ФИЗИКА ПЛАЗМЫ, 2022, том 48, № 5, с. 463–467

КИНЕТИКА ПЛАЗМЫ

УДК 533.9

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ИНТЕГРАЛА УПРУГИХ СТОЛКНОВЕНИЙ ЭЛЕКТРОНОВ С НЕЙТРАЛЬНЫМИ ЧАСТИЦАМИ

Е. И. Бочков*

Российский федеральный ядерный центр – ВНИИЭФ, Саров, Нижегородская область, Россия

**e-mail: e_i_bochkov@mail.ru*

Поступила в редакцию 12.02.2022 г.
После доработки 25.02.2022 г.
Принята к публикации 28.02.2022 г.

Выполнен вывод дифференциального разложения интеграла упругих столкновений электронов с тяжелыми нейтральными частицами в предположении, что функция распределения электронов симметрична относительно вектора напряженности внешнего электрического поля.

Ключевые слова: функция распределения электронов, кинетическое уравнение, интеграл столкновений, дифференциальное разложение

DOI: 10.31857/S0367292122200094

1. ВВЕДЕНИЕ

Наиболее полное описание эволюции ансамбля электронов в электрическом поле возможно в рамках уравнения Больцмана, которое в наиболее общем случае является интегро-дифференциальным уравнением для функции распределения электронов (ФРЭ) в шестимерном фазовом пространстве ($\mathbf{r}$, $\mathbf{p}$). В этой статье мы будем рассматривать случай слабоионизованного газа, когда столкновениями электронов друг с другом и с ионами можно пренебречь. Учитываются только упругие и неупругие столкновения электронов с нейтральными атомами или молекулами газа. Кроме того, мы будем считать, что плазма однородна в направлении, перпендикулярном направлению вектора напряженности внешнего электрического поля $\mathbf{E}$. Это значит, что ФРЭ в пространстве импульсов зависит только от модуля импульса электрона p, косинуса μ угла θ между вектором импульса $\mathbf{p}$ и единичным вектором в направлении электрической силы $\mathbf{e} = -\mathbf{E}/E$ и не зависит от азимутального угла. В этом случае эволюция ФРЭ $f(p,\mu,t)$ в импульсном пространстве будет подчиняться кинетическому уравнению Больцмана [1]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left[\frac{1-\mu^2}{p}\frac{\partial f}{\partial \mu} + \mu\frac{\partial f}{\partial p}\right]eE = \mathrm{St}_e. \qquad (1)$$

Здесь $\mathrm{St}_e = \mathrm{St}_{el} + \mathrm{St}_{ex} + \mathrm{St}_{ion}$ – интеграл столкновений, где St_{el}, St_{ex}, St_{ion} – компоненты интеграла столкновений электронов, отвечающие за изменение ФРЭ в упругих столкновениях, в процессах возбуждения и ионизации атомов соответственно.

Обычно при анализе уравнения (1) используют разложение ФРЭ в ряд по полиномам Лежандра от переменной μ. В области низких энергий электрона, где угловое распределение электронов обладает слабой анизотропией, используют приближение Лоренца, т.е. учитывают только первые два члена разложения. В случае релятивистских электронов данное приближение не выполняется, поскольку угловое распределение сильно анизотропно, и разложение по полиномам Лежандра приводит к бесконечной системе зацепляющихся уравнений для коэффициентов разложения, анализ которых затруднен. Однако в случае релятивистских электронов интеграл столкновений электронов можно представить в дифференциальной форме, и таким образом свести интегро-дифференциальное уравнение (1) к дифференциальному [2].

В статье [2] был получен лишь первый член дифференциального разложения величины St_{el}. В данной работе излагается последовательный вывод полного дифференциального разложения по производным косинуса полярного угла μ интеграла упругих столкновений St_{el}. Для этого используется процедура, развитая в [2]. Предполагается, что кинетическая энергия электронов значительно превышает энергию теплового движения атомов (молекул) и последние можно считать неподвижными.

