

МОДИФИЦИРОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ ЗАХАРОВА–КУЗНЕЦОВА ДЛЯ ОПИСАНИЯ НИЗКОЧАСТОТНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПЛАЗМЕ ЗАПЫЛЕННОЙ ЭКЗОСФЕРЫ ЛУНЫ

© 2022 г. А. И. Кассем^{a, b}, С. И. Копнин^c, С. И. Попель^{c, *}, Л. М. Зеленый^c

^a Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный, Россия

^b Университет Мансура, Мансура, Египет

^c Институт космических исследований РАН, Москва, Россия

*e-mail: popel@iki.rssi.ru

Поступила в редакцию 13.06.2022 г.

После доработки 25.06.2022 г.

Принята к публикации 26.06.2022 г.

Получено нелинейное уравнение, описывающее динамику нелинейных волновых структур в пылевой плазме над освещенной частью Луны в случае низких частот и блинообразной формы волнового пакета вдоль внешнего магнитного поля. Данное уравнение является модифицированным уравнением Захарова–Кузнецова. Найдена аналитическая формула для одномерного солитонного решения. Проведен анализ устойчивости одномерного солитонного решения, который показывает, что данное решение устойчиво.

Ключевые слова: модифицированное уравнение Захарова–Кузнецова, неаналитичность, солитонное решение, устойчивость, переходные лунные явления

DOI: 10.31857/S0367292122600662

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы во всем мире значительно возрос интерес к исследованиям Луны с помощью космических аппаратов. В России готовятся лунные миссии “Луна-25”, “Луна-26”, “Луна-27” (см., например, [1]). Существенный вклад в развитие лунных программ вносят Китайская Народная Республика и Соединенные Штаты Америки (см., например, [2–4]) и т. д. Существенную долю в исследованиях Луны занимают вопросы, касающиеся пыли и пылевой плазмы в лунной экзосфере [5, 6]. Источником пыли на Луне служит лунный реголит, на формирование которого существенное влияние оказала бомбардировка поверхности естественного спутника Земли метеороидами различных размеров на протяжении миллиардов лет. Обращенная к Солнцу сторона Луны находится под действием солнечного ветра и излучения. Важную роль приобретает фотоэффект, за счет которого освещенная солнечным светом поверхность Луны приобретает положительный заряд [7].

При определенных условиях силы электростатического отталкивания могут привести к подъему пылевых частиц субмикроскопических и микрометровых размеров над лунной поверхностью [8–10]. В этом случае можно говорить о “запыленной” эк-

зосфере Луны, в которой помимо электронов и ионов солнечного ветра содержатся левитирующие заряженные пылевые частицы, а также фотоэлектроны, поступающие в экзосферу в результате фотоэмиссии с лунной поверхности и с поверхностей левитирующих пылевых частиц. Следует подчеркнуть, что роль фотоэлектронов в процессе зарядки пылевых частиц оказывается определяющей. На рис. 1 приведены параметры “запыленной” экзосферы Луны, полученные на основе численных расчетов в модели, описанной в [9].

Существенное место в физике плазмы занимают исследования линейных и нелинейных волновых структур, например, солитонов (см., например, [11–14]).

Как и в любой плазменной системе, в экзосфере Луны возможно существование линейных и нелинейных волн [15–19]. В работе [20] приведено описание пылевых звуковых солитонов в плазме запыленной экзосферы Луны. При этом использовалось упрощенное описание, в котором лунная поверхность предполагалась гладкой, не учитывалась анизотропия, связанная, например, с присутствием магнитного поля, что позволило использовать одномерные (в пространстве) уравнения. Вместе с тем, хорошо известно, что примерно четверть лунной орбиты проходит через

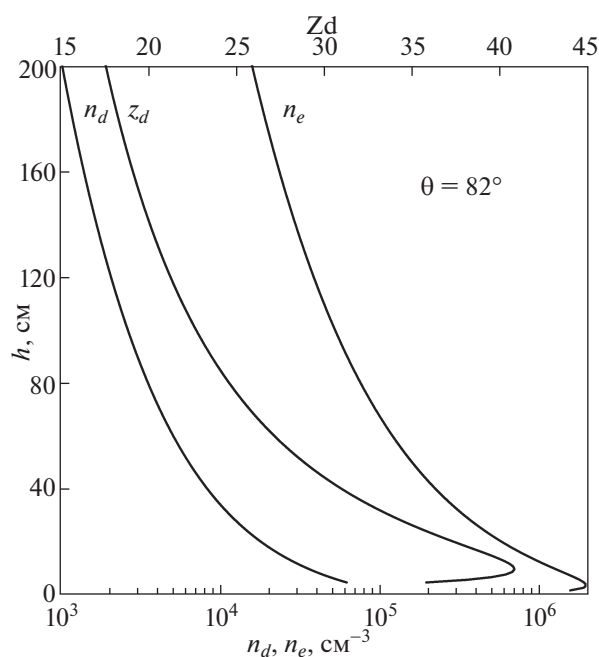


Рис. 1. Параметры “запыленной” экзосферы Луны в зависимости от высоты h над лунной поверхностью (n_e и n_d – концентрации электронов и пылевых частиц, Z_d – зарядовое число пылевой частицы) для значения угла $\theta = 82^\circ$ между местной нормалью и направлением на Солнце.

