x(\omega_0, x) + q_x^-(\omega_0 - \omega_m, x) - q_x^-(\omega_m, x)$ для волновых векторов взаимодействующих волн в неоднородной плазме; $\xi = x/l_{dp}$ и $\lambda_p = \Delta K_p(x_{dp})l_{dp}$, где x_{dp} – координата точки, в которой функция ΔK_p имеет экстремум и $l_{dp} = \left| d^2 \Delta K_p / dx^2 \right|_{x_{dp}}^{-1/3} / 6^{-1/3}$; $\Lambda_{my, z} = \langle \partial^2 D_{UH} / (2\partial q_{y, z}^2) \rangle \langle D_{m\omega} \rangle^{-1}$ представляют собой коэффициенты дифракции, усредненные по области локализации ВГ-волны; $\langle D_{m\omega} \rangle = \langle \partial D_{UH} / \partial \omega|_{\omega_m} \rangle$; процедура усреднения описывается, как $\langle \dots \rangle = \int_{x_l^*}^{x_r^*} dx \dots |\phi_m(x)|^2$ – и

$$W(t, y, z; a_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\xi}^{\infty} d\xi d\xi' a_0(\xi) a_0^*(\xi') \times \exp(i\lambda_p(\xi - \xi') - i(\xi^3 - \xi'^3)), \quad (8)$$

$$F(\lambda_p) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{\xi}^{\infty} d\xi' \exp(i\lambda_p(\xi - \xi') - i(\xi^3 - \xi'^3)).$$

В случае малого истощения волны накачки, т.е. когда безразмерная амплитуда волны накачки близка к единице $a_0 \leq 1$, представление (8) сводится к $W(t) = 1$. В противном случае функция (8) подчиняется неравенству $W(t) < 1$. Кроме того, мы использовали в системе уравнений (7) коэф-

фициент, который описывает нелинейную накачку дочерней ВГ волны $\tilde{\gamma}_p = \gamma_p F(\lambda_p)$, где

$$\gamma_p = \frac{|\chi_e^{(p)}|^2 l_{dp}^2}{|L_m^-| |D_q^-(\omega_0 - \omega_m)| \langle D_{m\omega} \rangle \nu_{0g} w^2 B_0^2} \Big|_{x_{dp}} \propto \frac{P_0}{w^2}. \quad (9)$$

Как видно из выражения (9), коэффициент γ_p зависит от мощности накачки и обратно пропорционален квадрату ширины пучка.

Таким образом, совокупность уравнений (7) описывает неустойчивость необыкновенной волны накачки с учётом истощения последней. Эффект истощения в системе уравнений (4) и приводит к насыщению неустойчивости. Между тем, это не единственный механизм, способный привести неустойчивость к переходу в режим насыщения. Последующие распады первичной локализованной ВГ-волны также могут привести к насыщению неустойчивости. Рассмотрим вторичную неустойчивость локализованной первичной ВГ-волны, приводящую к возбуждению захваченной ВГ-волны и ионной бернштейновской (ИБ) волны, покидающей область распада вдоль направления плазменной неоднородности. Первое предположение позволяет минимизировать потери вторичных ВГ-волн из области распада и увеличить эффективность трехволнового взаимодействия [36]. Учет вторичной неустойчивости модифицирует уравнения (7) следующим образом [35, 36]

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} a_0 &= -\gamma_p \frac{T_e \omega_0}{P_0 \omega_m} |a_m(y, z)|^2 \times \\ &\times \int_{\xi}^{\infty} d\xi' a_0(\xi') \exp(i\Psi_p(\xi) - i\Psi_p(\xi')) \\ \frac{\partial a_m}{\partial t} - i\Lambda_{my} \frac{\partial^2 a_m}{\partial y^2} - i\Lambda_{mz} \frac{\partial^2 a_m}{\partial z^2} &= \tilde{\gamma}_p a_m W(t, y, z) \\ &\times \exp\left(-\frac{y^2}{w^2} - \frac{z^2}{w^2}\right) - \sqrt{\frac{\omega_m \tilde{\gamma}_s}{\omega_n}} |a_n|^2 a_m \\ \frac{\partial a_n}{\partial t} + i\Lambda_{ny} \frac{\partial^2 a_n}{\partial y^2} + i\Lambda_{nz} \frac{\partial^2 a_n}{\partial z^2} &= \sqrt{\frac{\omega_n \tilde{\gamma}_s}{\omega_m}} |a_m|^2 a_n, \end{aligned} \right. \quad (10)$$

где $\tilde{\gamma}_s = \gamma_s F(\lambda_s)^*$, функция F определена выше в уравнении (8), коэффициент

$$\gamma_s = \frac{4|e|^2}{\sqrt{\omega_m \omega_n T_e} |L_m^+| |L_n^+| \langle D_{m\omega} \rangle \langle D_{n\omega} \rangle |D_{Iq}|} \frac{l_{ds}^2}{w^2} \Big|_{x_{ds}} \propto \frac{1}{w^2} \quad (11)$$

описывает вторичную неустойчивость и обратно пропорционален квадрату ширины пучка, $\lambda_s = \Delta K_s(x_{ds})l_{ds}$, x_{ds} – координата точки, где расстройка распадного условия для вторичной не-

устойчивости ΔK_s имеет экстремум, и $l_{ds} = \left| d^2 \Delta K_s / dx^2 \right|_{x_{ds}}^{-1/3} / 6^{-1/3}$. В системе уравнений (10) мы также ввели безразмерную амплитуду вторичной ВГ-волны a_n , которая определена таким же образом, как и a_m . В выражении (11) $\chi_e^{(s)}$ – нелинейная восприимчивость плазмы, описывающая нелинейную связь трех продольных волн [42]; $D_{Iq} = \left| \partial D_{IB} / \partial q_x \right|_{q_{Ix}}$, q_{Ix} – решение дисперсионного уравнения $D_{IB} = 0$ для ионной бернштейновской волны [41]. Детальный вывод уравнений (7) и (10) описан в работах [35, 36].

