

## БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ПЫЛЕВОЙ МОЛЕКУЛЫ

© 2022 г. А. М. Игнатов\*

Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН, Москва, Россия

\*e-mail: aign@fpl.gpi.ru

Поступила в редакцию 10.04.2022 г.

После доработки 20.04.2022 г.

Принята к публикации 28.04.2022 г.

Теоретически исследуется динамика связанного комплекса, состоящего из двух частиц, под действием внешних случайных сил. Предполагается, что межчастичные силы являются невзаимными. Показано, что в общем случае среднеквадратичные флуктуации скорости различных частиц отличаются друг от друга и от температуры термостата. Проведены численные расчеты динамики броуновских частиц в плазме с больцмановскими электронами и направленным потоком ионов.

*Ключевые слова:* пылевая плазма, броуновское движение

**DOI:** 10.31857/S0367292122700147

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Пылевая плазма представляет собой многокомпонентную среду, состоящую из электронов, ионов и аэрозольных частиц, называемых пылинками. Многочисленные аспекты физики пылевой плазмы обсуждаются в монографиях [1–5]. В наземных условиях часто используется плазма ВЧ-разряда, при этом заряженные пылинки собираются в нижней части разрядной камеры и оказываются захваченными в потенциальную яму, возникающую благодаря действию электрической силы отталкивания от нижнего электрода и силы тяжести.

Наличие направленного потока ионов в приэлектродной части разряда приводит к сильной анизотропии потенциала электрического поля, создаваемого отдельным точечным зарядом. Скорость ионного потока сравнима со скоростью ионного звука и, поэтому, вниз по течению от заряда формируется осциллирующий след ионно-звуковых волн. Благодаря этому часто образуются структуры в виде цепочки пылинок, расположенных одна над другой. При этом существенно, что межчастичные силы в подобном комплексе оказываются невзаимными, то есть для них нарушается третий закон Ньютона. В частности, довольно давно изучаются пылевые молекулы, представляющие собой связанный комплекс из двух пылинок [6].

Теория связанных пылевых комплексов с использованием различных модельных потенциалов взаимодействия развивалась многими авторами (например, [7–10]). В частности, в работе [11] была разработана теория колебаний и устойчи-

вости пылевой молекулы для случая невзаимных межчастичных сил с произвольным потенциалом взаимодействия.

В настоящей работе исследуется динамика пылевой молекулы под действием внешних случайных сил. Предполагается, что в вертикальном направлении (ось  $z$ ) частицы удерживаются параболическим потенциальным полем с характерной частотой колебаний  $\Omega_0$ . Частицы имеют одинаковые постоянные заряды  $Q$  и расположены в плазме, состоящей из больцмановских электронов с температурой  $T_e$  и направленного вдоль оси  $z$  потока ионов (скорость  $-u$ ) с температурой  $T_i \ll T_e$ .

Используются безразмерные переменные с масштабом длины  $\lambda = u/\omega_{pi}$ , где  $\omega_{pi}$  – ионная плазменная частота. Межчастичные силы нормированы на  $Q^2/\lambda^2$ , а масштаб времени для частиц с массой  $M_0$  равен  $M_0^{1/2}\lambda^{3/2}/|Q|$ . Трехмерные векторы обозначаются жирным шрифтом, а греческие индексы  $\alpha, \beta = x, y$  используются для обозначения горизонтальных координат. При описании броуновского движения мы придерживаемся терминологии и обозначений [12].

Статья организована следующим образом. В разделе 2 для произвольного потенциала взаимодействия выписаны общие формулы, относящиеся к динамике пылевой молекулы, и вычислены одновременные корреляторы скоростей частиц. В разделе 3 описан используемый для расчетов потенциал взаимодействия, громоздкие детали численных расчетов потенциала вынесены в Приложение. В разделе 4 обсуждаются условия

существования пылевой молекулы и приведены результаты численных расчетов корреляционных функций.

