ФИЗИКА ПЛАЗМЫ, 2022, том 48, № 6, с. 543–551

ИЗЛУЧЕНИЯ ПЛАЗМЫ

УДК 533.9

О ПАРАМАГНИТНОМ ВКЛАДЕ ЭЛЕКТРОНОВ В ВЫСОКОЧАСТОТНОЕ СПЕКТРАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ РАВНОВЕСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

В. Б. Бобров[a, b, *]

[a] *Объединенный институт высоких температур РАН, Москва, Россия*

[b] *Национальный исследовательский университет "Московский энергетический институт", Москва, Россия*

**e-mail: vic5907@mail.ru*

Поступила в редакцию 18.01.2022 г.
После доработки 13.03.2022 г.
Принята к публикации 20.03.2022 г.

Установлено, что в высокочастотной асимптотике спектрального распределения энергии равновесного излучения в электронном газе парамагнитный вклад, обусловленный наличием у электронов собственного магнитного момента, имеет степенной характер убывания по частоте при произвольном вырождении в рамках приближения идеального газа для поперечной диэлектрической проницаемости.

Ключевые слова: равновесное излучение, спектральное распределение энергии, идеальный электронный газ

DOI: 10.31857/S036729212210002X

1. ВВЕДЕНИЕ

Спектральное распределение энергии равновесного излучения, установленное М. Планком [1], соответствует идеализированной модели абсолютно черного тела в полости, заполненной излучением и ограниченной поглощающей материальной средой. При этом предполагается [2], что излучение находится в термодинамическом равновесии с окружающим веществом, хотя эффекты взаимодействия фотонов с веществом, ограничивающим полость, обычно не учитываются (см., [3]). Практическая реализация распределения Планка обычно связана с рассмотрением макроскопического тела, находящегося в тепловом равновесии с окружающим его "черным" излучением (см. подробнее [4–6] и цитируемую там литературу). В то же время задача о спектральном распределении энергии излучения в самом веществе, находящемся в состоянии термодинамического равновесия с излучением, рассматривается гораздо реже (см. [7–18] и цитируемую там литературу), хотя, очевидно, что при наличии вещества соответствующий результат будет отличаться от распределения Планка, которое соответствует идеальному фотонному газу.

Решение этой задачи в основном ограничивалось анализом областей прозрачности при малых импульсах фотонов. Такой подход представляется заведомо ограниченным, так как из физических соображений ясно, что для установления термодинамического равновесия излучения в веществе необходимо учитывать эффекты поглощения электромагнитного излучения.

С другой стороны, вопрос об энергии электромагнитного поля в поглощающей среде в рамках электродинамики сплошных сред связан, как известно, с определенными трудностями [19]. С формальной точки зрения проблема заключается в установлении соотношения между энергией электромагнитного поля и общим выражением для тепловых потерь в среде в нестационарных условиях, когда средние значения напряженностей электромагнитного поля отличны от нуля и изменяются во времени, что и приводит в конечном итоге к рассмотрению только областей прозрачности [19, 20]. При этом определяется систематический приток энергии именно от внешних источников, поддерживающих электромагнитное поле в среде [19]. Другими словами, рассматривается энергия неравновесной системы.

В этой ситуации решение задачи об описании равновесного состояния среды возможно только для статического электромагнитного поля или, в крайнем случае, при слабой зависимости электромагнитного поля от времени [19, 20]. Такое рассмотрение приводит к ряду выражений для скорости изменения энергии среды, в частности, формуле Бриллюэна [4, 19], а также установлению определенных ограничений на электродинамические функции отклика, в том числе, для диэлектрической проницаемости среды.

Однако случай равновесного поля (точнее, равновесной системы, представляющей собой совокупность электромагнитного поля и вещества (заряженных частиц)) является в этом смысле исключением. В такой системе тепловые потери отсутствуют, т. е. поглощение электромагнитного поля уравновешено его испусканием [21]. При этом, очевидно, средние значения напряженностей электромагнитного поля равны нулю, а рассмотрение соответствующей равновесной системы проводится традиционными методами статистической термодинамики [21].

Кроме того, наличие хотя бы небольшого количества вещества необходимо для возможности получения равновесного излучения, поскольку в нерелятивистской теории отсутствует прямое взаимодействие между фотонами [2]. В частности, на примере идеальной плазмы в пределе слабого и сильного вырождения было установлено [14, 18], что спектральное распределение энергии равновесного излучения в веществе принципиально отличается от распределения Планка как в области предельно малых, так и предельно больших частот.

При этом решение вопроса о спектральном распределении энергии излучения в самом веществе, находящемся в состоянии термодинамического равновесия с собственным излучением, имеет существенное значение для интерпретации и обработки экспериментальных данных (см., например, [22–24] и цитированную там литературу). С другой стороны, в настоящее время большое внимание уделяется изучению свойств так называемого “теплого плотного вещества (ТПВ)” (warm dense matter – WDM) [25, 26]. Эти исследования стали одним из ключевых аспектов лабораторной астрофизики и продемонстрировали свою важность не только при изучении внутреннего строения планет солнечной системы, но и в отношении других астрофизических тел, в частности, газовых гигантов, экзосолнечных планет и белых карликов [27–29]. Для интерпретации и описания получаемых экспериментальных результатов используются различные расчетно-теоретические модели (см., например, [30, 31] и цитированную там литературу). При этом ТПВ обычно ассоциируется с комбинацией сильно связанных ионов и умеренно вырожденных электронов. Во многих случаях описание электронных состояний рассеяния в ТПВ базируется на приближении квантового идеального газа при произвольном вырождении.

В настоящей работе на основе полученных ранее результатов показано, что высокочастотная асимптотика спектрального распределения энергии равновесного излучения в идеальном электронном газе, которая определяется парамагнитным вкладом в поперечную диэлектрическую проницаемость (ДП), характеризуется степенным характером убывания при произвольной степени вырождения электронов.