хвост магнитосферы Земли. Типичные магнитные поля в хвосте магнитосферы порядка 10^{-5} – 10^{-4} Гс [21, 22]. Кроме того, имеются области магнитных полей коры Луны, известные как области магнитных аномалий. Поверхностные поля, измеренные магнитометрами Apollo 12, 14, 15 и 16, составили соответственно 3.8×10^{-4} , 1.03×10^{-3} , 3×10^{-5} и 3.27×10^{-3} Гс [23]. Следует отметить, что все места посадки кораблей Аполлон находились на видимой стороне Луны. Существуют спутниковые наблюдения [24], которые показали, что самые большие и сильные магнитные поля расположены на невидимой стороне Луны.

Благодаря действию магнитных полей в хвосте магнитосферы Земли возможен перенос частиц заряженной пыли над лунной поверхностью на большие расстояния [25]. Перенос пылевых частиц на большие расстояния осуществляется за счет нескомпенсированной магнитной части силы Лоренца и является важным качественным эффектом. Магнитная часть силы Лоренца, действующей на пылевую частицу, для полей магнитных аномалий либо меньше, либо сопоставима с аналогичной силой, вычисленной для магнитных полей хвоста магнитосферы Земли на орбите Луны. Однако из-за существенной локализации областей магнитных аномалий их влияние на динамику заряженных пылевых частиц

над Луной не приводит к новым качественным эффектам [26]. Вместе с тем, магнитные поля могут определять характер плазменной турбулентности [14, 19].

В условиях пылевой плазмы над освещенной частью Луны основной вклад вносят фотоэлектроны и положительно заряженные пылевые частицы, выполняющие роль ионов в обычной плазме. В работе [14] рассматривалась ситуация, когда гирочастота пылевых частиц ω_{Bd} настолько мала, что для частот пылевых звуковых волн ω выполнено соотношение $\omega \gg \omega_{Bd}$. В этом случае, с одной стороны, влиянием магнитного поля можно пренебречь, но с другой – существует анизотропия, связанная с вектором магнитного поля, которая может повлиять на структуру нелинейной волны. Если при этом имеется почти одномерный волновой пакет, в котором локализация вдоль вектора магнитного поля, значительно сильнее, чем в других направлениях, то, как показано в [14], нелинейные волны описываются модифицированным уравнением Кадомцева–Петвиашвили. В настоящей работе рассматривается противоположная ситуация, когда частоты пылевых звуковых волн не превышают ω_{Bd} . В обычной плазме в случае низких частот и блинообразной формы волнового пакета вдоль внешнего магнитного поля нелинейные волны описываются хорошо известным уравнением Захарова–Кузнецова (см., например, [27]). При этом особенности окололунной пылевой плазмы по сравнению с обычной плазмой весьма велики и ограничиваются не просто заменой ионов на положительно заряженные пылевые частицы, поэтому уравнение, описывающее в схожей ситуации пылевые звуковые солитоны, будет отличаться от уравнения Захарова–Кузнецова. Целью настоящей работы является вывод этого уравнения, нахождение его одномерных решений, а также исследование устойчивости этих решений.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

К образованию пылевых звуковых нелинейных структур у освещенной стороны Луны может, например, приводить пылевая звуковая неустойчивость, которая достаточно легко реализуется в условиях плазмы в области взаимодействия хвоста магнитосферы с Луной [17, 18]. Если в результате раскочки колебаний (или волны) вследствие развития неустойчивости их амплитуды становятся достаточно большими, такими, что уже невозможно линейное рассмотрение, то в плазме могут возникать пылевые звуковые нелинейные волны, одним из видов которых являются солитоны.

Динамика пылевых частиц в плазме запыленной экзосфере Луны с учетом магнитного поля \mathbf{B} ,

направленного вдоль оси z , описывается уравнением непрерывности и уравнением Эйлера

$$\frac{\partial n_d}{\partial t} + \frac{\partial n_d v_{d,x}}{\partial x} + \frac{\partial n_d v_{d,y}}{\partial y} + \frac{\partial n_d v_{d,z}}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_{d,x}}{\partial t} + v_{d,x} \frac{\partial v_{d,x}}{\partial x} + v_{d,y} \frac{\partial v_{d,x}}{\partial y} + v_{d,z} \frac{\partial v_{d,x}}{\partial z} + \frac{q_d}{m_d} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{q_d B}{m_d c} v_{d,y}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial v_{d,y}}{\partial t} + v_{d,x} \frac{\partial v_{d,y}}{\partial x} + v_{d,y} \frac{\partial v_{d,y}}{\partial y} + v_{d,z} \frac{\partial v_{d,y}}{\partial z} + \frac{q_d}{m_d} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{q_d B}{m_d c} v_{d,x}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial v_{d,z}}{\partial t} + v_{d,x} \frac{\partial v_{d,z}}{\partial x} + v_{d,y} \frac{\partial v_{d,z}}{\partial y} + v_{d,z} \frac{\partial v_{d,z}}{\partial z} + \frac{q_d}{m_d} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

Здесь $n_d, m_d, q_d = eZ_d$ – концентрация, масса и заряд пылевых частиц (Z_d – электрический заряд пылевой частицы, выраженный в количестве элементарных зарядов); $B = |\mathbf{B}|, -e$ – заряд электрона; $v_{d,x}, v_{d,y}, v_{d,z}$ – компоненты скорости пылевых частиц, Φ – самосогласованный электростатический потенциал плазмы.