## 2. СТОХАСТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА ПЫЛЕВОЙ МОЛЕКУЛЫ

В используемых безразмерных переменных массы обеих частиц равны единице. Общие уравнения движения для координат  $\mathbf{r}_{1,2}$  записываются в виде

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_1 &= -\Omega_0^2 \mathbf{e}_z z_1 - \nabla U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - \gamma \mathbf{v}_1 + \mathbf{f}_1(t), \\ \dot{\mathbf{v}}_2 &= -\Omega_0^2 \mathbf{e}_z z_2 - \nabla U(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) - \gamma \mathbf{v}_2 + \mathbf{f}_2(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где точка над символом обозначает производную по времени,  $\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i$ ,  $\mathbf{e}_z$  — единичный вектор вдоль оси  $z$ , а  $\gamma$  обозначает коэффициент трения об окружающий газ. В уравнениях (1) потенциал считается изотропной в плоскости  $xu$  функцией  $U(\mathbf{r}) = U(\rho, z)$ , где  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Невзаимность межчастичных сил проявляется в том, что  $U(\rho, -z) \neq U(\rho, z)$ .

Корреляторы случайных сил  $\mathbf{f}_{1,2}$  независимы

$$\begin{aligned} \langle f_{i,j}(t) f_{i',j'}(t') \rangle &= 2D_0 \delta_{i,i'} \delta_{j,j'} \delta(t-t'), \\ i, i' &= 1, 2, \quad j, j' = x, y, z, \end{aligned} \quad (2)$$

и имеют одинаковые интенсивности  $D_0 = \gamma T_0$ , где  $T_0$  — температура термостата.

Пусть в отсутствие внешних сил равновесные координаты равны  $\mathbf{r}_i^0$ . Без потери общности можно считать, что  $x_i^0 = y_i^0 = 0$ , а вертикальные координаты равны  $z_{1,2}^0 = H \pm h/2$ , где  $h > 0$ , т. е. частица 1 расположена над частицей 2. Расстояние между частицами  $h$  и равновесная высота левитации  $H$  определяются из уравнений [11]

$$h\Omega_0^2 + v_{,z}(0, h) = 0, \quad H\Omega_0^2 + V_{,z}(0, h) = 0, \quad (3)$$

где введены четные и нечетные по координате  $z$  части потенциала взаимодействия  $v(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}) + U(-\mathbf{r})$  и  $V(\mathbf{r}) = (U(\mathbf{r}) - U(-\mathbf{r}))/2$ . Индекс с запятой используется для обозначения производной по соответствующей координате.

Перейдем от исходных координат к смещениям относительно положений равновесия  $\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_i^0 + \mathbf{r}_i$  и, полагая, что величины  $\mathbf{r}_i$  и  $\mathbf{f}_i$  имеют один порядок малости, линеаризуем уравнения (1). Смещения удобно представить в виде

$$\begin{aligned} z_{1,2}(t) &= z(t) \left( \frac{\Omega_v^2}{\omega_v^2} \pm \frac{1}{2} \right) + Z(t), \\ r_{\alpha 1,2}(t) &= r_\alpha(t) \left( \frac{\Omega_h^2}{\omega_h^2} \pm \frac{1}{2} \right) + R_\alpha(t), \end{aligned} \quad (4)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \omega_h^2 &= v_{,pp}(0, h), & \omega_v^2 &= v_{,zz}(0, h), \\ \Omega_h^2 &= V_{,pp}(0, h), & \Omega_v^2 &= V_{,zz}(0, h). \end{aligned} \quad (5)$$

Заметим, что в отсутствии эффектов невзаимности  $V(\mathbf{r}) = 0$  и  $\Omega_h = \Omega_v = 0$ .

После замены переменных (4) линеаризованные уравнения движения сводятся к набору уравнений для независимых гармонических осцилляторов

$$\begin{aligned} \dot{v}_z(t) &= -(\omega_v^2 + \Omega_0^2)z(t) - \gamma v_z(t) + f_z(t), \\ \dot{V}_z(t) &= -\Omega_0^2 Z(t) - \gamma V_z(t) + F_z(t), \\ \dot{v}_\alpha(t) &= -\omega_h^2 r_\alpha(t) - \gamma v_\alpha(t) + f_\alpha(t), \\ \dot{V}_\alpha(t) &= -\gamma V_\alpha(t) + F_\alpha(t), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $v = \dot{\mathbf{r}}$ ,  $V = \dot{\mathbf{R}}$ .