2. ВЫСОКОЧАСТОТНОЕ СПЕКТРАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ РАВНОВЕСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В МАТЕРИАЛЬНОЙ СРЕДЕ

При рассмотрении равновесной системы нерелятивистских заряженных частиц и фотонов по аналогии с описанием идеального газа фотонов средняя энергия равновесного излучения E_{ph} в материальной среде может быть представлена в виде [12]

$$E_{ph} = V\sum_{\lambda}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\hbar\omega_{\mathbf{k}} f(\mathbf{k},\lambda) = V\int_0^{\infty} d\omega\,\varepsilon_{\omega}(T,\{\gamma_a\}), \quad (1)$$

где $f(\mathbf{k},\lambda) \equiv \left\langle \hat{c}^{+}_{\mathbf{k},\lambda}\hat{c}_{\mathbf{k},\lambda}\right\rangle$ – точная равновесная функция распределения фотонов по импульсам $\hbar\mathbf{k}$, $\omega_{\mathbf{k}} = c|\mathbf{k}|$, c – скорость света в вакууме, $\hat{c}^{+}_{\mathbf{k},\lambda}$ и $\hat{c}_{\mathbf{k},\lambda}$ – соответственно, операторы рождения и уничтожения для фотонов с импульсом $\hbar\mathbf{k}$ и поляризацией $\lambda = 1, 2$, угловые скобки обозначают усреднение с большим каноническим распределением Гиббса, которое характеризуется объемом V, занимаемым рассматриваемой системой, а также термодинамической температурой T для фотонов и для заряженных частиц. Кроме того, спектральное распределение энергии излучения в веществе $\varepsilon_{\omega}(T,\{\gamma_a\})$ зависит не только от частоты и температуры, как это имеет место в формуле Планка для идеального газа фотонов, но и от характеристик вещества, а именно, набора химических потенциалов $\{\gamma_a\}$ заряженных частиц сорта a, входящих в рассматриваемую систему.

При этом для спектрального распределения энергии равновесного излучения в веществе $\varepsilon_{\omega}(T,\{\gamma_a\})$ справедливо соотношение [14, 18]

$$\varepsilon_{\omega}(T,\{\gamma_a\}) = \varepsilon^{(0)}_{\omega}(T) + \Delta\varepsilon_{\omega}(T,\{\gamma_a\}), \quad (2)$$

где величина $\varepsilon^{(0)}_{\omega}(T)$ определяется формулой Планка

$$\varepsilon^{(0)}_{\omega}(T) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\frac{\omega^3}{\exp(\hbar\omega/T) - 1}, \quad (3)$$

а функция $\Delta\varepsilon_\omega(T,\{\gamma_a\})$ — равенством

$$\Delta\varepsilon_\omega(T,\{\gamma_a\}) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}\times \\ \times\operatorname{cth}\left(\frac{\hbar\omega}{T}\right)\left(\frac{c^5}{\pi\omega}\int_0^\infty dk k^4 \frac{\operatorname{Im}\varepsilon^{tr}(k,\omega)}{\left|\varepsilon^{tr}(k,\omega)\omega^2 - c^2k^2\right|^2} - \frac{1}{2}\right). \quad (4)$$

Таким образом, отличие спектрального распределения энергии излучения в веществе от формулы Планка (3) полностью характеризуется поперечной ДП $\varepsilon^{tr}(k,\omega)$ рассматриваемой материальной среды. Необходимо отметить, что соотношение (4) справедливо только для однородной и изотропной системы, линейные электромагнитные свойства которой однозначно определяются продольной $\varepsilon^{l}(k,\omega)$ и поперечной $\varepsilon^{tr}(k,\omega)$ ДП [32].

Для обеспечения сходимости интеграла в (4) при фиксированной частоте ω должно выполняться условие $\lim\limits_{k\to\infty}\operatorname{Im}\varepsilon^{tr}(k,\omega) = 0$, которое означает, что при вычислении функции $\varepsilon^{tr}(k,\omega)$ необходимо последовательно учитывать квантовые эффекты. В частности, при рассмотрении поперечной ДП квантовой идеальной (бесстолкновительной) плазмы в области больших волновых векторов k справедливо утверждение (с точностью до суммирования по сортам заряженных частиц) $\operatorname{Im}\varepsilon^{tr}(k,\omega) \sim \exp\left(-\hbar^2k^2/8Tm_a\right)$, где m_a — масса заряженных частиц сорта a (см. подробнее [33]).

В высокочастотном пределе $(\omega\to\infty)$ соотношение (4) можно существенно упростить. Как показано в [14, 18], асимптотическое поведение величины $\Delta\varepsilon_\omega(T,\{\gamma_a\})$ в пределе $\omega\to\infty$, когда $\varepsilon^{tr}(k,\omega)\to 1$, определяется соотношением

$$\Delta\varepsilon_\omega(T,\{\gamma_a\})\Big|_{\omega\to\infty} \to \frac{\hbar c^2}{\pi^3\omega^2}\left(\int_0^\infty dk k^4 \operatorname{Im}\varepsilon^{tr}(k,\omega)\right)\Bigg|_{\omega\to\infty} \quad (5)$$

Детальное описание перехода от общего соотношения (4) к формуле (5) представлено в приложении к настоящей работе.

Таким образом, вопрос о степени влияния вещества на асимптотическое поведение спектрального распределения энергии равновесного излучения в области высоких частот $(\omega\to\infty)$ может быть решен по известной функции $\operatorname{Im}\varepsilon^{tr}(k,\omega)$.

Необходимо отметить, что вычисление поперечной ДП $\varepsilon^{tr}(k,\omega)$ системы заряженных частиц и собственного излучения является весьма сложной задачей. Более того, до настоящего времени теоретическому исследованию поперечной ДП $\varepsilon^{tr}(k,\omega)$ не уделяется достаточного внимания в отличие от рассмотрения продольной ДП $\varepsilon^{l}(k,\omega)$ (см. [14, 18] и цитированную там литературу). Фактически, явные аналитические результаты для функции $\varepsilon^{tr}(k,\omega)$ имеются только для идеальной плазмы в пределах слабого и сильного вырождения [33–35].