Уравнение Пуассона имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 4\pi(en_e - q_d n_d), \quad (5)$$

где n_e – концентрация электронов.

На пространственно-временных масштабах, характерных для пылевых звуковых волн, электроны успевают подчиниться статистическому распределению. Поскольку пылевые частицы над освещенной поверхностью Луны в результате фотоэффекта могут приобретать положительный заряд, пылевые звуковые солитоны будут создавать положительный электростатический потенциал [16, 20], который будет представлять собой потенциальную яму для электронов. Электроны будут испытывать адиабатический захват в случае, когда выполнено следующее неравенство:

$$\tau_S \geq l_S / v_{Te}, \quad (6)$$

где τ_S, l_S – характерные соответственно временные и пространственные масштабы солитона, v_{Te} – тепловая скорость электронов над освещенной поверхностью Луны. Отметим, что $\tau_S \propto \omega_{pd}^{-1}$,

$\omega_{pd} = \sqrt{4\pi n_{e0} Z_d e^2 / m_d}$ – плазменная пылевая частота. Пространственный размер солитона l_S как правило составляет несколько радиусов Дебая

$\lambda_{De} = \sqrt{T_e / 4\pi n_{e0} e^2}$. Поэтому $l_S / v_{Te} \propto \omega_{pe}^{-1}$, где $\omega_{pe} = \sqrt{4\pi n_{e0} e^2 / m_e}$ – электронная плазменная частота (здесь m_e – масса электрона, n_{e0} – невозмущенная концентрация электронов, T_e – температура электронов). Следовательно, для пылевых звуковых солитонов неравенство (6) практически всегда выполняется. Поэтому при описании пылевых звуковых волн следует учитывать адиабатический захват электронов [28] потенциальной ямой, сформированной пылевым звуковым солитоном. В этом случае электроны описываются согласно распределению Гуревича

$$n_e(\Phi) = \left[\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{e\Phi/T_e}} e^{-u^2} du \right) \exp\left(\frac{e\Phi}{T_e}\right) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{e\Phi}{T_e}} \right]. \quad (7)$$

В безразмерных переменных $t \rightarrow \omega_{pd}^{-1} \tilde{t}; (x, y, z) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \lambda_{De}; (v_{d,x}, v_{d,y}, v_{d,z}) \rightarrow (\tilde{v}_{d,x}, \tilde{v}_{d,y}, \tilde{v}_{d,z}) C_{Sd}; \Phi \rightarrow T_e \tilde{\Phi} / e; n_d \rightarrow \tilde{n}_d \cdot n_{d0}$; где $\omega_{pd} = \sqrt{4\pi n_{e0} Z_d e^2 / m_d}$ – плазменная пылевая частота, $\lambda_{De} = \sqrt{T_e / 4\pi n_{e0} e^2}$ – электронный радиус Дебая, $C_{Sd} = \omega_{pd} \lambda_{De}$ – характерная скорость пылевых звуковых возмущений, n_{d0} – невозмущенная концентрация пылевых частиц; система уравнений принимает вид (здесь и далее над всеми безразмерными переменными знак “~” опускаем)

$$\frac{\partial n_d}{\partial t} + \frac{\partial n_d v_{d,x}}{\partial x} + \frac{\partial n_d v_{d,y}}{\partial y} + \frac{\partial n_d v_{d,z}}{\partial z} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial v_{d,x}}{\partial t} + v_{d,x} \frac{\partial v_{d,x}}{\partial x} + v_{d,y} \frac{\partial v_{d,x}}{\partial y} + v_{d,z} \frac{\partial v_{d,x}}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\omega_{Bd}}{\omega_{pd}} v_{d,y}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial v_{d,y}}{\partial t} + v_{d,x} \frac{\partial v_{d,y}}{\partial x} + v_{d,y} \frac{\partial v_{d,y}}{\partial y} + v_{d,z} \frac{\partial v_{d,y}}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\omega_{Bd}}{\omega_{pd}} v_{d,x}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial v_{d,z}}{\partial t} + v_{d,x} \frac{\partial v_{d,z}}{\partial x} + v_{d,y} \frac{\partial v_{d,z}}{\partial y} + v_{d,z} \frac{\partial v_{d,z}}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad (11)$$

где пылевая частота Лармора имеет вид $\omega_{Bd} = (q_d B) / (m_d c)$.

Уравнение Пуассона (6) в безразмерном виде (в предположении $\Phi \ll 1$) с точностью до $o(\Phi^3)$ имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 1 + \Phi - \frac{4}{3} \frac{\Phi^{3/2}}{\sqrt{\pi}} + \frac{\Phi^2}{2} - n_d. \quad (12)$$

3. МОДИФИЦИРОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ ЗАХАРОВА–КУЗНЕЦОВА

Система уравнений (1)–(7) или ее безразмерный аналог (8)–(12) используется для описания пылевых звуковых солитонов в условиях запыленной экзосферы над освещенной поверхностью Луны. В линейном приближении система уравнений (8)–(12) дает хорошо известный закон дисперсии (в безразмерном виде)

$$\mathbf{k}^2 + 1 = \frac{\mathbf{k}_{\parallel}^2}{\omega^2} + \frac{\mathbf{k}_{\perp}^2}{\omega^2 - \omega_{Be}^2}, \quad (13)$$

где \mathbf{k}_{\parallel} и \mathbf{k}_{\perp} – составляющие волнового вектора \mathbf{k} вдоль и поперек магнитного поля соответственно; $\omega_{Be} = \omega_{Bd}/\omega_{pd}$ – безразмерная пылевая частота Лармора.