В общем случае величины, определяемые соотношениями (5), могут быть как положительными, так и отрицательными. Однако из уравнений (6) видно, что для существования и устойчивости пылевой молекулы помимо соотношений (3) необходимо выполнение двух неравенств

$$\omega_v^2 + \Omega_0^2 > 0, \quad \omega_h^2 > 0, \quad (7)$$

тогда как знаки величин  $\Omega_v^2$  и  $\Omega_h^2$  на устойчивость не влияют. В дальнейшем предполагается, что неравенства (7) выполнены.

Случайные силы, действующие на осцилляторы, равны

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(t) &= \mathbf{f}_1(t) - \mathbf{f}_2(t), \\ F_z(t) &= \frac{1}{2}(f_{1,z}(t) + f_{2,z}(t)) + \frac{\Omega_v^2}{\omega_v^2}(f_{2,z}(t) - f_{1,z}(t)), \\ F_\alpha(t) &= \frac{1}{2}(f_{1,\alpha}(t) + f_{2,\alpha}(t)) + \frac{\Omega_h^2}{\omega_h^2}(f_{2,\alpha}(t) - f_{1,\alpha}(t)). \end{aligned} \quad (8)$$

При помощи соотношений (2) легко вычислить корреляторы сил (8)

$$\begin{aligned} \langle f_i(t) f_{i'}(t') \rangle &= 4D_0 \delta_{i,i'} \delta(t-t'), \quad i, i' = x, y, z, \\ \langle F_z(t) F_z(t') \rangle &= D_0 \left( 1 + 4 \frac{\Omega_v^4}{\omega_v^4} \right) \delta(t-t'), \\ \langle F_\alpha(t) F_\beta(t') \rangle &= D_0 \left( 1 + 4 \frac{\Omega_h^4}{\omega_h^4} \right) \delta_{\alpha,\beta} \delta(t-t'). \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнения (6) описывают броуновское движение независимых осцилляторов, для каждого из которых функция распределения по координатам и скоростям известна [12]. Существенно, однако, то, что в соответствии с (9) интенсивности источников случайных сил для осцилляторов различаются. Поскольку осцилляторы независимы, пол-

ную функцию распределения для пылевой молекулы можно записать в виде произведения

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{R}, \mathbf{V}) = C \exp\left(-\frac{r^2 \omega_h^2 + v^2}{4T_0}\right) \times \exp\left(-\frac{V_\perp^2 \omega_h^4}{T_0(\omega_h^4 + 4\Omega_h^4)} - \frac{\omega_v^4 (V_z^2 + \Omega_0^2 Z^2)}{T_0(\omega_v^4 + 4\Omega_v^4)}\right), \quad (10)$$

где  $V_\perp = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$  и  $C$  – нормировочный множитель. При выводе (10) учтены явные выражения для корреляторов сил (9).

При помощи замены переменных (4) функцию распределения (10) можно выразить через исходные координаты и скорости, что позволяет вычислить среднеквадратичные флуктуации величин, относящихся к различным частицам. Наибольший интерес представляют флуктуации скоростей

$$\langle v_{z1,2}^2 \rangle = T_0 \frac{\omega_v^4 + 4\Omega_v^4 \pm 2\omega_v^2 \Omega_v^2}{\omega_v^4}, \quad (11)$$

$$\langle v_{\alpha 1,2}^2 \rangle = T_0 \frac{\omega_h^4 + 4\Omega_h^4 \pm 2\omega_h^2 \Omega_h^2}{\omega_h^4}, \quad \alpha = x, y.$$

Наряду со средними (11) отличными от нуля оказываются смешанные корреляторы скоростей

$$\langle v_{1z} v_{2z} \rangle = 4T_0 \frac{\Omega_v^4}{\omega_v^4}, \quad \langle v_{1\alpha} v_{2\alpha} \rangle = 4T_0 \frac{\Omega_h^4}{\omega_h^4}. \quad (12)$$

В дальнейшем величины (11) условно называются горизонтальными и вертикальными температурами отдельных частиц<sup>1</sup>. Влияние эффектов невзаимности заключается в отличии всех температур от температуры  $T_0$ . В отсутствие невзаимных сил  $\Omega_h = \Omega_v = 0$ , тепловое равновесие восстанавливается  $\langle v_{1i}^2 \rangle = \langle v_{2i}^2 \rangle = T_0$ , а корреляторы (12) обращаются в нуль.