2. ИНТЕГРАЛ УПРУГИХ СТОЛКНОВЕНИЙ ЭЛЕКТРОНОВ С НЕЙТРАЛЬНЫМИ ЧАСТИЦАМИ

На рис. 1 показана геометрия рассеяния электрона, которая тождественна использованной в работах [2, 3]. Система координат задается ортами $\mathbf{i} = [\mathbf{p}\times[\mathbf{e}\times\mathbf{p}]]/(p^2\sin\theta)$, $\mathbf{j} = [\mathbf{p}\times\mathbf{e}]/(p\sin\theta)$, $\mathbf{k} = \mathbf{p}/p$, где $\mathbf{p}$ – импульс электрона после рассеяния. В этой системе координат $\mathbf{k}$ – это полярная ось, полярным же углом становится угол рассеяния $\psi \in [0,\pi]$, а угол $\alpha \in [0, 2\pi]$ между вектором $\mathbf{j}$ и направлением проекции импульса $\mathbf{p}'$ до рассеяния на плоскость $\mathbf{ij}$ является азимутальным углом. Связь углов α и ψ с углами θ' и θ между вектором $\mathbf{e}$ и векторами $\mathbf{p}'$ и $\mathbf{p}$ дается формулой [2]

$$\mu' = \mu\xi + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\xi^2}\cos\alpha. \tag{2}$$

Здесь введены обозначения $\mu' = \cos\theta'$, $\mu = \cos\theta$, $\xi = \cos\psi$.

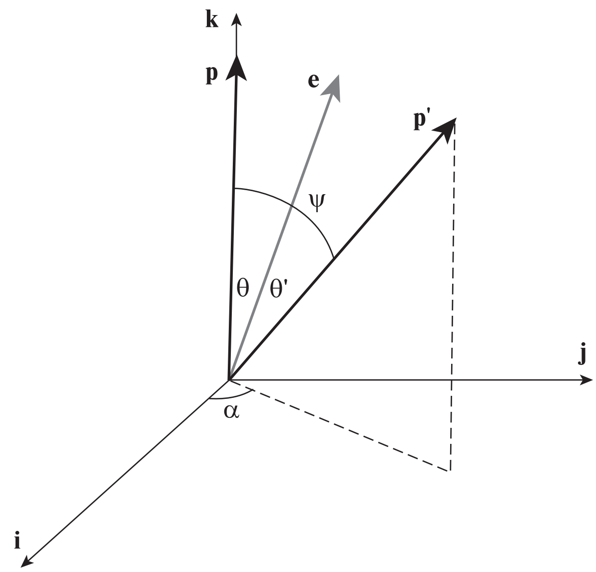

Рис. 1. Геометрия рассеяния электрона.

В выбранной системе координат интеграл упругих столкновений электронов с неподвижными атомами выражается следующим образом [2]:

$$\begin{aligned}\mathrm{St}_{\mathrm{el}} = N_{\mathrm{at}}v\int\limits_{\omega'}[f(p',\mu',t)(p'/p)^4\sigma_{el}(p',\psi) -\\ - f(p,\mu,t)\sigma_{el}(p,\psi)]d\omega',\end{aligned} \tag{3}$$

где $\sigma_{el}(p,\psi)$ – дифференциальное сечение упругого рассеяния, $d\omega' = \sin\psi d\psi d\alpha$ – элемент телесного угла в пространстве импульсов, N_{at} – концентрация атомов, v – скорость электрона.

Поскольку масса атомов намного превышает массу электрона, то в процессе упругого рассеяния модуль импульса электрона будет изменяться слабо, поэтому подынтегральную функцию в выражении (3) можно разложить в ряд по степеням величины $\Delta p \equiv p' - p$. В первом приближении получаем

$$\begin{aligned}\mathrm{St}_{\mathrm{el}} = N_{\mathrm{at}}v\int\limits_{\omega'}\left(f(p,\mu',t) - f(p,\mu,t)\right)\sigma_{el}(p,\psi)d\omega' +\\ + \frac{N_{\mathrm{at}}}{p^4}\frac{m}{M}\frac{p^2}{m}\frac{\partial}{\partial p}\left[p^4\int\limits_{\omega'} f(p,\mu',t)\sigma_{el}(p,\psi)(1-\cos\psi)d\omega'\right].\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь m и M – это масса электрона и атома соответственно. Выражение (4) получено из выражения (3.12) работы [2], в предположении, что величина $(m/M)(1-\cos\psi)\varepsilon$ (где ε – энергия электрона) много меньше энергии покоя электрона. Нерелятивистский аналог выражения (4) был рассмотрен в [3].