В зависимости от глубины “потенциальной ямы”, в которой может быть локализована первичная ВГ-волна, возможно различное количество последовательных вторичных распадов. Последовательность вторичных распадов заканчивается на распаде, приводящем к возбуждению нелокализованной ВГ-волны, поскольку этот процесс не приводит к абсолютной неустойчивости, а только к пространственному усилению ВГ-волны. Соответствующий коэффициент пространственного усиления может быть оценен следующим образом [36]

$$\Gamma_d = \exp\left(\frac{2\pi l_d^2 \tilde{\gamma}_d^2}{\nu_{IBg} |\nu_{UHg}|}\right) \approx \exp\left(\alpha \frac{q_{Ix}^4 l_d^2 |\phi_p|^2}{B_0^2}\right),$$

где α – безразмерный коэффициент, зависящий от параметров плазмы; $\tilde{\gamma}_d = \tilde{\gamma}_d(\phi_p)$ – инкремент неустойчивости, определенный в однородной плазме и зависящий от амплитуды распадающейся локализованной ВГ-волны; l_d – размер резонансного слоя; ν_{UHg} и ν_{IBg} – групповые скорости дочерних ВГ- и ИБ-волн в точке распада x_d ; q_{Ix} – решение дисперсионного уравнения $D_{IB} = 0$ для дочерней ионной бернштейновской волны [41]. Для типичных условий экспериментов коэффициент усиления подчиняется неравенству $\ln(\Gamma_d) < 1$, указывающему на отсутствие пространственного усиления, что прерывает каскад последовательных распадов.

Следует отметить, что каждая из ИБ-волн, участвующих в каскадах распадов, имеет свою уникальную частоту, при которой обеспечивается оптимальная связь с собственными модами ВГ-волн. В этом случае невязка резонансного условия для волновых векторов взаимодействующих колебаний описывается параболой, что характерно для случая двух близких точек распада. В последующих разделах мы анализируем два случая, соответствующие нечетному и четному числу вторичных неустойчивостей. Начнем с анализа первого из них.

3. ПОДАВЛЕНИЕ АНОМАЛЬНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ ДЛЯ НЕЧЕТНОГО ЧИСЛА ВТОРИЧНЫХ РАСПАДОВ

Рассмотрим случай небольшой амплитуды локального максимума плотности, что было характерно для ЭЦРН-экспериментов, которые проводились на токамаке TEXTOR [5, 6]. На рис. 1 сплошной линией показан профиль ВГ-частоты. Масштаб, характеризующий глубину и размер потенциальной ямы, равен $l_w = \left(d^2 \ln f_{UH} / (2dx^2) \right)^{-1/2} = 11.31$ см. Волновые числа первичной и вторичной ВГ-волн показаны сплошной и штрихпунктирной кривыми. Частота первичной волны $f_m = 70.6$ ГГц ($m = 0$). Частота вторичной волны $f_n = 70.582$ ГГц ($n = 1$). Частота волны накачки $f_0 = 140$ ГГц. Параметры в локальном максимуме профиля ВГ-частоты: $T_e = 600$ эВ и $f_{ce} = 51.72$ ГГц. Каскад распадов, приводящий к возбуждению ВГ-волн, дисперсионные кривые которых показаны на рис. 1, описывается набором уравнений (10). Начнем анализ этих уравнений с аналитического рассмотрения. Как было показано в работах [35, 36], в данном случае доминирующим механизмом, ответственным за переход неустойчивости в насыщенный режим, является вторичная неустойчивость, что позволяет пренебречь эффектом истощения волны накачки и свести (10) к системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial a_m}{\partial t} - i\Lambda_{my} \frac{\partial^2 a_m}{\partial y^2} - i\Lambda_{mz} \frac{\partial^2 a_m}{\partial z^2} = \\ = \tilde{\gamma}_p a_m \exp\left(-\frac{y^2}{w^2} - \frac{z^2}{w^2}\right) - \sqrt{\frac{\omega_m \tilde{\gamma}_s}{\omega_n}} |a_n|^2 a_m \\ \frac{\partial a_n}{\partial t} + i\Lambda_{ny} \frac{\partial^2 a_n}{\partial y^2} + i\Lambda_{nz} \frac{\partial^2 a_n}{\partial z^2} = \sqrt{\frac{\omega_n \tilde{\gamma}_s}{\omega_m}} |a_m|^2 a_n. \end{cases} \quad (12)$$

Первичная неустойчивость, описываемая первым уравнением в системе (12), начинает развиваться, если мощность волны накачки превышает пороговое значение P_0^{th} . Если мощность волны накачки значительно превышает пороговое значение, $P_0 \gg P_0^{th}$, то инкремент неустойчивости может быть получен аналитически [35, 36]

$$\begin{aligned} v_{k,l} = \tilde{\gamma}_p - \left((2k+1) \sqrt{\frac{|\tilde{\gamma}_p| \Lambda_{my}}{w^2}} + (2l+1) \sqrt{\frac{|\tilde{\gamma}_p| \Lambda_{mz}}{w^2}} \right) \times \\ \times \sin\left(\frac{\arctan(F''/F')}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \propto \frac{1}{w^2}, \quad k, l \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\tilde{\gamma}_p \equiv \tilde{\gamma}_p + i\tilde{\gamma}_p'' = \gamma_p(0,0)F(\lambda_p)$ и $\gamma_p(0,0) \sim P_0/w^2$ (см. уравнение (9)). Хотя выражение (13) при мощности пучка порядка пороговой мощности $P_0 \approx P_0^{th}$ становится некорректным, мы можем ис-