### 3. ПОТЕНЦИАЛ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Для численных расчетов используется потенциал точечного заряда в потоке плазмы. В используемых безразмерных переменных потенциал можно записать в виде интеграла

$$U(\rho, z) = \frac{4\pi}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \int_{-\infty}^\infty dk_z \frac{k J_0(k\rho) e^{ik_z z}}{(k^2 + k_z^2) \epsilon(k_z, k, k_z)}, \quad (13)$$

<sup>1</sup> В выбранной системе единиц размерность температуры равна квадрату скорости.

где диэлектрическая проницаемость плазмы равна

$$\epsilon(\omega, k, k_z) = 1 + \frac{M^2}{k^2 + k_z^2} - \frac{1}{\omega(\omega + i0) - \tau^2 (k^2 + k_z^2)}, \quad (14)$$

$\tau = v_{Ti}/u \ll 1$  и величина  $M = (n_e/n_i)u\sqrt{m_i/T_e}$  пропорциональна числу Маха ионного потока.

Нули знаменателя в подынтегральном выражении (13) равны  $k_z = \pm iq_1(k)$ ,  $k_z = \pm iq_2(k) - i0$ , где величины  $q_{1,2}(k) > 0$ . Явные выражения для  $q_{1,2}(k)$  выписаны в приложении (19), здесь отметим лишь, что при больших значениях  $k \rightarrow \infty$

$$q_1(k) = k + O(1/k), \quad q_2(k) = \tau k + O(1/k). \quad (15)$$

Результат интегрирования по  $k_z$  в (13) записывается в виде

$$U(\rho, z) = S(\rho, z) + \theta(-z)W(\rho, z), \quad (16)$$

где

$$S(\rho, z) = \int_0^\infty dk s(k) e^{-q_1(k)|z|} J_0(k\rho), \quad (17)$$

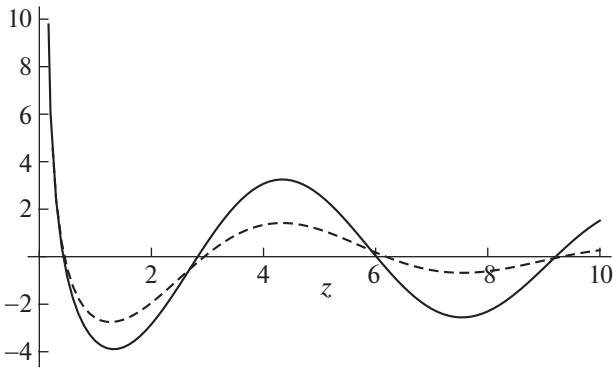
$$W(\rho, z) = \int_0^\infty dk w(k) \sin(q_2(k)z) J_0(k\rho). \quad (18)$$

Явные выражения для функций  $s(k)$  и  $w(k)$  выписаны в Приложении (20), (21).

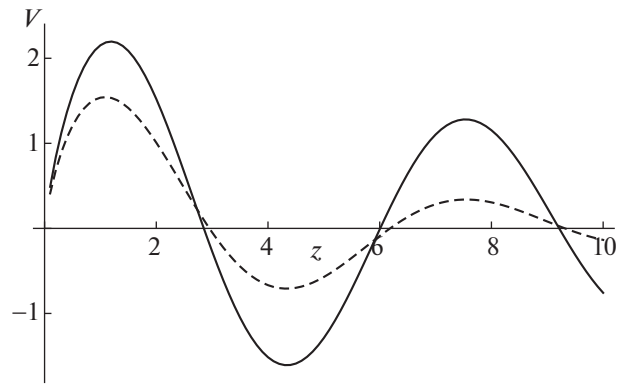
Четная функция координат (17) представляет собой анизотропный экранированный кулоновский потенциал и при  $\rho \rightarrow 0$ ,  $z \rightarrow 0$  ведет себя как  $S(\rho, z) \sim 1/\sqrt{\rho^2 + z^2}$ . Поскольку при больших волновых числах  $q_1(k) \approx k$  (15), интеграл (17) хорошо сходится и легко рассчитывается стандартными методами.