По этой причине высокочастотная асимптотика спектрального распределения энергии равновесного излучения была рассмотрена для идеальной плазмы в пределах слабого и сильного вырождения. Полученные результаты показывают [14, 18], что величина $\Delta\varepsilon_\omega(T,\{\gamma_a\})\big|_{\omega\to\infty}$ убывает с увеличением частоты по степенному закону в отличие от спектрального распределения “черного” излучения, которое согласно формуле Планка (3) характеризуется экспоненциальным убыванием в пределе $\omega\to\infty$.

В настоящей работе мы проведем анализ соотношения (5) для идеального электронного газа, находящегося в компенсирующем фоне положительного заряда для обеспечения условия квазинейтральности, при произвольном вырождении электронов. При использовании такой модели предполагается, что постоянная тонкой структуры $\alpha = e^2/\hbar c \cong 1/137$, которая характеризует силу взаимодействия между электронами и фотонами, является малым параметром. Это обстоятельство является основой для использования в квантовой статистической электродинамике теории возмущений (диаграммной техники), связанной с представлением средних значений физических величин в виде рядов по степеням α [36]. В частности, вывод соотношений (2)–(4) для спектральной плотности равновесного излучения в веществе основан на результатах диаграммной техники теории возмущений для фотонной функции Грина [12]. Далее мы ограничимся рассмотрением “нулевого” приближения по параметру α, т.е. будем рассматривать функцию $\varepsilon^{tr}(k,\omega)$ для системы заряженных частиц, пренебрегая их взаимодействием с фотонами.

Кроме того, предполагается, что рассматриваемая система удовлетворяет условиям

$$\frac{m_e e^4}{\hbar^2} \ll T \ll m_e c^2, \quad \frac{e^2}{r_e t_e} \ll 1, \quad (6)$$

где $r_e = (4\pi n_e/3)^{-1/3}$ — среднее расстояние между электронами, t_e — средняя кинетическая энергия, приходящаяся на один электрон, n_e — средняя плотность числа электронов. В этом случае можно пренебречь кулоновским взаимодействием заряженных частиц, что и отвечает рассмотрению поперечной ДП идеального электронного газа (индекс 0) (см. подробнее [33]):

$$\varepsilon_0^{tr}(k,\omega) = 1 - \frac{\omega_e^2}{\omega^2} - \frac{4\pi}{\omega^2}\left(\Phi_0^{(dd)}(k,\omega) + \Phi_0^{(pp)}(k,\omega)\right), \quad (7)$$

$$\Phi_0^{(dd)}(k,\omega) = (2s_e+1)\frac{e^2\hbar^2}{2m_e^2}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left(p^2 - \frac{(\mathbf{p}\cdot\mathbf{k})^2}{k^2}\right)\times \\ \times\frac{f_e(\mathbf{p}-\mathbf{k}/2) - f_e(\mathbf{p}+\mathbf{k}/2)}{\hbar\omega + m_e(\mathbf{p}-\mathbf{k}/2) - m_e(\mathbf{p}+\mathbf{k}/2) + i0}, \quad (8)$$

$$\Phi_0^{(pp)}(k,\omega) = \frac{(2s_e+1)s_e(s_e+1)}{3}\left(\frac{\mu_e c}{s_e}\right)^2\times \\ \times k^2\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{f_e(\mathbf{p}-\mathbf{k}/2) - f_e(\mathbf{p}+\mathbf{k}/2)}{\hbar\omega + m_e(\mathbf{p}-\mathbf{k}/2) - m_e(\mathbf{p}+\mathbf{k}/2) + i0}. \quad (9)$$

Здесь интегрирование проводится по всему пространству импульсов электронов, $\omega_e = (4\pi e^2 n_e/m_e)^{1/2}$ — плазменная частота для электронов с зарядом e, массой m_e, спином s_e, собственным магнитным моментом μ_e и средней плотностью числа частиц n_e, $m_e(p) = \hbar^2p^2/2m_e$ — энергия электрона, $f_e(p)$ — функция распределения по импульсам $\hbar\mathbf{p}$ для электронов, которая определяется распределением Ферми–Дирака

$$f_e(p) = \{\exp((m_e(p) - \gamma_e)/T) + 1\}^{-1}. \quad (10)$$

Величина химического потенциала электронов γ_e при заданной температуре T определяется плотностью числа электронов n_e из условия

$$n_e = (2s_e+1)\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}f_e(p). \quad (11)$$

В (10) учтено, что рассматриваемый электронный газ является однородной и изотропной системой. При этом согласно (7)–(11) явные аналитические выражения для поперечной ДП идеальной электронной плазмы могут быть получены в двух предельных случаях: слабого ($n_e\Lambda_e^3 \ll 1$) и сильного ($n_e\Lambda_e^3 \gg 1$) вырождения электронов, где $\Lambda_e = (2\pi\hbar^2/m_eT)^{1/2}$ — тепловая длина волны де Бройля для электронов (см. подробнее [33, 35]).