Следующий шаг состоит в разложении подынтегральных функций в (4) в ряд по степеням $\Delta\mu \equiv \mu' - \mu$:

$$\begin{aligned}\mathrm{St}_{\mathrm{el}} = N_{\mathrm{at}}v\int\limits_{-1}^{1}\sigma_{\mathrm{el}}(p,\xi)d\xi \times\\ \times\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{\partial f(p,\mu,t)}{\partial\mu}\Delta\mu + \frac{\partial^2 f(p,\mu,t)}{\partial\mu^2}\frac{(\Delta\mu)^2}{2} + \ldots\right)d\alpha +\\ + \frac{N_{\mathrm{at}}}{Mp^2}\frac{\partial}{\partial p}\left[p^4\int\limits_{-1}^{1}(1-\xi)\sigma_{\mathrm{el}}(p,\xi)d\xi \times\right.\\ \times\int\limits_0^{2\pi}\left(f(p,\mu,t) + \frac{\partial f(p,\mu,t)}{\partial\mu}\Delta\mu +\right.\\ \left.\left. + \frac{\partial^2 f(p,\mu,t)}{\partial\mu^2}\frac{(\Delta\mu)^2}{2} + \ldots\right)d\alpha\right],\end{aligned} \tag{5}$$

где $\xi = \cos\psi$.

Поскольку в случае электронов высоких энергий рассеяние происходит в основном на малые углы, то в работе [2] при выводе оператора упругих столкновений релятивистских электронов учитывались только члены пропорциональные первой степени величины $1-\xi$, т.е. первые два члена из первого слагаемого в (5) и нулевой член из второго. В итоге в [2] получено следующее выражение для оператора упругих столкновений:

$$\begin{aligned}\mathrm{St}_{\mathrm{el}} = N_{\mathrm{at}}\left[\frac{v\sigma_{\mathrm{tr}}(p)}{2}\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial f(p,\mu,t)}{\partial\mu}\right\} +\right.\\ \left. + \frac{1}{p^4}\frac{m}{M}\frac{p^2}{m}\frac{\partial}{\partial p}\left\{p^4\sigma_{\mathrm{tr}}(p)f(p,\mu,t)\right\}\right],\end{aligned} \tag{6}$$

где $\sigma_{tr}(p)$ – транспортное сечение. Первый член в выражении (6) описывает угловую диффузию в пространстве импульсов, а второй член определяет поток в импульсном пространстве. При рассмотрении кинетического уравнения для релятивистских электронов вторым членом в выражении (6) обычно пренебрегают, поскольку его величина много меньше потока, обусловленного неупругими процессами [1].

Целью данной работы является вычислить все члены разложения (5), выполнив интегрирование по переменным α и ξ, и таким образом представить интеграл упругих столкновений в дифференциальной форме.

3. ВЫВОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛА УПРУГИХ СТОЛКНОВЕНИЙ

Рассмотрим изменение полярного угла импульса электрона в процессе рассеяния

$$\Delta\mu = -\mu(1-\xi) + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\xi^2}\cos\alpha. \tag{7}$$

Удобно ввести малый параметр $\delta = \sqrt{1-\xi}$, тогда $\xi = 1-\delta^2$ и

$$\Delta\mu = -\mu\,\delta^2 + \sqrt{1-\mu^2}\,\delta\sqrt{2-\delta^2}\cos\alpha. \tag{8}$$

Видно, что малые значения $\Delta\mu$ реализуются при $\delta \to 0$. Рассмотрим первый член из правой части выражения (5)

$$\begin{gathered}\mathrm{St}_{\mathrm{el}(\mu)} \equiv N_{\mathrm{at}}v\int\limits_{-1}^{1}\sigma_{\mathrm{el}}(p,\xi)d\xi\,\times \\ \times\int\limits_{0}^{2\pi}\left(\frac{\partial f}{\partial\mu}\Delta\mu + \frac{\partial^2 f}{\partial\mu^2}\frac{(\Delta\mu)^2}{2} + \ldots + \right. \\ \left. + \frac{\partial^n f}{\partial\mu^n}\frac{(\Delta\mu)^n}{n!} + \ldots\right)d\alpha.\end{gathered} \tag{9}$$