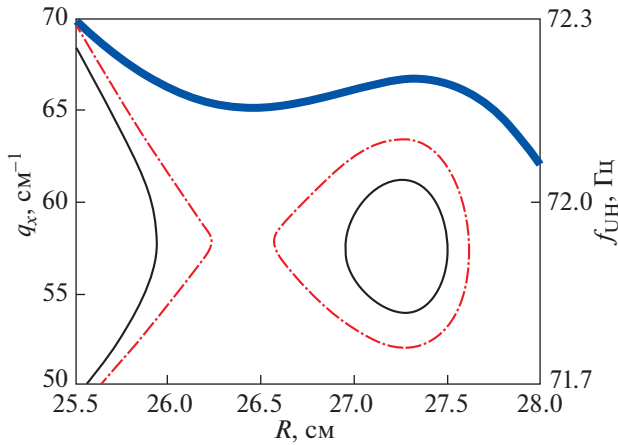


Рис. 1. Дисперсионные кривые локализованных ВГ-волн ($f_m = 70.6$ ГГц, сплошная линия и $f_n = 70.582$ ГГц, штрихпунктирная линия). Профиль ВГ-частоты – толстая сплошная линия. $T_e = 600$ эВ, $f_{ce} = 51.72$ ГГц в локальном максимуме профиля плотности. $l_w = (d^2 \ln f_{UH} / (2dx^2))^{-1/2} = 11.31$ см.

пользовать его для грубой оценки порога неустойчивости. С этой целью мы положим $v_{k,l} = 0$ в выражении (13) и получим следующее уравнение для порога

$$\tilde{\gamma}_p(P_0^{th}) = \frac{|\tilde{\gamma}_p(P_0^{th})|^{1/2}}{w} \left((2k+1)\sqrt{\Lambda_{my}} + (2l+1)\sqrt{\Lambda_{mz}} \right) \times \sin\left(\frac{\arctan(F''/F')}{2} + \frac{\pi}{4}\right). \quad (14)$$

Поскольку $|\tilde{\gamma}_p| \sim P_0^{th}/w^2$, левая и правая части уравнения (14) пропорциональны $1/w^2$. Это позволяет сделать вывод, что пороговая мощность неустойчивости не зависит от ширины пучка, т.е. $P_0^{th} \propto w^0$. В конкретном случае нелинейного возбуждения двух локализованных ВГ-волн, показанном на рис. 1, пороговая мощность равна $P_0^{th} \approx 107$ кВт. Далее, мы проанализируем зависимость уровня насыщения всех дочерних волн от ширины пучка накачки. Режим насыщения неустойчивости, описываемой уравнениями (12), соответствует ее стационарным решениям. Уровни насыщения плотности энергии параметрически возбужденных ВГ-волн можно оценить, анализируя баланс источников и стоков в этих уравнениях. Уровень насыщения плотности энергии первичных ВГ-волн в пучке накачки $\epsilon_m^s = |a_m^s|^2$ определяется балансом скорости вторичного рас-

пада $v_s \epsilon_m^s$ и дифракционных потерь энергии вторичных волн из пятна пучка накачки

$$\epsilon_m^s \approx \frac{1}{\tau_n |\tilde{\gamma}_s|} \propto w^0 P_0^0, \quad (15)$$

где $\tau_n = \min(w^2/\Lambda_{my}, w^2/\Lambda_{mz}) \approx w^2/\Lambda_{mz}$. Уровень плотности энергии вторичных ВГ-волн в пятне пучка накачки $\epsilon_n^s = |a_n^s|^2$ определяется балансом между инкрементом первичной неустойчивости и потерями энергии из-за вторичного распада

$$\epsilon_n^s \approx \frac{|\tilde{\gamma}_p|}{|\tilde{\gamma}_s|} \propto P_0. \quad (16)$$

Как можно видеть, уровни насыщения как первичных, так и вторичных дочерних волн остаются независимыми от ширины пучка накачки, но уровень насыщения вторичной ВГ-волны линейно зависит от мощности накачки. Тем не менее изменение ширины пучка может повлиять на эффективность потерь энергии дочерних волн из пятна пучка накачки и на эффективность нелинейной передачи энергии от волны накачки к этим дочерним волнам.

В случае слабого истощения волны накачки, мы можем описывать это явление с помощью процедуры теории возмущений, полагая $a_0 \approx 1 - \delta a_0$, где $|a_0| \gg |\delta a_0|$ [35]. В этом приближении изменение потока энергии волны накачки вдоль x оценивается как

$$\delta S_x \approx \frac{2P_0}{\pi w^2} |\delta a_0| \exp\left(-\frac{y^2}{2w^2} - \frac{z^2}{2w^2}\right), \quad (17)$$

где поправочный член к амплитуде волны накачки δa_0 подчиняется первому уравнению системы (7). Интегрируя уравнение (17) по координате x , после несложных вычислений получим выражение, которое при $x \rightarrow \infty$ равно

$$\delta a_0 \approx \frac{\tilde{\gamma}_p T_e \omega_0}{P_0 \omega_m} |a_m(y, z)|^2. \quad (18)$$

Подставляя выражение (18) в уравнение (17), мы получим

$$\delta S_x = \tilde{\gamma}_p \frac{2T_e \omega_0}{\pi w^2 \omega_m} |a_m(y, z)|^2 \exp\left(-\frac{y^2}{2w^2} - \frac{z^2}{2w^2}\right). \quad (19)$$