В соответствии с (7)–(9) представим с учетом (6) величину $\Delta\varepsilon_\omega(T,\gamma_e)\big|_{\omega\to\infty}$, определяющую отличие спектрального распределения энергии равновесного излучения от распределения Планка $\varepsilon_\omega^{(0)}(T)$ (3) в высокочастотном пределе $\omega\to\infty$, в следующем виде:

$$\Delta\varepsilon_\omega(T,\gamma_e)\big|_{\omega\to\infty} = \\ = \Delta\varepsilon_\omega^{(dd)}(T,\gamma_e)\big|_{\omega\to\infty} + \Delta\varepsilon_\omega^{(pp)}(T,\gamma_e)\big|_{\omega\to\infty}, \quad (12)$$

$$\Delta\varepsilon_\omega^{(dd)}(T,\gamma_e)\big|_{\omega\to\infty} \to \\ \to -\frac{4\hbar c^2}{\pi^2\omega^4}\left(\int_0^\infty \mathrm{d}k k^4 \mathrm{Im}\Phi_0^{(dd)}(k,\omega)\right)\Bigg|_{\omega\to\infty}, \quad (13)$$

$$\Delta\varepsilon_\omega^{(pp)}(T,\gamma_e)\big|_{\omega\to\infty} \to \\ \to -\frac{4\hbar c^2}{\pi^2\omega^4}\left(\int_0^\infty \mathrm{d}k k^4 \mathrm{Im}\Phi_0^{(pp)}(k,\omega)\right)\Bigg|_{\omega\to\infty}, \quad (14)$$

где функции $\Delta\varepsilon_\omega^{(dd)}(T,\gamma_e)\big|_{\omega\to\infty}$ и $\Delta\varepsilon_\omega^{(pp)}(T,\gamma_e)\big|_{\omega\to\infty}$ согласно принятой терминологии в теории электронного газа, находящегося в статическом магнитном поле (см., например, [37]), отвечают диамагнитному и парамагнитному вкладу соответственно, в высокочастотную асимптотику спектрального распределения энергии равновесного излучения.

Учитывая значения спина $(s_e = 1/2)$ и магнитного момента $(\mu_e = e\hbar/(2mc))$ для электронов, из соотношений (8), (9) следуют следующие выражения для функций $\mathrm{Im}\,\Phi_0^{(dd)}(k,\omega)$ и $\mathrm{Im}\,\Phi_0^{(pp)}(k,\omega)$:

$$\mathrm{Im}\,\Phi_0^{(dd)}(k,\omega) = \\ = \frac{e^2}{4\pi m_e k}\int_{k\Delta^{(+)}(k,\omega)}^\infty \mathrm{d}p p f_e(p)\left[p^2 - k^2\left(\Delta^{(+)}(k,\omega)\right)^2\right] - \\ - \frac{e^2}{4\pi m_e k}\int_{k|\Delta^{(-)}(k,\omega)|}^\infty \mathrm{d}p p f_e(p)\left[p^2 - k^2\left(\Delta^{(-)}(k,\omega)\right)^2\right], \quad (15)$$

$$\mathrm{Im}\,\Phi_0^{(pp)}(k,\omega) = -\frac{e^2k}{8\pi m_e}\int_{k|\Delta^{(-)}(k,\omega)|}^{k\Delta^{(+)}(k,\omega)} dp p f_e(p), \quad (16)$$

$$\Delta^{(\pm)}(k,\omega) = \frac{m_e\omega}{\hbar k^2} \pm \frac{1}{2}. \quad (17)$$

При этом, как показано в [14, 18], парамагнитный вклад $\Delta\varepsilon_\omega^{(pp)}(T,\gamma_e)\big|_{\omega\to\infty}$ (14), обусловленный учетом собственного магнитного момента электронов, является определяющим в высокочастотном спектральном распределении энергии равновесного излучения в идеальном электронном газе как в случае слабого, так и в случае сильного вырождения электронов. По этой причине далее мы ограничимся рассмотрением величины $\Delta\varepsilon_\omega^{(pp)}(T,\gamma_e)\big|_{\omega\to\infty}$ (14) при произвольном вырождении электронов.

Подставляя (16), (17) в (14), получаем

$$\Delta\varepsilon_\omega^{(pp)}(T,\gamma_e)\big|_{\omega\to\infty} \to \frac{2c^2e^2m_e^3}{\pi^3\hbar^3\beta_\omega^4}F(\beta_\omega,\gamma_e/T)\big|_{\omega\to\infty}, \quad (18)$$

$$F(\beta,\gamma) = \int_0^\infty dz z^2 \ln\left(\frac{1+\exp\left(\gamma - z\Delta_z^{(-)}(\beta)\right)}{1+\exp\left(\gamma - z\Delta_z^{(+)}(\beta)\right)}\right), \quad (19)$$

где $\beta_\omega = \hbar\omega/T$, $\Delta_z^{(\pm)}(\beta) = (\beta/z \pm 1)^2/4$.

Таким образом, задача сводится к установлению асимптотического поведения функций $F(\beta_\omega, \gamma_e/T)$ в области высоких частот ($\beta_\omega \to \infty$).

3. ПАРАМАГНИТНЫЙ ВКЛАД ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ВЫРОЖДЕНИИ ЭЛЕКТРОНОВ

Рассмотрим далее идеальный электронный газ, для которого химический потенциал γ_e является отрицательной величиной: $\gamma_e < 0$. В этом случае для функции $F(\beta,\gamma)$ (19) можно использовать представление в виде функционального ряда [38]

$$\begin{gathered} F(\beta,\gamma) = 2\int_0^\infty dz z^2 \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} \frac{\exp(n\gamma)}{n} \times \\ \times \exp\left(-n\left(\frac{\beta^2}{4z} + \frac{z}{4}\right)\right)\sinh\left(\frac{n\beta}{2}\right) = \\ = 4\beta^3 \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1}\frac{\exp(n\gamma)}{n} K_3\left(\frac{n\beta}{2}\right)\sinh\left(\frac{n\beta}{2}\right). \end{gathered} \quad (20)$$

В соотношении (20) учтено, что

$$\int_0^\infty dx x^{\nu-1} \exp\left(-\frac{\alpha}{x} - \tau x\right) = 2\left(\frac{\alpha}{\tau}\right)^{\nu/2} K_\nu\left(2\sqrt{\alpha\tau}\right). \quad (21)$$