Наша цель записать выражение (9), проинтегрировав его по α, как разложение по степеням δ^2:

$$\mathrm{St}_{\mathrm{el}(\mu)} = N_{\mathrm{at}}v\int\limits_{-1}^{1}2\pi\sigma_{el}(p,\xi)\sum_{l=1}^{\infty}A_l\delta^{2l}\,d\xi. \tag{10}$$

Для этого сначала вычислим величины $(\Delta\mu)^n$, используя разложение в биноминальный ряд

$$\begin{gathered}(\Delta\mu)^n = \sum_{K=0}^{n}\frac{n!}{K!(n-K)!}\times \\ \times(-\mu)^{n-K}\delta^{2(n-K)}(1-\mu^2)^{\frac{K}{2}}\delta^K(2-\delta^2)^{\frac{K}{2}}\cos^K\alpha.\end{gathered} \tag{11}$$

Далее заметим, что в формуле (9) производные $\partial^n f/\partial\mu^n$ и величина σ_{el} не зависят от α, а при интегрировании по α выражения (11) члены с нечетными степенями K дадут нули. Воспользуемся также тем, что $\int_0^{2\pi}(\cos\alpha)^{2k}d\alpha = 2\pi\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}$, тогда интегрируя выражение (11) по α получим

$$\begin{gathered}\int\limits_{0}^{2\pi}(\Delta\mu)^n d\alpha = \sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{n!}{(2k)!(n-2k)!}(-\mu)^{n-2k}\delta^{2(n-2k)}\times \\ \times(1-\mu^2)^k\delta^{2k}(2-\delta^2)^k 2\pi\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} = \\ = 2\pi\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{n!}{2^{2k}(k!)^2(n-2k)!}\times \\ \times(-\mu)^{n-2k}(1-\mu^2)^k\delta^{2(n-k)}(2-\delta^2)^k.\end{gathered} \tag{12}$$

Как легко видеть (12) это многочлен по степеням δ^2 в диапазоне от $n-[n/2]$ до n, поэтому интеграл (12) даст вклад в A_l только если $l \le n \le 2l$.

Далее разлагая выражение $(2-\delta^2)^k$ в биноминальный ряд, получаем

$$\begin{gathered}\delta^{2(n-k)}(2-\delta^2)^k = \delta^{2(n-k)}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!2^{k-i}(-1)^i\delta^{2i}}{i!(k-i)!} = \\ = \sum_{i=0}^{k}\frac{k!2^{k-i}(-1)^i\delta^{2(n-k)+2i}}{i!(k-i)!}.\end{gathered} \tag{13}$$

Приравнивая выражение $2(n-k)+2i$ к $2l$ находим, что $i = l+k-n$. Подставляем (13) в (12) с данным i, и учитываем, что поскольку (13) это многочлен по степеням δ^2, в котором младшая степень равна $(n-k)$, то в (12) нужно учитывать только члены с $k \ge (n-l)$:

$$\begin{gathered}\int\limits_{0}^{2\pi}(\Delta\mu)^n d\alpha = 2\pi\sum_{k=n-l}^{[n/2]}\frac{n!}{2^{2k}(k!)^2(n-2k)!}(-\mu)^{n-2k}\times \\ \times(1-\mu^2)^k\frac{k!(-1)^{l+k-n}2^{n-l}}{(l+k-n)!(n-l)!}\delta^{2l} = \\ = 2\pi\sum_{k=n-l}^{[n/2]}\frac{n!(-1)^{l-k}2^{n-l-2k}}{(k!)(n-2k)!(l+k-n)!(n-l)!}\times \\ \times\mu^{n-2k}(1-\mu^2)^k\delta^{2l}.\end{gathered} \tag{14}$$

Подставляя (14) в (9), и собирая подобные члены при δ^{2l}, получаем

$$\begin{gathered}A_l = \sum_{n=l}^{2l}\frac{1}{n!}\frac{\partial^n f}{d\mu^n}\times \\ \times\sum_{k=n-l}^{[n/2]}\frac{n!(-1)^{l-k}2^{n-l-2k}}{k!(n-2k)!(l+k-n)!(n-l)!}\mu^{n-2k}(1-\mu^2)^k.\end{gathered} \tag{15}$$