Например, для длин волн, значительно превосходящих радиус Лармора, при малых углах между направлением распространения волны и магнитным полем закон дисперсии (13) принимает вид [27]

$$\omega(\mathbf{k}) = |\mathbf{k}_{\parallel}| \left[1 - \frac{|\mathbf{k}_{\parallel}|^2}{2} - \frac{(1 + \omega_{Be}^2) \mathbf{k}_{\perp}^2}{\omega_{Be}^2} \right] \quad (14)$$

или в размерном виде

$$\omega(\mathbf{k}) = C_{Sd} |\mathbf{k}_{\parallel}| \left[1 - \frac{|\mathbf{k}_{\parallel}|^2 \lambda_{De}^2}{2} \left(1 + \frac{\omega_{pd}^2 + \omega_{Bd}^2 \mathbf{k}_{\perp}^2}{\omega_{Bd}^2 \mathbf{k}_{\parallel}^2} \right) \right]. \quad (15)$$

Закону дисперсии (15) в координатном пространстве соответствует уравнение, имеющее вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Phi}{\partial t} + C_{Sd} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{C_{Sd} \lambda_{De}^2}{2} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^3} + \\ & + \frac{C_{Sd} \lambda_{De}^2}{2} \frac{\omega_{pd}^2 + \omega_{Bd}^2}{\omega_{Bd}^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Phi = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\Phi = e\phi/T_e$.

Уравнение (16) является уравнением линейного типа. Оно по форме совпадает с аналогичным уравнением для ионно-звуковых волн, полученным в [27] в случае обычной плазмы, когда электроны имеют бoльцмановский характер распределения. Учет более высоких порядков малости в системе уравнений (8)–(12) приводит к нелинейному уравнению. Однако нелинейное уравнение, полученное из системы уравнений (8)–(12), будет отличаться нелинейным слагаемым от аналогичного нелинейного уравнения для ионно-звуковых волн в обычной плазме. Для вывода нелинейного уравнения можно воспользоваться стандартным методом разложения по малому параметру ϵ [29, 30]. Используя метод асимптотического представления на основе классического

анализа размерностей, новые переменные можно представить в следующем виде:

$$\tau = \epsilon^{3/4} t, \quad (17)$$

$$\xi = \epsilon^{1/4} x, \quad (18)$$

$$\eta = \epsilon^{1/4} y, \quad (19)$$

$$\zeta = \epsilon^{1/4} z - M \epsilon^{3/4} t. \quad (20)$$

При этом разложения по малому параметру ϵ принимают вид

$$n_d = 1 + \epsilon n_1 + \epsilon^{3/2} n_2, \quad (21)$$

$$v_{d,x} = \epsilon^{5/4} v_{1d,x} + \epsilon^{3/2} v_{2d,x}, \quad (22)$$

$$v_{d,y} = \epsilon^{5/4} v_{1d,y} + \epsilon^{3/2} v_{2d,y}, \quad (23)$$

$$v_{d,z} = \epsilon v_{1d,z} + \epsilon^{3/2} v_{2d,z}, \quad (24)$$

$$\phi = \epsilon \phi_1 + \epsilon^{3/2} \phi_2. \quad (25)$$

Полученное таким образом нелинейное уравнение для пылевых звуковых возмущений у освещенной поверхности Луны с учетом влияния магнитного поля для длин волн, значительно превосходящих радиус Лармора, при малых углах между направлением распространения волны и магнитным полем, с заменой $\phi_1 \rightarrow \phi$ в размерном виде имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \phi}{\partial t} + C_{Sd} \sqrt{\frac{e\phi}{\pi T_e}} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{C_{Sd} \lambda_{De}^2}{2} \frac{\partial^3 \phi}{\partial z^3} + \\ & + \frac{C_{Sd} \lambda_{De}^2}{2} \frac{\omega_{pd}^2 + \omega_{Bd}^2}{\omega_{Bd}^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Уравнение (26) является модифицированным уравнением Захарова–Кузнецова (ср. с уравнением Захарова–Кузнецова [27], полученным для ионно-звуковых волн в обычной плазме, не содержащей пылевые частицы).

4. СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ И ИХ УСТОЙЧИВОСТЬ

Решение модифицированного уравнения Захарова–Кузнецова (26) будем искать в виде горизонтально распространяющихся пылевых звуковых волн на высотах h , значительно превосходящих радиус Дебая λ_{De} . Для этого перейдем в систему отсчета, в которой ось z' ориентирована в направлении распространения волнового пакета. Вводя угол ϑ между направлением z' и магнитным полем \mathbf{B} , развернем систему координат согласно замене

$$x' = x \cos \vartheta - z \sin \vartheta, \quad (27)$$

$$y' = y, \quad (28)$$

$$z' = x \sin \vartheta + z \cos \vartheta. \quad (29)$$

В новой системе координат уравнение (26) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \gamma_1 \sqrt{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial z'} + \gamma_2 \frac{\partial^3 \phi}{\partial z'^3} + \gamma_3 \sqrt{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x'} + \gamma_4 \frac{\partial^3 \phi}{\partial x'^3} + \\ + \gamma_5 \frac{\partial^3 \phi}{\partial x' \partial z'^2} + \gamma_6 \frac{\partial^3 \phi}{\partial z' \partial x'^2} + \gamma_7 \frac{\partial^3 \phi}{\partial z' \partial y'^2} + \\ + \gamma_8 \frac{\partial^3 \phi}{\partial x' \partial y'^2} = 0, \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$\gamma_1 = C_{Sd} \sqrt{\frac{e}{\pi T_e}} \cos \vartheta, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \gamma_2 = \frac{C_{Sd} \lambda_{De}^2}{2} \cos^3 \vartheta + \\ + \frac{C_{Sd} \lambda_{De}^2 \omega_{pd}^2 + \omega_{Bd}^2}{2 \omega_{Bd}^2} \cos \vartheta \sin^2 \vartheta, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\gamma_3 = -C_{Sd} \sqrt{\frac{e}{\pi T_e}} \sin \vartheta, \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \gamma_4 = -\frac{C_{Sd} \lambda_{De}^2}{2} \sin^3 \vartheta - \\ - \frac{C_{Sd} \lambda_{De}^2 \omega_{pd}^2 + \omega_{Bd}^2}{2 \omega_{Bd}^2} \sin \vartheta \cos^2 \vartheta, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \gamma_5 = -\frac{3C_{Sd} \lambda_{De}^2}{2} \cos^2 \vartheta \sin \vartheta + \\ + \frac{C_{Sd} \lambda_{De}^2 \omega_{pd}^2 + \omega_{Bd}^2}{2 \omega_{Bd}^2} (2 \cos^2 \vartheta \sin \vartheta - \sin^3 \vartheta), \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \gamma_6 = \frac{3C_{Sd} \lambda_{De}^2}{2} \cos \vartheta \sin^2 \vartheta - \\ - \frac{C_{Sd} \lambda_{De}^2 \omega_{pd}^2 + \omega_{Bd}^2}{2 \omega_{Bd}^2} (2 \cos \vartheta \sin^2 \vartheta - \cos^3 \vartheta), \end{aligned} \quad (36)$$

$$\gamma_7 = \frac{C_{Sd} \lambda_{De}^2 \omega_{pd}^2 + \omega_{Bd}^2}{2 \omega_{Bd}^2} \cos \vartheta, \quad (37)$$

$$\gamma_8 = \frac{C_{Sd} \lambda_{De}^2 \omega_{pd}^2 + \omega_{Bd}^2}{2 \omega_{Bd}^2} \sin \vartheta. \quad (38)$$

Уравнение (30) имеет решение в виде одномерных солитонов, распространяющихся вдоль оси z' со скоростью u_0 :

$$\phi_{Sol} = \left(\frac{15u_0}{8\gamma_1} \right)^2 \operatorname{ch}^{-4} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{u_0}{4\gamma_2}} (z' - u_0 t) \right]. \quad (39)$$

Амплитуда солитона (39) положительна, т.е. предположение, учитывающее адиабатический захват электронов потенциальной ямой, образованной пылевым звуковым солитоном, оправдано.

На рис. 2 приведены амплитуды ϕ_0 солитонных решений (39) в зависимости от высоты h над лунной поверхностью и скорости распространения солитона u_0 при $\vartheta = 1^\circ$ (рис. 2а), 3° (рис. 2б), 5° (рис. 2в). Все расчеты проведены для параметров запыленной экзосферы над лунной поверхностью, когда угол солнечного склонения $\theta = 82^\circ$. Соответствующие параметры приведены на рис. 1.

Для исследования устойчивости солитонных решений используется стандартный метод [27] линеаризации уравнения (30) относительно малых возмущений $\delta\phi(x', y', z', t)$ точного решения (39). Здесь $\tilde{z}' = z' - u_0 t$, $\delta\phi = \phi_{Sol}$. Подстановка в (31) выражения $\phi = \phi_{Sol} + \delta\phi(x', y', \tilde{z}', t)$ приводит к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta\phi}{\partial t} - u_0 \frac{\partial \delta\phi}{\partial \tilde{z}'} + \gamma_1 \sqrt{\phi_{Sol}} \frac{\partial \sqrt{\phi_{Sol}} \delta\phi}{\partial \tilde{z}'} + \gamma_2 \frac{\partial^3 \delta\phi}{\partial \tilde{z}'^3} + \\ + \gamma_3 \sqrt{\phi_{Sol}} \frac{\partial \delta\phi}{\partial x'} + \gamma_4 \frac{\partial^3 \delta\phi}{\partial x'^3} + \gamma_5 \frac{\partial^3 \delta\phi}{\partial x' \partial \tilde{z}'^2} + \end{aligned} \quad (40)$$

$$+ \gamma_6 \frac{\partial^3 \delta\phi}{\partial \tilde{z}' \partial x'^2} + \gamma_7 \frac{\partial^3 \delta\phi}{\partial \tilde{z}' \partial y'^2} + \gamma_8 \frac{\partial^3 \delta\phi}{\partial x' \partial y'^2} = 0$$

Отметим, что при выводе уравнения (40) используется условие малости возмущения $\delta\phi \ll \phi_{Sol}$. При этом, вообще говоря, должно выполняться неравенство $\delta\phi + \phi_{Sol} > 0$. Выполнение этого неравенства может быть достигнуто выбором величины $\delta\phi$, например в виде $\delta\phi = \sigma\phi_{Sol}$, где $0 < \sigma \ll 1$. Такое рассмотрение позволяет исследование устойчивости солитонного решения в окрестности любой точки из области определения солитона.