Функция (18) описывает след ионно-звуковых волн, формирующийся ниже по течению от точечного заряда. Интеграл (18) от быстро осциллирующей функции сходится довольно плохо, и для вычисления его производных (5) приходится прибегать к различным ухищрениям, описываемым в Приложении.

Если пренебречь тепловым разбросом ионов ( $\tau = 0$ ), то при  $k \rightarrow \infty$  функция  $w(k) \sim 1/k$  и  $q_2 \rightarrow 1$ . По этой причине интеграл (18) при  $\rho \rightarrow 0$  имеет логарифмическую особенность  $W(\rho, z) \sim \ln \rho$ . При  $\tau \neq 0$  асимптотика  $q_2$  имеет вид (15), что сглаживает сингулярность. При этом характерный масштаб изменения  $W(\rho, z)$  при малых  $\rho$  и частоте  $\omega_h$ ,  $\Omega_h$  (5) определяются величиной  $\tau$ . В исходных физических переменных это означает,



**Рис. 1.** График функции  $v(0, z)$ . Сплошная кривая –  $M = 0.5$ , штриховая –  $M = 1.5$ ;  $\tau = 0.1$ .



**Рис. 2.** График функции  $V(0, z)$ . Сплошная кривая –  $M = 0.5$ , штриховая –  $M = 1.5$ ;  $\tau = 0.1$ .

что при  $\rho \approx 0$  и  $z < 0$  характерный масштаб потенциала точечной частицы в радиальном направлении определяется ионным дебаевским радиусом. Заметим, что при исследовании динамики систем частиц, расположенных на одной высоте [14], сингулярностей не возникает и нет необходимости в учете теплового разброса ионов.

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Все расчеты проводились для достаточно малого теплового разброса ионов  $\tau = 0.1$  для двух значений числа Маха  $M = 0.5$  и  $M = 1.5$ .

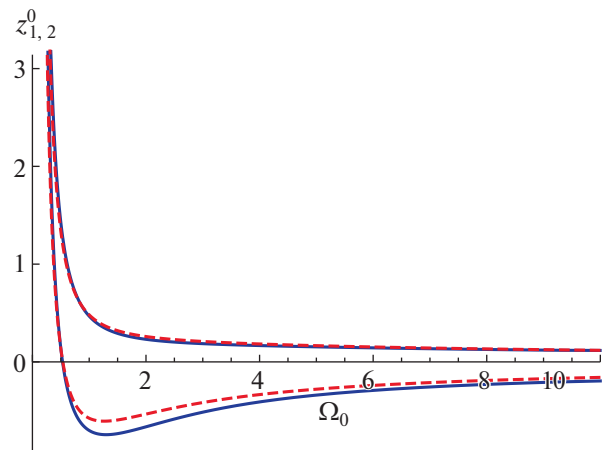
##### 4.1. Равновесные конфигурации

Рассмотрим сначала равновесные конфигурации молекулы в отсутствие внешних сил и трения. Введенные в разделе 2 потенциальные функции выражаются при  $z > 0$  через (17), (18) как  $v(\rho, z) = 2S(\rho, z) + W(\rho, -z)$  и  $V(\rho, z) = -W(\rho, -z)/2$ .

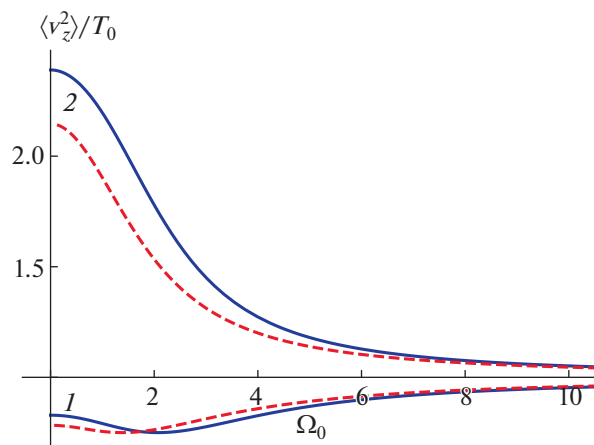
Примеры функций  $v(0, z)$  и  $V(0, z)$  показаны на рис. 1, 2. При  $z \rightarrow 0$  доминирующим является вклад кулоновского потенциала (17) и  $v(0, z) \sim 1/z$ , тогда как  $V(0, z) \rightarrow 0$ .