Введем обозначение $m \equiv n - l$, тогда

$$A_l = \sum_{m=0}^{l} \frac{\partial^{m+l} f}{d\mu^{m+l}} \times \sum_{k=m}^{[(m+l)/2]} \frac{(-1)^{l-k} 2^{m-2k}}{k!(m+l-2k)!(k-m)!m!} \mu^{m+l-2k}(1-\mu^2)^k. \quad (16)$$

Определив, теперь $j \equiv k - m$, окончательно имеем

$$A_l = \sum_{m=0}^{l} \frac{\partial^{m+l} f}{d\mu^{m+l}} \times \sum_{j=0}^{[(l-m)/2]} \frac{(-1)^{l-m-j} \mu^{l-m-2j}(1-\mu^2)^{m+j}}{2^{m+2j} j!m!(m+j)!(l-m-2j)!}. \quad (17)$$

Подставим (17) в (10), и проинтегрируем по ξ. С учетом того, что $\delta^2 = 1 - \xi$ получаем

$$\mathrm{St}_{\mathrm{el}(\mu)} = N_{\mathrm{at}} v \sum_{l=1}^{\infty} \sigma_{tr}^{(l)} \sum_{m=0}^{l} \frac{\partial^{m+l} f}{d\mu^{m+l}} \times \sum_{j=0}^{[(l-m)/2]} \frac{(-1)^{l-m-j} \mu^{l-m-2j}(1-\mu^2)^{m+j}}{2^{m+2j} j!m!(m+j)!(l-m-2j)!}. \quad (18)$$

Здесь введено обозначение $\sigma_{tr}^{(l)}(p) \equiv 2\pi \times \int_{-1}^{1} (1-\xi)^l \sigma_{el}(p,\xi)\, d\xi$, при этом $\sigma_{tr}^{(1)}$ – это обычное транспортное сечение. Упростим теперь разложение (18), для этого избавимся от внутреннего суммирования. Рассмотрим производные вида

$$\frac{\partial^l}{\partial\mu^l}\left\{(1-\mu^2)^l \frac{\partial^l f}{\partial\mu^l}\right\} = \sum_{m=0}^{l} \frac{l!}{m!(l-m)!} \frac{\partial^{l+m} f}{\partial\mu^{l+m}} \frac{\partial^{l-m}(1-\mu^2)^l}{\partial\mu^{l-m}}. \quad (19)$$

Здесь мы воспользовались формулой Лейбница для l-й производной произведения функций. Вычислим теперь производные $\partial^{l-m}(1-\mu^2)^l/\partial\mu^{l-m}$. Для этого рассмотрим сложную функцию $F(u) = u^n$, где $u(x) = 1 - x^2$ и воспользуемся формулой Фаа–Ди-Бруно для производной сложной функции, для того чтобы вычислить k-ю производную по x функции F:

$$\frac{\partial^k (1-x^2)^n}{\partial x^k} = \sum_{i+2j=k} \frac{d^{(i+j)} F(u)}{du^{(i+j)}} \frac{k!}{i!j!} \left(\frac{u'(x)}{1!}\right)^i \left(\frac{u''(x)}{2!}\right)^j = \sum_{i+2j=k} \frac{n!}{(n-(i+j))!}(1-x^2)^{n-(i+j)} \frac{k!}{i!j!} \times (-2x)^i(-1)^j = \sum_{j=0}^{[k/2]} \frac{n!k!}{(n-(k-j))!(n-2j)!j!} \times (-1)^j(-2x)^{k-2j}(1-x^2)^{n-(k-j)}, \quad (20)$$

подставляя в (20) $n = l$, $k = l - m$, $x = \mu$ получаем

$$\frac{\partial^{l-m}(1-\mu^2)^l}{\partial x^{l-m}} = 2^l l! \sum_{j=0}^{[(l-m)/2]} \frac{(l-m)!}{2^{m+2j}(m+j)!(l-m-2j)!j!} \times (-1)^{l-m-j} \mu^{l-m-2j}(1-\mu^2)^{m+j}. \quad (21)$$

Используя (21), запишем выражение (19) в виде

$$\frac{\partial^l}{\partial\mu^l}\left\{(1-\mu^2)^l \frac{\partial^l f}{\partial\mu^l}\right\} = 2^l (l!)^2 \sum_{m=0}^{l} \frac{\partial^{l+m} f}{\partial\mu^{l+m}} \times \sum_{j=0}^{[(l-m)/2]} \frac{(-1)^{l-m-j} \mu^{l-m-2j}(1-\mu^2)^{m+j}}{2^{m+2j}(m+j)!(l-m-2j)!j!m!}. \quad (22)$$