Ищем решение в виде

$$\begin{aligned} \delta\phi(x', y', \tilde{z}', t) = \\ = \psi(\tilde{z}') \exp[ik(l_x x' + l_y y' + l_z \tilde{z}') - i\omega t], \end{aligned} \quad (41)$$

где (l_x, l_y, l_z) – направляющие косинусы волнового вектора \mathbf{k} . Для малых \mathbf{k} справедливо следующее разложение:

$$\psi(\tilde{z}') \approx \psi_0 + k\psi_1 + k^2\psi_2 + \dots \quad (42)$$

$$\omega \approx k\omega_1 + k^2\omega_2 + \dots \quad (43)$$

Подставляя выражение (41) с учетом разложения (42) и (43) в уравнение (40) и приравнявая

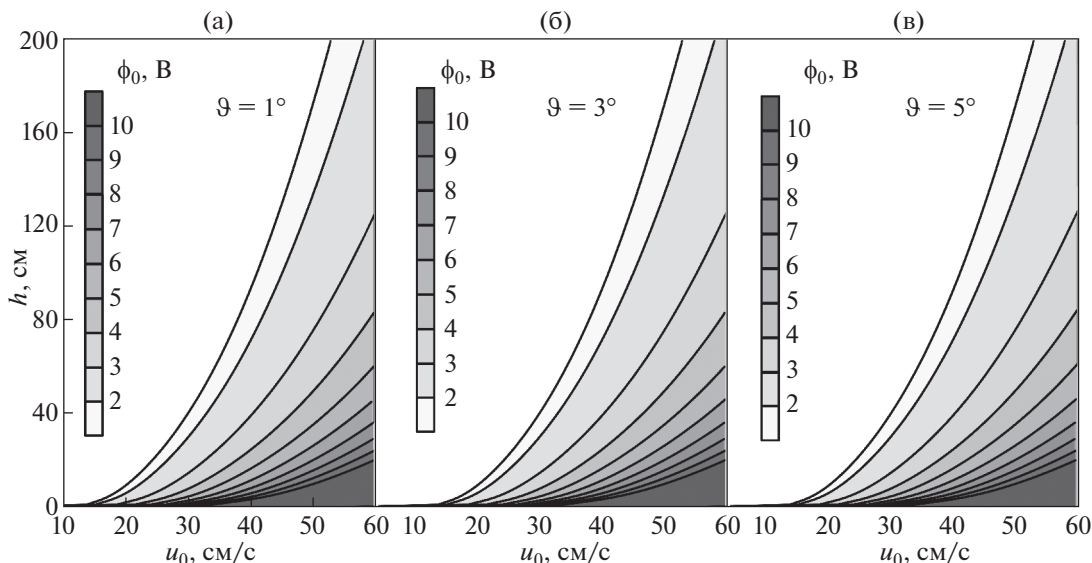


Рис. 2. Амплитуды солитонных решений в зависимости от высоты h над лунной поверхностью и скорости распространения солитона u_0 при $\vartheta = 1^\circ$ (а), 3° (б), 5° (в).

члены одного порядка малости, получаем цепочку уравнений

$$-u_0 \frac{\partial \Psi_0}{\partial \bar{z}'} + \gamma_1 \frac{\partial \sqrt{\Phi_{Sol}} \Psi_0}{\partial \bar{z}'} + \gamma_2 \frac{\partial^3 \Psi_0}{\partial \bar{z}'^3} = 0 \quad (44)$$

$$\begin{aligned} & -u_0 \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}'} + \gamma_1 \frac{\partial \sqrt{\Phi_{Sol}} \Psi_1}{\partial \bar{z}'} + \gamma_2 \frac{\partial^3 \Psi_1}{\partial \bar{z}'^3} = \\ & = i(\omega_1 + u_0 l_{\bar{z}}) \Psi_0 - i v_1 \sqrt{\Phi_{Sol}} \Psi_0 - i v_2 \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial \bar{z}'^2} \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} & -u_0 \frac{\partial \Psi_2}{\partial \bar{z}'} + \gamma_1 \frac{\partial \Phi_{Sol} \Psi_2}{\partial \bar{z}'} + \gamma_2 \frac{\partial^3 \Psi_2}{\partial \bar{z}'^3} = i \omega_2 \Psi_0 + \\ & + i(\omega_1 + u_0 l_{\bar{z}} - v_1 \sqrt{\Phi_{Sol}}) \Psi_1 + v_3 \frac{\partial \Psi_0}{\partial \bar{z}'} - i v_2 \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \bar{z}'^2}, \end{aligned} \quad (46)$$

где $v_1 = \gamma_1 l_{\bar{z}'} + \gamma_3 l_{x'}$, $v_2 = 3\gamma_2 l_{\bar{z}'} + \gamma_5 l_{x'}$, $v_3 = 3\gamma_2 l_{\bar{z}'}^2 + 2\gamma_5 l_{x'} l_{\bar{z}'} + \gamma_6 l_{x'}^2 + \gamma_7 l_{y'}^2$.