Здесь $K_\nu(x)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода или функция Макдональда, которая удовлетворяет следующему асимптотическому соотношению [38]:

$$K_\nu(x)\big|_{x\to\infty} = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} \exp(-x). \quad (22)$$

Подставляя (21), (22) в (18)–(20), находим с точностью до экспоненциально малых членов $\exp(-n\beta_\omega)$

$$F(\beta_\omega, \gamma_e/T)\big|_{\omega\to\infty} \to 4\sqrt{\pi}\beta_\omega^{5/2} A(\gamma_e/T), \quad (23)$$

где функция $A(x)$ равна

$$A(x) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} \frac{\exp(nx)}{n^{3/2}}. \quad (24)$$

Таким образом, асимптотическое поведение парамагнитного вклада $\Delta\varepsilon_\omega^{(pp)}(T,\gamma_e)\big|_{\omega\to\infty}$ в высокочастотное спектральное распределение энергии равновесного излучения в идеальном электронном газе имеет вид

$$\Delta\varepsilon_\omega^{(pp)}(T,\gamma_e < 0)\big|_{\omega\to\infty} \to 8\sqrt{\pi}\frac{c^2 e^2 m_e^3}{\pi^3\hbar^3\beta_\omega^{3/2}} A(\gamma_e/T). \quad (25)$$

Соотношение (25) в соответствующих приближениях эквивалентно результатам работы [18] для равновесного излучения в идеальной квазиклассической плазме. При этом следует учитывать, что условие (12) в рамках проведенного рассмотрения ($\gamma_e < 0$) можно представить как

$$\Lambda_e^3 n_e(T,\gamma_e) = 2A(\gamma_e/T). \quad (26)$$

В результате согласно (25), (26) парамагнитный вклад, обусловленный учетом собственного магнитного момента электронов, в высокочастотное спектральное распределение энергии равновесного излучения в идеальном электронном газе пропорционален плотности числа электронов $n_e(T,\gamma_e)$ и не зависит явно от температуры при произвольном отрицательном значении химического потенциала

$$\begin{gathered} \Delta\varepsilon_\omega^{(pp)}(T,\gamma_e < 0)\big|_{\omega\to\infty} \to \\ \to \frac{8\sqrt{2}e^2 n_e(T,\gamma_e)}{\pi c}\left(\frac{m_e c^2}{\hbar\omega}\right)^{3/2}. \end{gathered} \quad (27)$$

Перейдем к рассмотрению идеального электронного газа, в котором химический потенциал γ_e является положительной величиной: $\gamma_e > 0$. Согласно (19) функцию $F(\beta,\gamma > 0)$ можно представить в виде

$$F(\beta,\gamma) = F^{(-)}(\beta,\gamma) - F^{(+)}(\beta,\gamma), \quad (28)$$

$$F^{(\pm)}(\beta,\gamma) = \int_0^\infty dz z^2 \ln\left(1 + \exp\left(\gamma - z\Delta_z^{(\pm)}(\beta)\right)\right), \quad (29)$$

так что

$$\begin{gathered} \Delta\varepsilon_\omega^{(pp)}(T,\gamma_e)\big|_{\omega\to\infty} \to \\ \to \frac{2c^2e^2m_e^3}{\pi^3\hbar^3\beta_\omega^4}\left\{F^{(-)}(\beta_\omega,\gamma_e/T)\big|_{\omega\to\infty} - F^{(+)}(\beta_\omega,\gamma_e/T)\big|_{\omega\to\infty}\right\}. \end{gathered} \quad (30)$$

В свою очередь, из (29) с использованием замены переменных $z = \beta x^2$ непосредственно следует, что

$$F^{(\pm)}(\beta,\gamma) = 2\beta^3\int_0^\infty dx x^5 \ln\left(1 + \exp\left(\gamma - \frac{\beta}{4}\left(x \pm \frac{1}{x}\right)^2\right)\right) \quad (31)$$

или с учетом замены переменных $q = x \pm 1/x$

$$F^{(+)}(\beta,\gamma) = 2\beta^3\int_2^\infty dq\left\{\frac{\left(x_2^{(+)}\right)^7}{\left(x_2^{(+)}\right)^2-1}-\frac{\left(x_1^{(+)}\right)^7}{\left(x_1^{(+)}\right)^2-1}\right\}\times$$
$$\times\ln\left(1+\exp\left(\gamma-\beta q^2/4\right)\right) =$$
$$= 2\beta^3\int_2^\infty dq\frac{\left(x_2^{(+)}\right)^6-\left(x_1^{(+)}\right)^6}{\sqrt{q^2-4}}\ln\left(1+\exp\left(\gamma-\beta q^2/4\right)\right) =$$
$$= 2\beta^3\int_2^\infty dqq\left\{\left(\left(x_2^{(+)}\right)^2-\left(x_1^{(+)}\right)^2\right)^2+3\left(x_2^{(+)}\right)^2\left(x_2^{(+)}\right)^2\right\}\times$$
$$\times\ln\left(1+\exp\left(\gamma-\beta q^2/4\right)\right) = \quad (32)$$
$$= 2\beta^3\int_2^\infty dqq\left\{q^2\left(q^2-4\right)+3\right\}\times$$
$$\times\ln\left(1+\exp\left(\gamma-\beta q^2/4\right)\right) =$$
$$= 2\beta^3\int_0^\infty \mathrm{d}q\,(q+2)\left\{(q+2)^2 q\,(q+4)+3\right\}\times$$
$$\times\ln\left(1+\exp(\gamma-\beta-\beta q\,(q+4)/4)\right),$$

$$x_1^{(+)}(q) = \frac{q-\sqrt{q^2-4}}{2},\quad x_2^{(+)}(q) = \frac{q+\sqrt{q^2-4}}{2}, \quad (33)$$