Как можно видеть данное выражение с точностью до множителя $2^l(l!)^2$ совпадает с внутренней суммой выражения (18). Таким образом, окончательно получаем следующее дифференциальное разложение величины $\mathrm{St}_{\mathrm{el}(\mu)}$ по косинусу полярного угла:

$$\mathrm{St}_{\mathrm{el}(\mu)} = N_{\mathrm{at}} v \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sigma_{tr}^{(l)}}{2^l (l!)^2} \frac{\partial^l}{\partial\mu^l}\left\{(1-\mu^2)^l \frac{\partial^l f}{\partial\mu^l}\right\} = N_{\mathrm{at}} v \left[\frac{\sigma_{tr}^{(1)}}{2} \frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial f}{\partial\mu}\right\} + \frac{\sigma_{tr}^{(2)}}{16} \frac{\partial^2}{\partial\mu^2}\left\{(1-\mu^2)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial\mu^2}\right\} + \frac{\sigma_{tr}^{(3)}}{288} \frac{\partial^3}{\partial\mu^3}\left\{(1-\mu^2)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial\mu^3}\right\} + \ldots\right]. \quad (23)$$

Отметим, что данное разложение удовлетворяет условию сохранения числа частиц в упругих столкновениях поскольку

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{St}_{\mathrm{el}(\mu)}\, d\mu = 0, \quad (24)$$

так как все интегралы вида $\int_{-1}^{1} \frac{\partial^l}{\partial\mu^l}\left\{(1-\mu^2)^l \frac{\partial^l f}{\partial\mu^l}\right\} d\mu$ равны нулю, в чем просто убедиться, проинтегрировав данное выражение.

Дифференциальное разложение второго слагаемого в выражении (5) будет иметь вид

$$\mathrm{St}_{\mathrm{el}(p\mu)} = \frac{N_{\mathrm{at}}}{Mp^2}\times$$
$$\times\frac{\partial}{\partial p}\left[p^4\left(\sigma_{tr}^{(1)}f + \sum_{l=1}^{\infty}\frac{\sigma_{tr}^{(l+1)}}{2^l(l!)^2}\frac{\partial^l}{\partial\mu^l}\left\{(1-\mu^2)^l\frac{\partial^l f}{\partial\mu^l}\right\}\right)\right]. \quad (25)$$

Условие сохранения числа частиц для данного оператора приводит к требованию

$$\lim_{p\to\infty}\left(p^4\sigma_{tr}(p)\int_{-1}^{1}f(p,\mu,t)d\mu\right) = 0. \quad (26)$$

Первые члены в разложениях (23) и (25) совпадают с оператором упругих столкновений релятивистских электронов, полученным в [2]. В работе [4] с помощью оператора столкновений из [2] получена система многогрупповых уравнений для первых трех моментов функции распределения электронов высоких энергий: концентрации электронов, направленного импульса и средней энергии. Легко можно убедиться, что учет членов более высокого порядка из разложения (23) не изменит вид групповых уравнений, полученных в [4], поскольку при интегрировании данные члены дадут нули.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получено дифференциальное представление интеграла упругих столкновений электронов в слабоионизованной плазме в предположении, что кинетическая энергия электронов намного превышает энергию нейтральных частиц (атомов или молекул) и ФРЭ симметрична относительно вектора напряженности электрического поля. Данное разложение справедливо во всем диапазоне энергий электрона, при этом первый член разложения совпадает с оператором упругих столкновений для релятивистских электронов, полученным в [2]. Данное дифференциальное разложение может быть использовано для вывода уравнений для моментов ФРЭ, в том числе и в области низких энергий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Roussel-Dupré R.A., Gurevich A.V., Tunnell T., Milikh G.M.* // Phys. Rev. E. 1994. V. 49. P. 2257.
2. *Бабич Л.П.* // ЖЭТФ. 2004. Т. 125. С. 808.
3. *Holstein T.* // Physical Review. 1946. V. 70. P. 367.
4. *Бабич Л.П., Кудрявцева М.Л.* // ЖЭТФ. 2007. Т. 121. С. 808.