Обе функции и их производные являются осциллирующими функциями  $z$ . Поэтому решение первого уравнения равновесия (3), определяющего равновесное расстояние между пылинками, существует в интервале  $0 < h < h_{\max}$ , где  $h_{\max}$  – минимальный корень  $v_{,z}(0, z) = 0$ , и  $\Omega_0 > 0$ . Кроме того, существуют решения и для других интервалов изменения  $h$  таких, что  $v_{,z}(0, h) < 0$ , однако для этих решений параметр  $\Omega_0$  лежит в некоторых ограниченных областях. В дальнейшем обсуждается наиболее интересное основное состояние молекулы с минимальным расстоянием между частицами.

Решение системы уравнений равновесия (3) позволяет построить зависимость равновесных координат пылинок  $z_{1,2}$  от частоты  $\Omega_0$ . Два примера показаны на рис. 3. При больших значениях  $\Omega_0$  координаты частиц стремятся к нулю ( $h \sim \Omega_0^{-2/3}$ ,  $H \sim \Omega_0^{-2}$ ), тогда как при малых  $\Omega_0$  расстояние между частицами стремится к фиксированному значению  $h_{\max}$  (для обоих рассмотренных случаев  $h_{\max} \approx 1.3$ ), а координаты центра масс неограниченно возрастают. В этом заключается проявление коллективной силы ионного увлечения, обсуждавшейся в [13]. Заметим, что хотя внешне кривые на рис. 3, соответствующие разным числам Маха, почти не отличаются, вследствие выбранной нормировки безразмерных переменных пространственные масштабы сплошных и пунктирных кривых различаются в три раза.



**Рис. 3.** Зависимость равновесных координат частиц от  $\Omega_0$ . Сплошные линии –  $M = 0.5$ , штриховые –  $M = 1.5$ ;  $\tau = 0.1$ .



**Рис. 4.** Зависимость вертикальных температур от  $\Omega_0$ . Номера кривых соответствуют номерам частиц. Сплошные линии –  $M = 0.5$ , штриховые –  $M = 1.5$ ;  $\tau = 0.1$ .

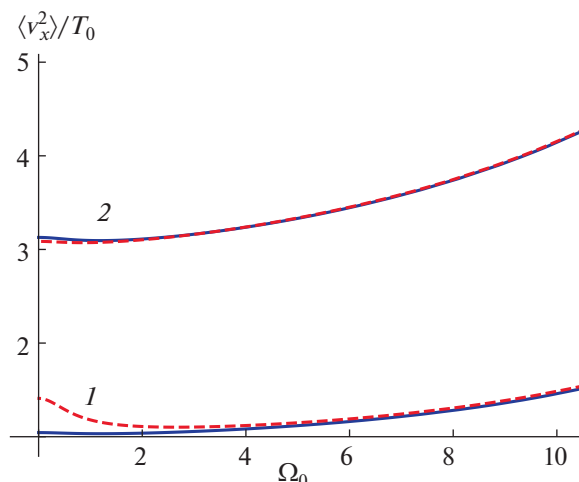
#### 4.2. Корреляторы скоростей

Для устойчивости молекулы необходимо выполнение условий (7). В случае обсуждаемого здесь основного состояния молекулы в исследованной области параметров первое неравенство (7) выполняется всегда, однако оно может нарушаться для решений (3) с большими значениями  $h$ .

Как уже отмечалось, при малых межчастичных расстояниях доминирующим является экранированный потенциал (17), для которого  $S_{pp}(0, h) < 0$ . Поэтому существует межчастичное расстояние  $h_{\min}$  для которого  $\omega_h = 0$ , и при  $h < h_{\min}$  вертикальное расположение частиц становится неустойчивым. Для рассматриваемых здесь примеров  $h_{\min} \approx 0.14$ , а частота внешнего удерживающего потенциала довольно велика –  $\Omega_0 \approx 27$ .