Уравнение (44) имеет решение вида

$$\Psi_0 = C_1 \frac{\partial \Phi_{Sol}}{\partial \bar{z}'}, \quad (47)$$

где C_1 – некоторая произвольная константа. Подставляя (47) в (45) находим решение для Ψ_1

$$\begin{aligned} \Psi_1 = & C_2 \frac{\partial \Phi_{Sol}}{\partial \bar{z}'} + \\ & + \frac{i C_1 \gamma_2}{2 u_0 \beta} \left[(a + b) \bar{z}' C_1 \frac{\partial \Phi_{Sol}}{\partial \bar{z}'} + \frac{4}{5} (5a + b) \Phi_{Sol} \right], \end{aligned} \quad (48)$$

где C_2 – некоторая произвольная константа, а также

$$a = \omega_1 + u_0 l_{\bar{z}'} - \frac{5 v_1 u_0}{4 \gamma_1} + \frac{v_2 u_0}{4 \gamma_2}, \quad (49)$$

$$b = \frac{5 v_1 u_0}{4 \gamma_1} - \frac{5 v_2 u_0}{4 \gamma_2}. \quad (50)$$

Решение уравнения (46) существует, если правая часть этого уравнения ортогональна ядру оператора, сопряженного к оператору

$$-u_0 \frac{\partial}{\partial \bar{z}'} + \gamma_1 \frac{\partial \sqrt{\Phi_{Sol}}}{\partial \bar{z}'} + \gamma_2 \frac{\partial^3}{\partial \bar{z}'^3} \quad (51)$$

Таким образом, поскольку Φ_{Sol} – решение для оператора (51), условие существования решения уравнения (46) имеет вид

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{Sol} \left[i \omega_2 \Psi_0 + i(\omega_1 + u_0 l_{\bar{z}'} - v_1 \sqrt{\Phi_{Sol}}) \Psi_1 + \right. \\ & \left. + v_3 \frac{\partial \Psi_0}{\partial \bar{z}'} - i v_2 \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \bar{z}'^2} \right] d\bar{z}' = 0 \end{aligned} \quad (52)$$

С учетом выражений (47) и (48) выражение (52) легко интегрируется и приводит к закону дисперсии

$$\omega_1 = \Omega - u_0 l_{\bar{z}'} + \sqrt{\Omega^2 - \Lambda}, \quad (53)$$

где

$$\Omega = \frac{16}{25} \left(\sqrt{\Phi_0} v_1 - \frac{3 v_2 u_0}{16 \gamma_2} \right), \quad (54)$$

$$\Lambda = \frac{512}{945} \left(\left(\frac{15u_0}{8\gamma_1} \right)^2 v_1^2 - \frac{75u_0^2 v_1 v_2}{128\gamma_1 \gamma_2} - \frac{15}{512} \frac{v_2^2 u_0^2}{\gamma_2^2} + \frac{15u_0^2 v_3}{128\gamma_2} \right). \quad (55)$$

Из (53) видно, что в случае $\Lambda < \Omega^2$ закон дисперсии вещественен и решение устойчиво. Неустойчивость возникает при $\Lambda > \Omega^2$. Анализ уравнения (53) приводит к пороговому значению $\omega_{Be, th}^2$ для развития неустойчивости:

$$\omega_{Be, th}^2 = \frac{1 + \frac{l_{x'}^2}{l_{y'}^2} \left(1 - \frac{9}{7} \operatorname{tg}^2 \vartheta \right)}{\sin^2 \vartheta - \frac{9}{7} \frac{l_{x'}^2}{l_{y'}^2} \operatorname{tg}^2 \vartheta} \quad (56)$$

с инкрементом неустойчивости

$$\Gamma = \frac{2}{\sqrt{63}} \frac{u_0 \sqrt{(1 + \omega_{Be}^2)} P}{\sin^2 \vartheta + \omega_{Be}^2}, \quad (57)$$

где

$$P = \left[1 + \frac{l_{x'}^2}{l_{y'}^2} \left(1 - \frac{9}{7} \operatorname{tg}^2 \vartheta \right) \right] \omega_{Be}^2 + \sin^2 \vartheta - \frac{9}{7} \frac{l_{x'}^2}{l_{y'}^2} \operatorname{tg}^2 \vartheta. \quad (58)$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, получено нелинейное уравнение, описывающее динамику нелинейных волновых структур в пылевой плазме над освещенной частью Луны в случае низких частот и блинообразной формы волнового пакета, вдоль внешнего магнитного поля. Данное уравнение является модифицированным уравнением Захарова–Кузнецова. Полученное уравнение отличается от обычного уравнения Захарова–Кузнецова тем, что в его нелинейном слагаемом содержится множитель $\sqrt{\phi}$ тогда как в аналогичном слагаемом обычного уравнения в качестве множителя содержится ϕ в первой степени. Найдена аналитическая формула для одномерного солитонного решения. Данное решение отличается от хорошо известных одномерных солитонных решений уравнений Кортевега–де Фриза и Захарова–Кузнецова. Проведен анализ устойчивости одномерного солитонного решения, который показывает, что данное решение устойчиво.