Далее, проинтегрируем обе части уравнения (19) по y, z . Оценивая двойной интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy dz |a_m(y, z)|^2 \exp\left(-\frac{y^2}{2w^2} - \frac{z^2}{2w^2}\right) \approx 2\pi w^2 \epsilon_m^s$$

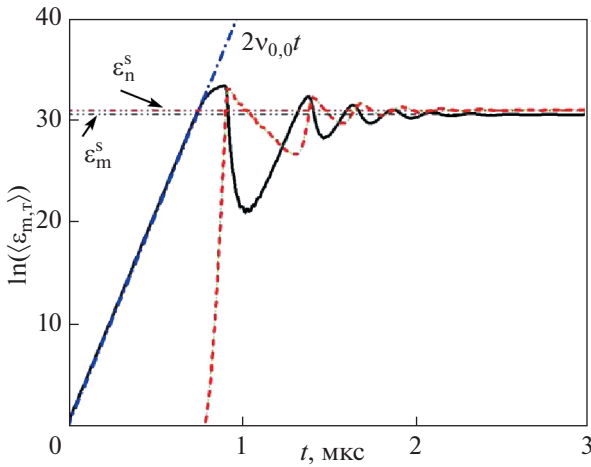


Рис. 2. Временная эволюция энергий первичных (сплошная линия) и вторичных (пунктирная линия) плазмонов в пятне пучка показана в полулогарифмическом масштабе. Рост амплитуды первичных ВГ-волн адекватно описывается (штрихпунктирная линия) инкрементом (13). Тонкие горизонтальные линии – уровни насыщения (15), (16). Те же параметры, что и на рис. 1, $w = 1$ см, $P_0 = 600$ кВт.

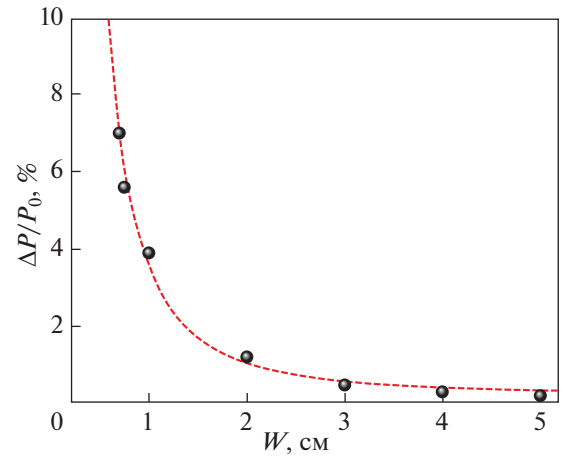


Рис. 3. Зависимость коэффициента аномального поглощения от радиуса пучка накачки w . Символы – результат численного решения. Пунктирная линия дает аналитическое предсказание (20). $P_0 = 1$ МВт.

и имея в виду, что $\Delta P = \delta S_x \pi w^2$, окончательно получим

$$\frac{\Delta P}{P_0} \approx \tilde{\gamma}_p \frac{8T_e}{P_0} \epsilon_m^s \propto \frac{1}{w^2}. \quad (20)$$

Таким образом, доля мощности накачки, получаемая дочерними волнами, зависит обратно пропорционально от площади поперечного сечения пучка и остается независимой от мощности накачки.

Для проверки этого предсказания, решим уравнения (10) с учетом истощения волны накачки численно, предполагая начальный тепловой уровень всех ВГ-волн. Результаты численного решения показаны на рис. 2, где радиус пучка и мощность накачки взяты $w = 1$ см, $P_0 = 600$ кВт, соответственно. На нем изображены безразмерные плотности энергии первичных и вторичных ВГ-волн, усредненные по пучку накачки в соответствии с математической процедурой

$$\langle \epsilon_{m,n} \rangle = \int_S \frac{dydz}{\pi w^2} |a_{m,n}(y, z)|^2 \exp\left(-\frac{y^2}{w^2} - \frac{z^2}{w^2}\right)$$

и построенные в полулогарифмическом масштабе. Сплошная и пунктирная кривые соответствуют энергиям первичной и вторичной ВГ-волн, соответственно. Тонкие горизонтальные линии дают оценку уровней насыщения (15), (16). Они находятся в разумном согласии с численными результатами. Первичная неустойчивость хорошо описывается аналитической формулой (13), взя-

той для основных мод по обеим координатам y и z (см. пунктирную линию). Согласие между теоретическими оценками и результатами численного решения системы нелинейных уравнений в частных производных позволяет с доверием относиться к выполненному расчету. На рис. 3 показана зависимость коэффициента аномального поглощения от радиуса пучка накачки w . Символы – результат численного решения. Пунктирная линия дает аналитическое предсказание (20). Мощность нагрева – $P_0 = 1$ МВт. Можно видеть, что в рассматриваемом случае слабого аномального поглощения, характерного для нечетного числа вторичных распадов, приводящих к насы-

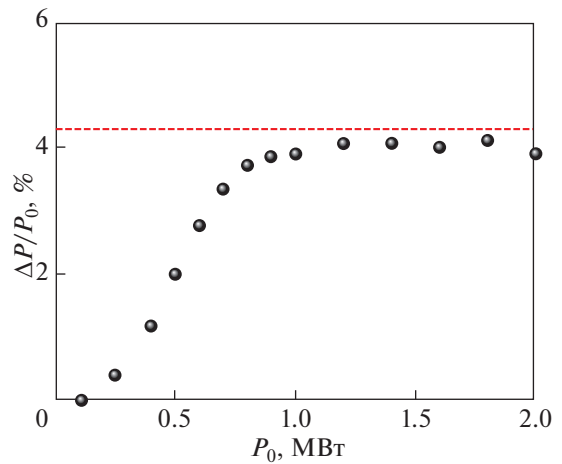


Рис. 4. Зависимость коэффициента аномального поглощения от мощности пучка накачки. Символы – результат численного решения. Пунктирная линия дает аналитическое предсказание (20). $w = 1$ см.