$$F^{(-)}(\beta,\gamma) = 2\beta^3\int_{-\infty}^{\infty} dq\frac{\left(x^{(-)}(q)\right)^7}{\left(x^{(-)}(q)\right)^2+1}\times$$
$$\times\ln\left(1+\exp\left(\gamma-\beta q^2/4\right)\right) =$$
$$= 2\beta^3\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dq}{q}\left(x^{(-)}\right)^6\ln\left(1+\exp\left(\gamma-\beta q^2/4\right)\right) = \quad (34)$$
$$= 2\beta^3\int_0^\infty dq\left\{q^2\left(q^2+4\right)+3\right\}\sqrt{q^2+4}\times$$
$$\times\ln\left(1+\exp\left(\gamma-\beta q^2/4\right)\right).$$

$$x^{(-)}(q) = \frac{q+\sqrt{q^2+4}}{2}. \quad (35)$$

Из соотношений (32), (34) непосредственно следует асимптотическое поведение функций в пределе $\beta \to \infty$

$$F^{(+)}(\beta,\gamma)\Big|_{\beta\to\infty} = 2\int_0^\infty \mathrm{d}\lambda\left(\lambda+2\sqrt{\beta}\right)\times$$
$$\times\left\{\left(\lambda+2\sqrt{\beta}\right)^2\lambda\left(\lambda+4\sqrt{\beta}\right)+3\beta^2\right\}\times$$
$$\times\ln\left(1+\exp\left(\gamma-\beta-\lambda\left(\lambda+4\sqrt{\beta}\right)/4\right)\right)\Big|_{\beta\to\infty}\to \quad (36)$$
$$\to 4\sqrt{\beta}\int_0^\infty d\lambda\left\{16\beta^{3/2}\lambda+3\beta^2\right\}\times$$
$$\times\exp\left(\gamma-\beta-\lambda\sqrt{\beta}\right)\Big|_{\beta\to\infty}\to 12\beta^2\exp(\gamma-\beta),$$

$$F^{(-)}(\beta,\gamma)\Big|_{\beta\to\infty} = 2\int_0^\infty \mathrm{d}\lambda\left\{\lambda^2\left(\lambda^2+4\beta\right)+3\beta^2\right\}\times$$
$$\times\sqrt{\lambda^2+4\beta}\ln\left(1+\exp\left(\gamma-\lambda^2/4\right)\right)\Big|_{\beta\to\infty}\to$$
$$\to 4\sqrt{\beta}\int_0^\infty d\lambda\left(4\beta\lambda^2+3\beta^2\right)\times \quad (37)$$
$$\times\ln\left(1+\exp\left(\gamma-\lambda^2/4\right)\right)\Big|_{\beta\to\infty}\to 12\beta^{5/2}I(\gamma),$$

$$I(\gamma) = \int_0^\infty d\lambda\ln\left(1+\exp\left(\gamma-\lambda^2/4\right)\right). \quad (38)$$

Согласно (18), (19), (32), (34)–(38) парамагнитный вклад в высокочастотную асимптотику спектрального распределения энергии равновесного излучения в идеальном электронном газе, который характеризуется положительным значением химического потенциала $\gamma_e > 0$, с интересующей нас точностью имеет вид

$$\Delta\varepsilon_\omega^{(pp)}(T,\gamma_e>0)\Big|_{\omega\to\infty}\to\frac{24c^2e^2m_e^3}{\pi^3\hbar^3\beta_\omega^{3/2}}I(\gamma_e/T), \quad (39)$$

где функция $I(\gamma)$ определяется соотношением (38).

Из сравнения соотношений (25) и (39) непосредственно следует очевидное равенство

$$\Delta\varepsilon_\omega^{(pp)}(T,\gamma_e\to-0)\Big|_{\omega\to\infty} = \Delta\varepsilon_\omega^{(pp)}(T,\gamma_e\to+0)\Big|_{\omega\to\infty}. \quad (40)$$

В свою очередь, в пределе сильного вырождения электронного газа $n_e\Lambda_e^3 \gg 1$, что эквивалентно условию $\gamma_e/T \gg 1$ [2], соотношение (39) в соответствующих приближениях соответствует результатам работы [14].

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Согласно проведенному рассмотрению парамагнитный вклад, обусловленный наличием собственного магнитного момента у каждого электрона, в высокочастотное спектральное распределение энергии равновесного излучения в идеальном электронном газе с ростом частоты убывает степенным образом при произвольном значении химического потенциала (см. (27), (39)). При этом средняя энергия равновесного излучения, приходящаяся на единицу объема газа электронов, согласно (1), (25), (39) является конечной величиной.

Дальнейшее развитие полученных выше результатов связано с построением теории поперечной ДП электронного газа при учете взаимодействия между электронами.

Автор выражает благодарность участникам семинара Теоретического отдела им. Л.М. Бибермана ОИВТ РАН за полезное обсуждение работы. Данная работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Государственное задание № 075-01056-22-00).

ПРИЛОЖЕНИЕ

При рассмотрении несобственного интеграла по волновым векторам, определяющего искомую величину $\Delta\varepsilon_\omega(T,\{\gamma_a\})$ (4), необходимо учитывать, что подынтегральная функция содержит сингулярные члены. Это утверждение следует из предельных равенств, которым удовлетворяет мнимая часть поперечной ДП идеального электронного газа:

$$\operatorname{Im}\varepsilon^{\rm tr}(k,\omega)\Big|_{k\to0}\to0,\quad \operatorname{Im}\varepsilon^{\rm tr}(k,\omega)\Big|_{k\to\infty}\to0 \quad (41)$$

