

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН С ПЛАЗМОЙ

УДК 533.9

ВОЗМУЩЕННАЯ ИОННО-ЗВУКОВЫМИ СОЛИТОНАМИ ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПО СКОРОСТЯМ ИОНОВ ПЛАЗМЫ: АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ НА БАЗЕ КДВ-УРАВНЕНИЯ

© 2023 г. Ф. М. Трухачев^{a,b,c,*}, Н. В. Герасименко^c, М. М. Васильев^{a,b}, О. Ф. Петров^{a,b}

^a Объединенный институт высоких температур РАН, Москва, Россия

^b Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия

^c Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь

*e-mail: ftru@mail.ru

Поступила в редакцию 22.06.2023 г.

После доработки 02.08.2023 г.

Принята к публикации 02.08.2023 г.

С использованием уравнения Кортевега и Де Вриза выполнен расчет функций распределения фоновой плазмы, возмущенных ионно-звуковыми солитонами. Получена явная формула для описания возмущенных функций распределения, пригодная для практических применений. Проведено сравнение результатов с ранее полученными аналитическими расчетами и результатами моделирования.

Ключевые слова: плазма, ионно-звуковой солитон, функция распределения ионов по скоростям

DOI: 10.31857/S0367292123600784, **EDN:** ALPZSH

1. ВВЕДЕНИЕ

Солитоном называют уединенную волну, существующую благодаря балансу нелинейности и дисперсии среды [1]. Открытием солитона можно считать наблюдения уединенной волны на поверхности водного канала в Глазго в 1838 г. Скоттом Расселом, которые он описал в своих знаменитых работах [2, 3]. Математическое описание явления впервые появилось в работах Буссинеска в 1871 г. [4, 5]. В 1895 г. Кортевег и Де Вриз [6] опубликовали вывод знаменитого нелинейного волнового уравнения, названного впоследствии в их честь уравнением КДВ. Последующие исследования показали, что уравнение КДВ является универсальным и описывает нелинейные волновые явления в плазме [7–12], в нелинейных линиях электропередач [13–16], и в других явлениях (см., например, [17]). Впоследствии теория солитонов была дополнена такими инструментами как уравнение синус-Гордона [18], уравнение Кадомцева–Петвиашвили [19], нелинейное уравнение Шредингера [20], метод псевдопотенциала Сагдеева [21]. Стоит отметить, что свойства солитонов не изучены исчерпывающим образом, несмотря на огромное количество научных работ и почти двухвековую историю исследований.

Наша работа посвящена исследованию влияния ионно-звуковых (ИЗ) солитонов на функции распределения по скоростям заряженных частиц

фоновой плазмы. Проблема влияния плазменных волн на функции распределения имеет как фундаментальное, так и прикладное значения [22–25]. Для ИЗ-солитонов подобная задача решалась в работах [26–28]. Было показано, что ИЗ-солитоны выводят плазму из равновесного состояния. В частности, в областях, занятых ИЗ-солитонами, ионная функция распределения по скоростям принимает форму сходную с функцией распределения плазмы, которая содержит ионный пучок “beam-like”. Это означает, что изначально равновесная (максвелловская) функция распределения приобретает дополнительный максимум в области положительных скоростей (при движении солитона в положительном направлении в одномерной декартовой системе координат). После прохождения солитонов плазма снова становится равновесной. В работе [26] использовались уравнения Власова, в то время как в работах [27, 28] – гидродинамические уравнения. В рамках уравнений Власова [26] получено аналитическое выражение для ионной функции распределения по скоростям, возмущенной ИЗ-солитонами в приближении малых амплитуд. В работе [27], с использованием гидродинамической модели проведено моделирование движения большого ансамбля ионов под воздействием ИЗ-солитона произвольной амплитуды. Наконец, в работе [28], с использованием эргодической гипотезы проведен анализ движения одного иона за боль-

шой промежуток времени и выведена точная аналитическая формула, описывающая возмущенную ионную функцию распределения по скоростям для случая произвольных амплитуд. Однако, полученная в [28] формула, в общем случае, требует привлечения численного интегрирования (например, методом Рунге–Кутты), что ограничивает ее применение. Для случая малых амплитуд удалось получить явную формулу, путем разложения в ряд функции псевдопотенциала Сагдеева. Каждый из рассмотренных методов имеет свои ограничения. Численное моделирование [27] охватывает весь возможный диапазон скоростей ИЗ-солитона (для чисел Маха от 1 до ≈ 1.6) и его амплитуд потенциала Φ_0 (от 0 до ≈ 1.25 в использованных нормировках). Результаты численного моделирования, хотя и являются наглядными, обладают низкой универсальностью. Кроме того, их сложно использовать для формального анализа. Аналитические формулы для функции распределения, представленные в [26, 28], лишены указанных недостатков, однако их применение ограничено случаем амплитуд $\Phi_0 \ll 1$, что явно недостаточно с практической точки зрения.