шению неустойчивости, аналитическая зависимость оказывается в разумном согласии с результатами численного решения. Доля аномально поглощенной мощности накачки уменьшается с ростом радиуса пучка. На рис. 4 показана зависимость коэффициента аномального поглощения от мощности накачки, полученная как в результате численного моделирования, так и в соответствии с аналитической оценкой (20). Как и предсказывается аналитической оценкой (20), рост этой зависимости насыщается при $P_0 \gg P_0^{th}$ (см. пунктирную линию).

4. АНОМАЛЬНОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ В СЛУЧАЕ ЧЕТНОГО ЧИСЛА ВТОРИЧНЫХ РАСПАДОВ

Далее, мы рассмотрим немонотонный профиль плотности с большей разницей между максимальным и минимальным значением плотности, чем в предыдущем разделе, что допускает четное число последовательных вторичных распадов первичной ВГ-волны. Этот случай проиллюстрирован на рисунке 5, где показаны

дисперсионные кривые всех собственных мод, возбуждаемых в результате каскадного процесса при распадной неустойчивости волны накачки. Сплошная линия – фундаментальная мода $m = 0$, $f_m = 70.74$ ГГц. Штрихпунктирная линия соответствует $n = 1$, $f_n = 70.72$ ГГц. Пунктирная линия соответствует $r = 2$, $\omega_r/2\pi = 70.7$ ГГц. Профиль ВГ-частоты показан толстой сплошной линией. Масштаб, характеризующий глубину и размер потенциальной ямы, равен $l_w = (d^2 \ln f_{UH}/(2dx^2))^{-1/2} = 13.2$ см. Дисперсионные кривые изображены при следующих параметрах плазмы: $T_e = 600$ эВ и $f_{ce} = 51.72$ ГГц. Распад моды $r = 2$ мог бы приводить к появлению нелокализованных ВГ- и ИБ-волн. Но пороговая мощность этого явления выше, чем мощность моды $r = 2$ ВГ-волны, что прерывает цепочку последовательных распадов. Согласно [35, 36], это каскадное возбуждение трех собственных мод ВГ-волны описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \xi} a_0 = -\gamma_p \frac{T_e}{P_0} \frac{\omega_0}{\omega_m} |a_m(y, z)|^2 \int_{\xi}^{\infty} d\xi' a_0(\xi') \exp(i\Psi_p(\xi) - i\Psi_p(\xi')) \\ \frac{\partial a_m}{\partial t} - i\Lambda_{my} \frac{\partial^2 a_m}{\partial y^2} - i\Lambda_{mz} \frac{\partial^2 a_m}{\partial z^2} = \tilde{\gamma}_p a_m W(t, y, z; a_0) \exp\left(-\frac{y^2}{w^2} - \frac{z^2}{w^2}\right) - \sqrt{\frac{\omega_m \tilde{\gamma}_s}{\omega_n}} |a_n|^2 a_m \\ \frac{\partial a_n}{\partial t} + i\Lambda_{ny} \frac{\partial^2 a_n}{\partial y^2} + i\Lambda_{nz} \frac{\partial^2 a_n}{\partial z^2} = \sqrt{\frac{\omega_n \tilde{\gamma}_s}{\omega_m}} |a_m|^2 a_n - \sqrt{\frac{\omega_n \tilde{\gamma}_t}{\omega_r}} |a_r|^2 a_n \\ \frac{\partial a_r}{\partial t} - i\Lambda_{ry} \frac{\partial^2 a_r}{\partial y^2} - i\Lambda_{rz} \frac{\partial^2 a_r}{\partial z^2} = \sqrt{\frac{\omega_r \tilde{\gamma}_t}{\omega_n}} |a_n|^2 a_r, \end{cases} \quad (21)$$

где $\tilde{\gamma}_t = \gamma_t F(\lambda_t)$, γ_t описывает третичную неустойчивость, $\lambda_t = \Delta K_t(x_{dt}) l_{dt}$, x_{dt} – координата точки, в которой расстройка ΔK_t при третичной неустойчивости имеет локальный минимум, и $l_{dt} = (\partial^2 \Delta K_t / (6\delta x^2))^{-1/3}$. Истощение волны накачки $a_0(\xi, \epsilon_m^s)$, которое является доминирующим механизмом насыщения неустойчивости в этом случае и отвечает за значительное аномальное поглощение волны накачки, описывается первым из уравнений (21). Для оценки уровней волн распада в режиме насыщения ПРН отбросим все члены, содержащие временные производные, и заменим производные на их грубые оценки $\partial/\partial y, \partial/\partial z \rightarrow 1/w$. Уровень насыщения плотности энергии вторичных ВГ-волн $\epsilon_n^s = |a_n^s|^2$ в пучке накачки определяется балансом скорости роста третичных волн и потери энергии третичных волн из

пятна пучка накачки, характеризуемого временем $1/\tau = \max(\Lambda_{ry}, \Lambda_{rz})/w^2$, т.е.

$$\epsilon_n^s \approx \sqrt{\frac{\omega_n}{\omega_r}} \frac{1}{\tilde{\gamma}_t \tau} \propto w^0. \quad (22)$$