На рис. 4 показаны среднеквадратичные флуктуации вертикальных компонент скоростей частиц (11) как функции  $\Omega_0$  для дозвукового ( $M = 0.5$ ) и сверхзвукового ( $M = 1.5$ ) потоков плазмы. Из рисунка видно, что характерная вертикальная температура верхней частицы всегда меньше температуры окружающего газа  $T_0$ , а нижней частицы – больше. При увеличении параметра  $\Omega_0$  уменьшается межчастичное расстояние, эффекты невзаимности перестают играть заметную роль, и вертикальные температуры обеих частиц стремятся к  $T_0$ .

Горизонтальные температуры частиц (рис. 5) всегда превышают  $T_0$ . При увеличении параметра  $\Omega_0$  частота горизонтальных колебаний  $\omega_h$  обращается в нуль, а горизонтальные температуры неограниченно возрастают. Подобное поведение



**Рис. 5.** Зависимость горизонтальных температур от  $\Omega_0$ . Номера кривых соответствуют номерам частиц. Сплошные линии –  $M = 0.5$ , штриховые –  $M = 1.5$ ;  $\tau = 0.1$ .

корреляционных функций характерно для любых систем вблизи точки фазового перехода и, в частности, для плазменного кристалла [15].

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе изучалось броуновское движение двух пылевых частиц, левитирующих в приэлектродном слое плазмы. Наличие потока ионов в окружающей среде описывается путем введения невзаимных сил между частицами. Показано, что среднеквадратичные флуктуации скорости в горизонтальном и вертикальном направлениях заметно отличаются и не равны температуре термостата. Таким образом, действие плазмы приводит к тому, что пылевая молекула ведет себя подобно холодильнику или тепловому насосу.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Явные выражения для корней знаменателя в подынтегральном выражении (13) имеют вид

$$q_{1,2}^2 = \frac{\sqrt{D} \pm [k^2(1 - 2\tau^2) - M^2\tau + M^2 - 1]}{2(1 - \tau^2)}, \quad (19)$$

где

$$D = k^4 + 2k^2(1 + M^2(1 - \tau^2)) + (1 - M^2(1 - \tau^2))^2.$$

Функции, входящие в интегралы (17), (18), записываются как

$$s(k) = \frac{kq_1^2(1 - \tau^2) + k^3\tau^2}{(1 - \tau^2)q_1(q_1^2 + q_2^2)}, \quad (20)$$

$$w(k) = \frac{2k(-k^2\tau^2 + q_2^2(1-\tau^2))}{(1-\tau^2)q_2(q_1^2 + q_2^2)}. \quad (21)$$

При больших значениях волнового вектора  $k \rightarrow \infty$  эти функции ведут себя как

$$s(k) \rightarrow 1, \quad w(k) \rightarrow \frac{2}{k^2\tau} \quad (22)$$

Интеграл (17) и его производные хорошо сходятся и вычисляются непосредственно. Интеграл (18) тоже сходится, однако при непосредственном вычислении вторых производных возникают расходящиеся интегралы. Избежать появления расходимостей можно следующим способом.

Во-первых, произведем замену переменных  $k \rightarrow q_2$ , после чего разобьем интеграл (18) на две части  $W(\rho, z) = W_1(\rho, z) + W_2(\rho, z)$ , где

$$W_1(\rho, z) = \int_{q_{\min}}^{q_0} dq_2 (dk/dq_2) w(k) \sin(q_2 z) J_0(k\rho), \quad (23)$$

$$W_2(\rho, z) = \int_{q_0}^{\infty} dq_2 (dk/dq_2) w(k) \sin(q_2 z) J_0(k\rho). \quad (24)$$

Здесь  $q_{\min} = q_2|_{k=0}$ , а величина  $q_0$ , от которой результат не зависит, выбирается достаточно большой  $q_0 > q_{\min}$ . Интеграл (23) берется по конечному отрезку и его можно дифференцировать по  $z$  и  $\rho$ .