В представленной работе мы получили явную формулу для возмущенной ионной функции распределения с использованием теоретической модели [28]. Вместо разложения псевдопотенциала Сагдеева, мы использовали уравнения КДВ. Уравнение КДВ также является приближенным, однако, как показало сравнение с уже известными результатами, оно значительно точнее описывает исследуемую проблему, что расширяет прикладное значение проведенных исследований.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

По аналогии с работами [27, 28] будем использовать классическую одномерную гидродинамическую модель плазмы с холодными ионами $T_i = 0$ и горячими равновесными электронами. Уравнения движения непрерывности для ионов, уравнение Больцмана для электронов, а также уравнение Пуассона можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial X} = -\frac{\partial \Phi}{\partial X}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} + \frac{\partial N_i v_i}{\partial X} = 0, \quad (2)$$

$$N_e = \exp(\Phi), \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} = N_e - N_i, \quad (4)$$

где N_e , N_i – соответственно электронная и ионная концентрации, нормированные на невозмущенную концентрацию n_0 ; v_i – ионная скорость, нор-

мированная на скорость ионного звука $C_s = \sqrt{T_e/m_i}$, T_e – температура электронной популяции, m_i – масса иона; $\Phi = e\phi/T_e$ – нормированный потенциал волны, e – элементарный заряд, ϕ – размерный электростатический потенциал, связанный с электрическим полем волны выражением $\vec{E} = -\nabla\phi$. Время t нормировано на величину ω_i^{-1} , где $\omega_i = \sqrt{4\pi n_0 e^2/m_i}$ – ионная плазменная частота, в то время как пространственная координата X нормирована на радиус Дебая $\lambda_D = \sqrt{T_e/4\pi e^2 n_0}$. Выбранные нормировки соответствуют работам [27, 28]. Это сделано для того чтобы можно было провести сравнение результатов. Солитонные решения системы (1)–(4) можно найти несколькими способами. Рассмотрим некоторые из них.

Метод 1 – уравнение КДВ: В предположении малых амплитуд, систему (1)–(4) можно свести к известному уравнению КДВ [7]:

$$\frac{\partial v_i}{\partial \eta} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial \zeta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 v_i}{\partial \zeta^3} = 0, \quad (5)$$

где $\eta = \epsilon^{3/2} X$, $\zeta = \epsilon^2 (X - t)$ – растянутые координаты (stretched coordinates) (см. [7, 8]). Уравнение (5) записано для скорости ионов v_i , как и в оригинальной статье [7]. Однако, как показано в [7, 8], в таком же виде его можно записать для всех переменных N_e , N_i , Φ . Солитонное решение уравнения (5) для потенциала можно записать в виде:

$$\Phi(x, t) = \Phi_{\max} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{X - Mt}{\Delta} \right), \quad (6)$$

где $\Phi_{\max} = 3(M - 1)$, $\Delta = \sqrt{6/\Phi_{\max}}$ – амплитуда и ширина солитона; $M = V/C_s$ – число Маха; V – скорость солитона в неподвижной системе координат.

Метод 2 – метод псевдопотенциала Сагдеева: В стационарном случае, полагая, что солитон прошел все стадии эволюции систему (1)–(4) можно свести к единственному уравнению Пуассона [21]:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} = e^\Phi - N_i(\Phi), \quad (7)$$

где $\xi = X - Mt$ – новая переменная, соответствующая системе координат, движущейся с волной, при этом $\partial/\partial X = \partial/\partial \xi$ и $\partial/\partial t = -V\partial/\partial \xi$; $N_i(\Phi) = M/\sqrt{M^2 - 2\Phi}$ – нормированная ионная концентрация для стационарного случая. Однократное интегрирование (7) по Φ с учетом граничных