Рост плотности энергии первичной ВГ-волны $\epsilon_m^s = |a_m^s|^2$ в пятне пучка накачки насыщается из-за истощения накачки и вторичного распада. Уровень истощения, достаточный для прекращения первичной неустойчивости, может быть оценен путем численной оценки следующего уравнения баланса

$$W = \sqrt{\frac{\omega_m \tilde{\gamma}_s}{\omega_n \tilde{\gamma}_p}} \epsilon_n^s. \quad (23)$$

Поскольку функция W зависит от a_0 (см. уравнение (8)), а амплитуда a_0 зависит от ϵ_m^s , то левая

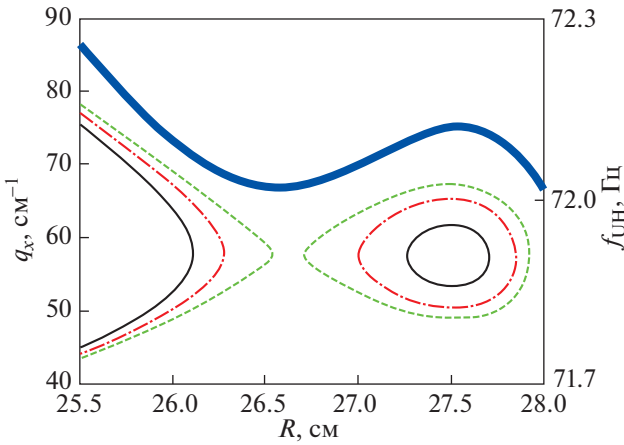


Рис. 5. Дисперсионные кривые нелинейно связанных ВГ-волн ($m = 0$, $f_m = 70.74$ ГГц, сплошная линия; $n = 1$, $f_n = 70.72$ ГГц, штрихпунктирная линия; $r = 2$, $f_r = 70.7$ ГГц, пунктирная линия). Профиль ВГ-частоты – толстая сплошная линия. $T_e = 600$ эВ, $f_{ce} = 51.72$ ГГц, $l_w = (d^2 \ln f_{UH} / (2dx^2))^{-1/2} = 13.2$ см.

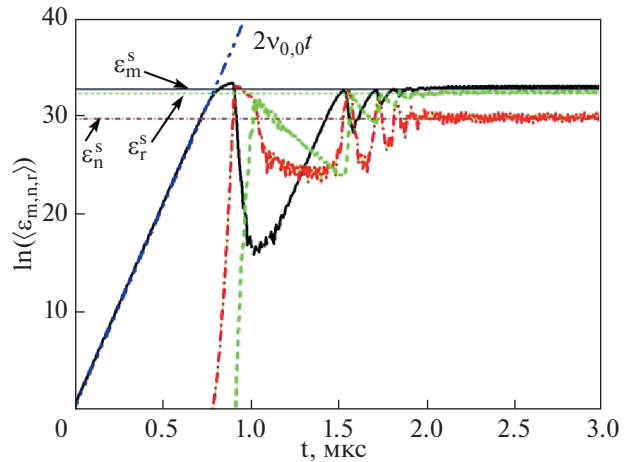


Рис. 6. Временная эволюция энергий первичных (сплошная кривая), вторичных (штрихпунктирная кривая) и третичных (пунктирная кривая) плазмонов в пятне пучка дана в полулогарифмическом масштабе; штрихпунктирная линия $2\nu_{0,0}t$ определяется уравнением (13). Тонкие горизонтальные линии – уровни насыщения (10) и (11). Параметры те же, что и на рис. 5, $w = 1$ см, $P_0 = 1$ МВт.

часть (23) зависит от ϵ_m^s , т.е. $W = W(\epsilon_m^s)$. В стационарном режиме первый член в правой части третьего и четвертого уравнений в (21) уравнивается второй, что дает уровни насыщения плотности энергии вторичных ВГ-волн $\epsilon_r^s = |a_r^s|^2$ в пучке накачки

$$\epsilon_r^s \approx \sqrt{\frac{\omega_r \tilde{\gamma}_s}{\omega_m \tilde{\gamma}_t}} \epsilon_m^s. \tag{24}$$

К сожалению, найти аналитически ϵ_m^s не представляется возможным. Получить эту оценку можно только численно в результате решения уравнение (23).

Далее, найдем решение системы уравнений (21) численно. Результаты решения уравнений (21) при условиях, использованных ранее на рис. 5 ($w = 1$ см, $P_0 = 1$ МВт), показаны на рис. 6, где приведены усредненные по пятну пучка накачки безразмерные энергии соответствующих дочерних волн, возбужденных во время каскадного распада. Экспоненциальный рост первичной ВГ-волны (сплошная линия) адекватно описывается коэффициентом усиления (штрихпунктирная линия), рассчитанным с использованием инкремента (13). Энергии вторичных и третичных волн показаны штрихпунктирной и пунктирной кривыми. Оценки уровней насыщения амплитуд дочерних волн (22)–(24), найденные в результате численного решения уравнения (23), показаны на рисунке тонкими горизонтальными линиями. Видно, что они находятся в разумном согласии с

результатами численного решения системы уравнений (21). На рис. 7 показана зависимость коэффициента аномального поглощения от радиуса пучка накачки при мощности накачки $P_0 = 1$ МВт. Зависимость демонстрирует лишь медленное снижение уровня аномального поглощения с увеличением ширины пучка. На рис. 8 показана зависимость коэффициента аномального поглощения от мощности накачки при $w = 1$ см. Коэффициент аномального поглощения растет с мощностью, приближаясь асимптотически на

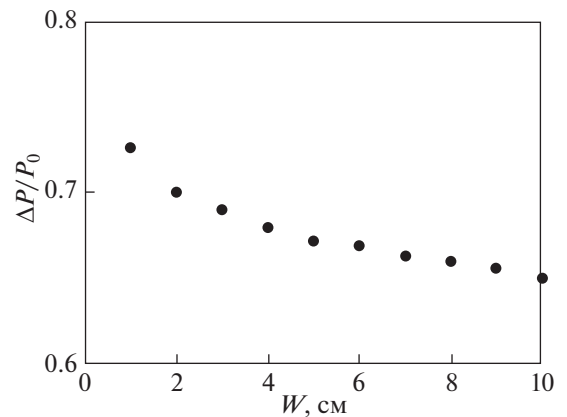


Рис. 7. Зависимость коэффициента аномального поглощения от радиуса пучка накачки. Мощность накачки $P_0 = 1$ МВт.