(см. (7)–(9), (15)–(17)). Предельный переход $k\to0$ отвечает условию $k\sqrt{2m_et_e}/\omega\ll1$, а предельный переход $k\to\infty$ – условию $m_e(k)\gg T$ (см. подробнее [40]). Согласно (41) мы можем записать для произвольных ненулевых значений частоты ω

$$\left(\frac{\operatorname{Im}\varepsilon^{\rm tr}(k,\omega)}{\left(\operatorname{Re}\varepsilon^{\rm tr}(k,\omega)-c^2k^2/\omega^2\right)^2+\left(\operatorname{Im}\varepsilon^{\rm tr}(k,\omega)\right)^2}\right)\Bigg|_{\substack{k\to0,\\k\to\infty}}\to \quad (42)$$
$$\to\pi\delta\left(\operatorname{Re}\varepsilon^{\rm tr}(k,\omega)-\frac{c^2k^2}{\omega^2}\right),$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака. Тогда функцию

$$\Psi(\omega;T,\{\gamma_a\})=\frac{c^5}{\pi\omega^5}\int_0^\infty dkk^4\frac{\operatorname{Im}\varepsilon^{\rm tr}(k,\omega)}{\left|\varepsilon^{tr}(k,\omega)-c^2k^2/\omega^2\right|^2}, \quad (43)$$

определяющую величину $\Delta\varepsilon_\omega(T,\{\gamma_a\})$ (4), с учетом (42), (43) можно представить в виде

$$\Psi(\omega;T,\{\gamma_a\})=\frac{c^3k_{osc}^3(\omega)}{2\omega^3}+\Psi^{(reg)}(\omega;T,\{\gamma_a\}), \quad (44)$$

где функция $\Psi^{(reg)}(\omega;T,\{\gamma_a\})$ определяется тем же соотношением (43), но не содержит сингулярных членов под знаком интеграла. При этом волновой вектор $k_\infty(\omega)$ является решением уравнения

$$k_{osc}=\omega\sqrt{\operatorname{Re}\varepsilon^{\rm tr}(k_{osc},\omega)}/c. \quad (45)$$

Как следует из (42), (45), речь идет о решении дисперсионного уравнения для определения спектра собственных поперечных колебаний электромагнитного поля в материальной среде

$$\varepsilon^{tr}(k,\omega)=c^2k^2/\omega^2 \quad (46)$$

в области действительных значений частоты ω и волнового вектора k (см. подробнее [32]).

Однако даже в простейшем случае идеального электронного газа решение дисперсионного уравнения (46) не представляется возможным аналитическими методами в силу весьма сложного выражения для поперечной ДП $\varepsilon^{tr}(k,\omega)$.

Тем не менее при рассмотрении высокочастотного предела $(\omega\to\infty)$ соотношение (45) можно существенно упростить. Дело в том, что согласно (7) при фиксированном значении волнового вектора k

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\varepsilon^{\rm tr}(k,\omega)\Big|_{\omega\to\infty}&\to1-\omega_e^2/\omega^2,\\ \operatorname{Im}\varepsilon^{\rm tr}(k,\omega)\Big|_{\omega\to\infty}&\to0\end{aligned} \quad (47)$$

(см. подробнее [36]). Из (45), (47) непосредственно следует

$$k_{osc}=\omega\sqrt{1-\omega_e^2/\omega^2}/c. \quad (48)$$

Это соотношение обычно применяется при рассмотрении идеального электронного газа и имеет смысл только при частотах $\omega>\omega_e$ (см., например, [41]).

Таким образом, согласно (4), (44), (48)

$$\Delta\varepsilon_\omega(T,\{\gamma_a\})\Big|_{\omega\to\infty}\to\frac{\hbar c^2}{\pi^3\omega^2}\times$$
$$\times\left(\frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{\omega_e^2}{\omega^2}\right)^{3/2}-1\right)+\Psi^{(reg)}(\omega;T,\{\gamma_a\})\right)\Bigg|_{\omega\to\infty}\to \quad (49)$$
$$\to\frac{\hbar c^2}{\pi^3\omega^2}\left(-\frac{3\omega_e^2}{4\omega^2}+\Psi^{(reg)}(\omega;T,\{\gamma_a\})\right)\Bigg|_{\omega\to\infty}.$$

Далее обратим внимание, что спектральное распределение энергии излучения в веществе $\varepsilon_\omega(T,\{\gamma_a\})$ по определению является величиной неотрицательной. При этом распределение Планка экспоненциально убывает в пределе $\omega\to\infty$.

Следовательно, определяющим слагаемым в круглых скобках в правой части формулы (49) является величина $\Psi^{(reg)}(\omega)$, причем эта функция должна удовлетворять условию

$$\Psi^{(reg)}(\omega;T,\{\gamma_a\})\Big|_{\omega\to\infty}>3\omega_e^2/4\omega^2. \quad (50)$$

В подынтегральной функции (см. (43)), определяющей величину $\Psi^{(reg)}(\omega;T,\{\gamma_a\})$, по определению не содержится сингулярных членов, поэтому, учитывая (47), находим

$$\Psi^{(reg)}(\omega;T,\{\gamma_a\})\Big|_{\omega\to\infty} \to \\ \to \frac{c^5}{\pi\omega^5}\left(\int_0^\infty dkk^4\,\mathrm{Im}\,\varepsilon^{\mathrm{tr}}(k,\omega)\right)\Bigg|_{\omega\to\infty}, \quad (51)$$