Производные (24) по  $z$  при  $\rho = 0$  можно вычислить следующим образом. Из подынтегрального выражения в (24) при  $\rho = 0$  вычтем и прибавим его асимптотику при  $q_2 \rightarrow \infty$ , равную  $2\sin(q_2 z)/q_2^2$ . Интеграл от асимптотической части вычисляется в явном виде, и выражение (24) переписывается как

$$W_2(0, z) = \int_{q_0}^{\infty} dq_2 \left[ (dk/dq_2) w(k) - 2/q_2^2 \right] \sin(q_2 z) + \frac{2\sin(q_0 z)}{q_0} - 2z\text{Ci}(q_0|z|), \quad (25)$$

где  $\text{Ci}(z) = -\int_z^{\infty} dt \cos(t)/t$  – интегральный косинус. Дифференцирование (25) приводит к сходящемуся интегралу.

Вторые производные (24) по  $\rho$  вычисляются несколько сложнее. Разобьем интеграл (24) на две части  $W_2(\rho, z) = W_{21}(\rho, z) + W_{22}(\rho, z)$ , где

$$W_{21}(\rho, z) = \int_{q_0}^{\infty} dq_2 [(dk/dq_2) w(k) J_0(k\rho) \sin(q_2 z) - \phi(q_2, \rho)], \quad (26)$$

$$W_{22}(\rho, z) = \int_{q_0}^{\infty} dq_2 \phi(q_2, \rho) \quad (27)$$

и

$$\phi(q_2, \rho) = 2 \left( \frac{1}{q_2^2} + \frac{1-2M^2\tau^2}{q_2^4} \right) \times \times J_0 \left( \frac{\rho\sqrt{1-\tau^2}q_2}{\tau} \right) \sin(q_2 z) \quad (28)$$

– асимптотика подынтегрального выражения (24) при  $q_2 \rightarrow \infty$ . Дифференцирование выражения (26) по  $\rho$  при  $\rho = 0$  приводит к сходящемуся интегралу.

Для вычисления производной второго члена (27) поступим следующим образом. Представим функцию Бесселя в виде  $J_0(z) = (1/\pi) \times \int_0^\pi dt \cos(z \sin t)$ , после чего интеграл по  $q_2$  вычисляется. Получившееся выражение регулярно при  $|z| > \rho/\tau$ , его можно дважды продифференцировать по  $\rho$  и положить  $\rho = 0$ . После этого интеграл по  $t$  вычисляется в явном виде

$$W_{22,\rho\rho}(0, z) = \frac{1-\tau^2}{\tau^2} (1-2M^2\tau^2) \left[ z\text{Ci}(q_0|z|) - \frac{\sin(q_0 z)}{q_0} \right] - \frac{(1-\tau^2)\cos(q_0 z)}{\tau^2 z}. \quad (29)$$

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Комплексная и пылевая плазма / Ред. Фортов В.Е., Морфилл Г.Е. М.: Физматлит, 2012.
2. *Tsytoich V.N., Morfill G.E., Vladimirov S.V., Thomas H.M.* Elementary Physics of Complex Plasmas. Lect. Notes Phys. 731. Berlin, Heidelberg: Springer, 2008.
3. *Vladimirov S.V., Ostrikov K., Samarian A.A.* Physics and Applications of Complex Plasmas. Imperial College Press, 2005.
4. *Sodha M.S.* Kinetics of Complex Plasmas. Springer India, 2014.

5. Introduction to Complex Plasmas / Eds. Bonitz M., Horing N., Ludwig P. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2010.
6. Meltzer A., Schweigert V.A., Piel A. Phys. Rev. Lett. 1999. V. 83. P. 3194.
7. Kompaneets R., Vladimirov S.V., Ivlev A.V., Tsyrovich V., Morfill G. Phys. Plasmas. 2006. V. 13. P.072104.
8. Ваулина О.С., Лисина И.И., Косс К.Г. Физика плазмы. 2013. Т. 39. С. 455.
9. Лисина И.И., Ваулина О.С. Физика плазмы. 2014. Т. 40. С. 815.
10. Ваулина О.С. Физика плазмы. 2020. Т. 46. С. 368.
11. Игнатов А.М. // Физика плазмы. 2017. Т. 43. С. 910.
12. Климонтович Ю.Л. Статистическая физика. М.: Наука, 1982.
13. Игнатов А.М. // Физика плазмы. 2019. Т. 45. С. 825.
14. Игнатов А.М. // Физика плазмы. 2020. Т. 46. С. 358.
15. Игнатов А.М. // Физика плазмы. 2022. Т. 48. С. 519.