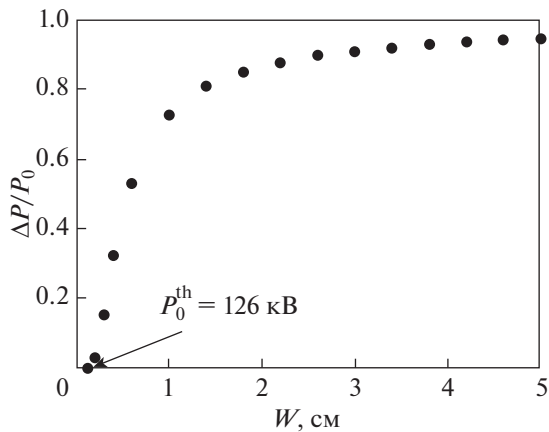


Рис. 8. Зависимость коэффициента аномального поглощения от мощности накачки. Радиус пучка $w = 1$ см.

уровне мощности в несколько МВт к единице ($\Delta P/P_0 \rightarrow 1$), что соответствует полному аномальному поглощению.

5. ВЫВОДЫ

Обобщая результаты статьи, можно сделать вывод, что аномальный уровень поглощения СВЧ-волны, вызванный ее низкороговой ПРН, при которой возбуждается только одна локализованная ВГ-волна, может быть снижен в результате увеличения радиуса пучка накачки. Этот вывод аналогичен выводу в случае, при котором первичный параметрический распад приводит к возбуждению двух локализованных ВГ-волн [38]. Увеличение радиуса пучка накачки полезно в случае нечетного числа вторичных распадов первичной ВГ-волны, когда может быть достигнуто значительное уменьшение аномального поглощения. В случае четного числа последовательных вторичных неустойчивостей влияние ширины пучка накачки на уровень аномального поглощения более слабое. Увеличение мощности накачки в этом случае приводит к увеличению скорости аномального поглощения, что отличает рассмотренный случай от случая, при котором при первом параметрическом распаде возбуждаются две локализованные ВГ-волны [38].

Аналитическое рассмотрение, представленное в параграфах 1–3, поддерживается в рамках государственного задания ФТИ им. А.Ф. Иоффе 0040-2019-0023, в то время как численное моделирование, описанное в разделах 3 и 4, поддерживается в рамках государственного задания ФТИ им. А.Ф. Иоффе 0034-2021-0003.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sauter O., Henderson M.A., Ramponi G., Zohm H. and Zucca C. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2010. V. 52. P. 025002.
2. Franke T., Aiello G., Avramidis K., Bachmann C., Baiocchi B., Baylard C., Bruschi A., Chauvin D., Cufar A., Chavan R., Gliss C., Fanale F., Figini L., Gantenbein G., Garavaglia S., Granucci G., Jelonnek J., Suarez Lopez G., Moro A., Moscheni M., Rispoli N., Siccino M., Spaeh P., Strauss D., Subba F., Tigelis I., Tran M.Q., Tsironis C., Wu C., Zohm H. // Fusion Engineering and Design. 2021. V. 168. P. 112653.
3. Litvak A.G., Denisov G.G., Glyavin M. // IEEE Journal of Microwave. 2021. V. 1. P. 260.
4. Cohen B.I., Cohen R.H., Nevins W.M., Rognlien T.D. // Rev. Mod. Phys. 1991. V. 63. P. 949.
5. Westerhof E., Nielsen S.K., Oosterbeek J.W., Salewski M., de Baar M.R., Bongers W.A., Bürger A., Hennen B.A., Korsholm S.B., Leipold F., Moseev D., Stejner M., Thoen D.J. // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 103. P. 125001.
6. Nielsen S.K., Salewski M., Westerhof E., Bongers W., Korsholm S.B., Leipold F., Oosterbeek J.W., Moseev D., Stejner M. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2013. V. 55. P. 115003.
7. Batanov G.M., Borzosekov V.D., Kovrizhnykh L.M., Kolik L.V., Konchekov E.M., Malakhov D.V., Petrov A.E., Sarksyun K.A., Skvortsova N.N., Stepakhin V.D., Kharchev K. // Plasma Phys. Reports. 2013. V. 39. P. 444.
8. Coda S. for the TCV Team // Nucl. Fusion. 2015. V. 55. P. 104004.
9. Zurro B., Baciero A., Tribaldos V., Liniers M., Cappa A., Lopez-Fraguas A., Jimenez-Rey D., Fontdecaba J.M., Nekhaieva O. // Nucl. Fusion. 2013. V. 53. P. 083017.
10. Martínez M., Zurro B., Baciero A., Jiménez-Rey D. and Tribaldos V. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2018. V. 60. P. 025024.
11. Vasilkov D.G., Batanov G.M., Berezhetskii M.S., Borzosekov V.D., Grebenshchikov S.E., Kharchev N.K., Khol'nov Yu.V., Kolik L.V., Konchekov E.M., Letunov A.A., Logvinenko V.P., Malakhov D.V., Meshcheryakov A.I., Petrov A.E., Sarksyun K.A., Skvortsova N.N., Stepakhin V.D. and Vafin I.Yu. // Proc. 41st EPS Conf. on Plasma Physics. 2014. V. ECA 38F. P4. 053.
12. Мещеряков А.И., Вафин И.Ю., Гришина И.А. // Физика плазмы. 2021. V. 47. P. 22.
13. Kubo S., Takahashi H., Shimoizuma T., Yoshimura Y., Nishiura M., Igami H., Ogasawara S., and Makino R. // EPJ Web of Conferences. 2012. V. 32. P. 02007.
14. van Milligen B., Carreras B.A., Hidalgo C., Cappa A., and TJ-II Team // Physics of Plasmas. 2018. V. 25. P. 062503.
15. Dnestrovskij Yu.N., Danilov A.V., Dnestrovskij A.Yu., Lysenko S.E., Melnikov A.V., Nemets A.R., Nurgaliev M.R., Subbotin G.F., Solovov N.A., Sychugov D.Yu. and Cherkasov S.V. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2021. V. 63. P. 055012.
16. Kantor M.Yu., Donne A.J.H., Jaspers R., van der Meiden H. and TEXTOR Team // Plasma Phys. Control. Fusion. 2009. V. 51. P. 055002.