Неаналитичность нелинейного слагаемого затрудняет поиск двумерных решений модифицированного уравнения Захарова–Кузнецова, которые возможно получить аналитически в случае обычного уравнения. В этой связи, для двумерно-

го анализа решений модифицированного уравнения Захарова–Кузнецова, по-видимому, следует использовать численные методы, что является задачей будущих исследований. Что касается возможных применений рассмотренных солитонов, как и в случае, описанном в работе [14], интерес представляют так называемые переходные лунные явления.

Один из авторов (А.И. Кассем) благодарен Министерству Высшего образования Египта за поддержку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зеленый Л.М., Попель С.И., Захаров А.В. // Физика плазмы. 2020. Т. 46. С. 441.
2. Li D., Wang Y., Zhang H., Wang X., Wang Y., Sun Z., Zhuang J., Li C., Chen L., Zhang H., Zou X., Zong C., Lin H., Ma J., Li X., Cui X., Yao R., Wang X., Gao X., Yang Sh., Wang X., Zhang B. // Geophys. Res. Lett. 2020. V. 47. P. e2020GL089433.
3. Голубь А.П., Попель С.И. // Астрон. вестн. 2021. Т. 55. С. 393.
4. Horányi M., Sternovsky Z., Lankton M., Dumont C., Gagnard S., Gathright D., Grün E., Hansen D., James D., Kempf S., Lamprecht B., Srnata R., Szalay J.R., Wright G. // Space Sci. Rev. 2014. V. 185. P. 93.
5. Popel S.I., Golub' A.P., Zelenyi L.M., Dubinskii A.Yu. // Planet. Space Sci. 2018. V. 156. P. 71.
6. Захаров А.В., Зеленый Л.М., Попель С.И. // Астрон. вестн. 2020. Т. 54. С. 483.
7. Walbridge E. // J. Geophys. Res. 1973. V. 78. P. 3668.
8. Colwell J.E., Batiste S., Horányi M., Robertson S., Sture S. // Rev. Geophys. 2007. V. 45. P. RG2006.
9. Попель С.И., Копнин С.И., Голубь А.П., Дольников Г.Г., Захаров А.В., Зеленый Л.М., Извекова Ю.Н. // Астрон. вестн. 2013. Т. 47. С. 455.
10. Popel S.I., Zelenyi L.M., Atamaniuk B. // Phys. Plasmas. 2015. V. 22. P. 123701.
11. Popel S.I., Yu M.Y. // Contrib. Plasma Phys. 1995. V. 35. P. 103.
12. Лосева Т.В., Попель С.И., Голубь А.П. // Физика плазмы. 2012. Т. 38. С. 792.
13. Копнин С.И., Попель С.И. // Письма в ЖТФ. 2019. Т. 45. С. 26.
14. Кассем А.И., Копнин С.И., Попель С.И., Зеленый Л.М. // Физика плазмы. 2022. Т. 48. С. 345.
15. Popel S.I., Morfill G.E., Shukla P.K., Thomas H. // J. Plasma Phys. 2013. V. 79. P. 1071.
16. Морозова Т.И., Копнин С.И., Попель С.И. // Физика плазмы. 2015. Т. 41. С. 867.
17. Попель С.И., Морозова Т.И. // Физика плазмы. 2017. Т. 43. С. 474.
18. Izvekova Yu.N., Morozova T.I., Popel S.I. // IEEE Transact. Plasma Science. 2018. V. 46. P. 731.
19. Popel S.I., Kasset A.I., Izvekova Yu.N., Zelenyi L.M. // Phys. Lett. A. 2020. V. 384. P. 126627.
20. Копнин С.И., Попель С.И. // Письма в ЖТФ. 2021. Т. 47. С. 29.

21. *Hones Jr. E.W.* // Aust. J. Phys. 1985. V. 38. P. 981.
22. *Harada Y.* Interactions of Earth's Magnetotail Plasma with the Surface, Plasma, and Magnetic Anomalies of the Moon, Springer, Japan, 2015.
23. *Dyal P., Parkin C.W., Daily W.D.* // Rev. Geophys. 1974. V. 12. P. 568.
24. *Coleman Jr. P.J., Schubert G., Russell C.T., Sharp L.R.* // Moon. 1972. V. 4. P. 419
25. *Popel S.I., Golub' A.P., Kassem A.I., Zelenyi L.M.* // Phys. Plasmas. 2022. V. 29. P. 013701.
26. *Попель С.И., Голубь А.П., Кассем А.И., Зеленый Л.М.* // Физика плазмы. 2022. Т. 48. С. 451.
27. *Петвиашвили В.И., Похотелов О.А.* Уединенные волны в плазме и атмосфере. М.: Энергоатомиздат, 1989
28. *Лившиц Л.Д., Потаевский Л.П.* Теоретическая физика. Т. 10. Физическая кинетика. М.: Физматлит, 2002. С. 182.
29. *Зейтунян Р.Х.* // УФН. 1995. Т. 165. С. 1403.
30. *Рыскин Н.М., Трубецков Д.И.* Нелинейные волны. М.: URSS, 2021. С. 180.