что соответствует соотношению (5) для функции $\Delta\varepsilon_\omega(T,\{\gamma_a\})\big|_{\omega\to\infty}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Planck M.* // Ann. der Phys. 1901. V. 309. P. 553. https://doi.org/10.1002/andp.19013090310
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика, часть 1. М.: Наука, 1976.
3. *Sokolsky A.A., Gorlach M.A.* // Phys. Rev. A. 2014. V. 89. P. 013847 https://doi.org/10.1103/PhysRevA.89.013847
4. *Левин М.Л., Рытов С.М.* Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике М.: Наука, 1967.
5. *Волокитин А.И., Перссон Б.Н. Дж.* // УФН. 2007. Т. 177. С. 921. https://doi.org/10.3367/UFNr.0177.200709a.0921
6. *Виноградов Е.А., Дорофеев И.А.* // УФН. 2009. Т. 179. С. 449. https://doi.org/10.3367/UFNr.0179.200905a.0449
7. *Bobrov V.B.* // J. Phys.: Cond. Matt. 1990. V. 2. P. 6695. https://doi.org/10.1088/0953-8984/2/31/022
8. *Opher M., Opher R.* // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 79. P. 2628. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.79.2628
9. *Tsintsadze L.N., Kishimoto Y., Callebaut D.K., Tsintsadze N.L.* // Phys. Rev. E. 2007. V. 76. P. 016406. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.76.016406
10. *Trigger S.A.* // Phys. Lett. A. 2007. V. 370. P. 365. DOI: physleta.2007.05.084. https://doi.org/10.1016/j
11. *Triger S.A., Khomkin A.L.* // Plasma Phys. Rep. 2010. V. 36. P. 1095. https://doi.org/10.1134/S1063780X10130027
12. *Бобров В.Б., Соколов И.М., Тригер С.А.* // Письма в ЖЭТФ. 2015. Т. 101. С. 326. https://doi.org/10.7868/S0370274X15050033
13. *Mati P.* // Phys. Rev. A. 2017. V. 95. P. 053852. DOI: 95.053852. https://doi.org/10.1103/PhysRevA
14. *Бобров В.Б.* // ЖТФ. 2018. Т. 88. С. 168. DOI: 45402.2370. https://doi.org/10.21883/JTF.2018.02
15. *Маслов С.А., Тригер С.А., Гусейн-заде Н.Г.* // Кр. сообщ. по физ. ФИАН. 2018. № 8. С. 14.
16. *Munirov V.R., Fisch N.J.* // Phys. Rev. E. 2019. V. 100. P. 023202. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.100.023202
17. *Игнатов А.М., Тригер С.А.* // Кр. сообщ. по физ. ФИАН. 2020. № 1. С. 11.
18. *Bobrov V.B., Trigger S.A., Sokolov I.M.* // Phys. Plasmas. 2020. V. 27. P. 022106. https://doi.org/10.1063/1.5119429
19. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
20. *Агранович В.М., Гинзбург В.Л.* Электродинамика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов. М.: Наука, 1964.
21. *Бараш Ю.С., Гинзбург В.Л.* // УФН 1975. Т. 116. С. 5.
22. *Woolsey N.C., Asfaw A., Hammel B., Keane C., Back C.A., Calisti A., Mossé C., Stamm R., Talin B., Wark J.S., Lee R.W., Klein L.* // Phys. Rev. E. 1996. V. 53. P. 6396. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.53.6396
23. *Агранат М.Б., Ашитков С.И., Овчинников А.В., Ситников Д.С., Юркевич А.А., Чефонов О.В., Перельман Л.Т., Анисимов С.И., Фортов В.Е.* // Письма в ЖЭТФ. 2015. Т. 101. С. 671. https://doi.org/10.7868/S0370274X15090039
24. *Русин С.П.* // ТВТ. 2018. Т. 56. С. 203. https://doi.org/10.7868/S0040364418020060
25. Frontiers and Challenges in Warm Dense Matter / Eds. Graziani F., Desjarlais M.P., Redmer R., Trickey S.B., Berlin – Heidelberg: Springer, 2014.
26. *Dornheim T., Groth S., Bonitz M.* // Phys. Rep. 2018. V. 744. P. 1. https://doi.org/10.1016/j.physrep.2018.04.001
27. *Nettelmann N., Püstow R., Redmer R.* // Icarus. 2013. V. 225. P. 548. https://doi.org/10.1016/j.icarus.2013.04.018
28. *Hausoel A., Karolak M., Sasioglu E., Lichtenstein A., Held K., Katanin A., Toschi A., Sangiovanni G.* // Nat. Comm. 2017. V. 8. P. 16062. https://doi.org/10.1038/ncomms16062
29. *Pourovskii L.V., Mravlje J., Pozzo M., Alfê D.* // Nat. Comm. 2020. V. 11. P. 4105. https://doi.org/10.1038/s41467-020-18003-9
30. *Minakov D.V., Paramonov M.A., Levashov P.R.* // Phys. Rev. B. 2018. V. 97. P. 024205. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.97.024205
31. *Minakov D.V., Paramonov M.A., Levashov P.R.* // AIP Advances. 2018. V. 8. P. 125012. https://doi.org/10.1063/1.5062152
32. *Силин В.П., Рухадзе А.А.* Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред М.: Либроком, 2013.
33. *Bobrov V.B.* // Physica A. 1992. V. 187. P. 603. DOI: (92)90013-G. https://doi.org/10.1016/0378-4371
34. *Кузелев М.В., Рухадзе А.А.* // УФН. 1999. Т. 169. С. 687. https://doi.org/10.3367/UFNr.0169.199906g.0687

35. *Bobrov V.B., Maslov S.A., Trigger S.A.* // Phys. Plasmas. 2018. V. 25. P. 072116. https://doi.org/10.1063/1.5034243
36. *Фрадкин Е.С.* // Труды ФИАН. 1965. Т. 29. С. 7. [Fradkin E.S. // Proc. Lebedev Phys. Inst. 1965. V. 29. P. 7 (translated from the Russian by Consultants Bureau, New York (1967))].
37. *Бытыев Э.Г.* // УФН. 2009. Т. 179. С. 1333. https://doi.org/10.3367/UFNr.0179.200912i.1333
38. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений М.: ГИФМЛ, 1963.
39. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables / Eds. Abramowitz M., Stegun I.A. Washington: National Bureau of Standarts, 1972.
40. *Бобров В.Б., Тригер С.А.* // ТМФ. 2017. Т. 192. С. 523. https://doi.org/10.1134/S0040577917090094
41. *Ахиезер А.И., Ахиезер И.А., Половин Р.В., Ситенко А.Г., Степанов К.Н.* Коллективные колебания в плазме. М.: Атомиздат, 1964.