17. *Pasch E., Beurskens M.N.A., Bozhenkov S.A., Fuchert G., Knauer J., Wolf R.C. and W7-X Team // Rev. Sci. Instrum.* 2016. V. 87. P. 11E729.
18. *Krämer-Flecken A., Han X., Windisch T., Cosfeld J., Drews P., Fuchert G., Geiger J., Grulke O., Killer C., Knipps A., Liang Y., Liu S., Rack M. and the W7-X team // Plasma Phys. Control. Fusion.* 2019. V. 61. P. 054003.
19. *Gusakov E.Z., Popov A.Yu. // Phys. Rev. Lett.* 2010. V. 105. P. 115003.
20. *Gusakov E., Popov A. // Europhys. Lett.* 2012. V. 99. P. 15001.
21. *Popov A.Yu., Gusakov E.Z. // Plasma Phys. Control. Fusion.* 2015. V. 57. P. 025022.
22. *Popov A.Yu., Gusakov E.Z. // Europhys. Lett.* 2016. V. 116. P. 45002.
23. *Popov A.Yu., Gusakov E.Z. // JETP Lett.* 2017. V. 105. P. 78.
24. *Gusakov E.Z., Popov A.Yu., Saveliev A.N., Sysoeva E.V. // Plasma Phys. Control. Fusion.* 2017. V.59. P.075002.
25. *Gusakov E.Z., Popov A.Yu. // Physics of Plasmas.* 2018. V. 25. P. 012101.
26. *Gusakov E.Z., Popov A.Yu., Irzak M.A. // Journal of Experimental and Theoretical Physics.* 2016. V. 123. P. 723.
27. *Gusakov E.Z., Popov A.Yu. // Physics of Plasmas.* 2016. V. 23. P. 082503.
28. *Gusakov E.Z., Popov A.Yu. // Plasma Phys. Control. Fusion.* 2017. V. 59. P. 025005.
29. *Gusakov E.Z., Popov A.Yu. // Physics of Plasmas.* 2018. V. 25. P. 082117.
30. *Gusakov E.Z., Popov A.Yu. // Journal of Experimental and Theoretical Physics.* 2017. V. 125. P. 702.
31. *Gusakov E.Z., Popov A.Yu., Saveliev A.N. // Physics of Plasmas.* 2018. V. 25. P. 062106.
32. *Gusakov E.Z., Popov A.Yu. // Plasma Phys. Control. Fusion.* 2018. V. 60. P. 025001.
33. *Gusakov E.Z., Popov A.Yu. // Nucl. Fusion.* 2019. V. 59. P. 104003.
34. *Gusakov E.Z., Popov A.Yu. // Plasma Phys. Control. Fusion.* 2020. V. 62. P. 025028.
35. *Gusakov E.Z., Popov A.Yu. // Nucl. Fusion.* 2020. V. 60. P. 076018.
36. *Gusakov E.Z., Popov A.Yu. // Phys. Usp.* 2020. V. 63. P. 365.
37. *Altukhov A.B., Arkhipenko V.I., Gurchenko A.D., Gusakov E.Z., Popov A.Yu., Simonchik L.V. and Usachonak M.S. // European Phys. Lett.* 2019. V. 126. P. 15002.
38. *Gusakov E.Z., Popov A.Yu. // Phys. Plasmas.* 2020. V. 27. P. 082502.
39. *Hansen S.K., Nielsen S.K., Stober J., Rasmussen J., Stejner M., Hoelzl M., Jensen T. and the ASDEX Upgrade team // Nucl. Fusion.* 2020. V. 60. P. 106008.
40. *Tancetti A., Nielsen S.K., Rasmussen J., Moseev D., Gusakov E.Z., Popov A.Yu., Stange T., Marsen S., Zanini M., Killer C., Vecsei M., Laqua H.P. and W7-X Team // Proc. of 47th EPS Conference on Plasma Physics, 21–25 June 2021, Sitges Spain. V. 45A. P4. 1048.*
41. *Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. // Основы электродинамики плазмы. М.: Высшая школа, 1988.*
42. *Gusakov E.Z., Popov A.Yu. and Tretinnikov P.V. // Plasma Phys. Control. Fusion.* 2019. V. 61. P. 085008.