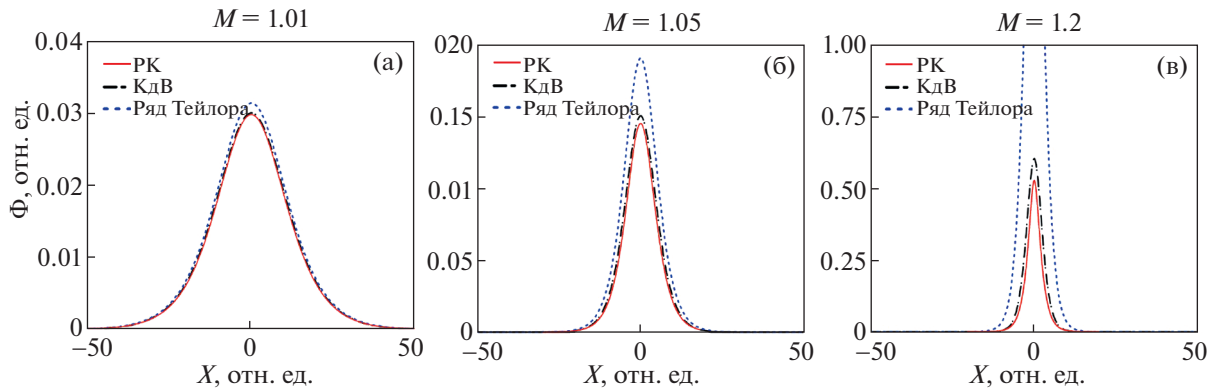


Рис. 1. Профили ИЗ-солитона, полученные различными методами при разных значениях числа Маха: “РК” – численное моделирование методом Рунге–Кутты; “КДВ” – анализ с использованием уравнения Кортевега–Де Вриза; “Ряд Тейлора” – анализ с использованием разложения в ряд функции псевдопотенциала Сагдеева.

условий $d\Phi/d\xi = 0$ при $\Phi = 0$ дает следующее выражение для псевдопотенциала Сагдеева, $U(\Phi)$ [21]:

$$-U(\Phi) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)^2, \quad (8)$$

где

$$U(\Phi) = [1 - e^\Phi] - M \left(\sqrt{M^2 - 2\Phi} - M \right). \quad (9)$$

Уравнения (7), (8) описывают солитоны произвольной амплитуды, однако, в общем случае требуют численного интегрирования, которое можно выполнить, например, в рамках метода Рунге–Кутты 4 порядка. Численные солитонные решения примем за эталон точности.

Метод 3 – разложения псевдопотенциала в ряд: Как показано в [21, 29], путем разложения в ряд Тейлора функцию $U(\Phi)$ можно получить аналитическое решение уравнения (8) в виде:

$$\Phi(X, t) = -A_2/A_3 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{X - Mt}{\sqrt{-2/A_2}} \right), \quad (10)$$

где $A_2 = 0.5(M^2 - 1)$, $A_3 = 0.5(M^4 - 1/3)$, коэффициенты разложения в ряд $U(\Phi) \approx A_2\Phi^2 + A_3\Phi^3$. Формула (10) справедлива для солитонов малой амплитуды.

Выражения (6) и (10) имеют сходную структуру, однако, отличаются коэффициентами. Все три метода асимптотически совпадают в пределе малых амплитуд. Профили ИЗ-солитона найденные в рамках трех методов представлены на рис. 1.

Как видно из рис. 1, с ростом скорости солитона (числа Маха) растет его амплитуда Φ_{\max} и уменьшается ширина Δ . Как указывалось выше, в рамках рассмотренной модели, ИЗ-солитоны могут существовать в диапазоне скоростей чисел Маха от 1 до 1.6 [21, 27, 28]. При этом уравнение

КДВ лучше описывает солитоны средних амплитуд $\Phi_{\max} \approx 0.5$ по сравнению с методом разложения псевдопотенциала (рис. 1(с)). Действительно, как указано в работах [28, 29], метод разложения псевдопотенциала справедлив только для амплитуд $\Phi_{\max} < 0.2$.

Зная профили ИЗ-солитона $\Phi(X)$ можно перейти к анализу возмущенной функции распределения. В работе [29], возмущенная солитоном ионная функция распределения по проекциям скоростей $f(v_i)$, была получена на основе формулы (10). Мы получим аналитическое выражение для $f(v_i)$ на основе решения (6) для уравнения КДВ. В силу указанных выше обстоятельств, мы ожидаем, что новая формула будет точнее, чем та, что представлена в работе [28] и подойдет для описания ситуаций, включающих солитоны средних амплитуд.

3. ВОЗМУЩЕННАЯ СОЛИТОНОМ ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПО СКОРОСТЯМ ДЛЯ ФОНОВЫХ ИОНОВ

Как известно, слева и справа от классического солитона параметры плазмы идентичны. При этом, по мере удаления от центра солитона состояние плазмы быстро (экспоненциально) возвращается к невозмущенному. Это означает, что плазму можно считать равновесной (а функцию распределения ионов максвелловской) везде кроме некоторой окрестности солитона. Отметим, что для холодной плазмы максвелловское распределение по проекциям скоростей вырождается в Дельта-функцию. Мы вслед за [28] рассмотрим возмущение ионной функции распределения в области плазмы, в центре которой расположен солитон. Стоит отметить, что с практической точки зрения, достаточно чтобы солитон полностью попадал в исследуемую область плазмы, однако,

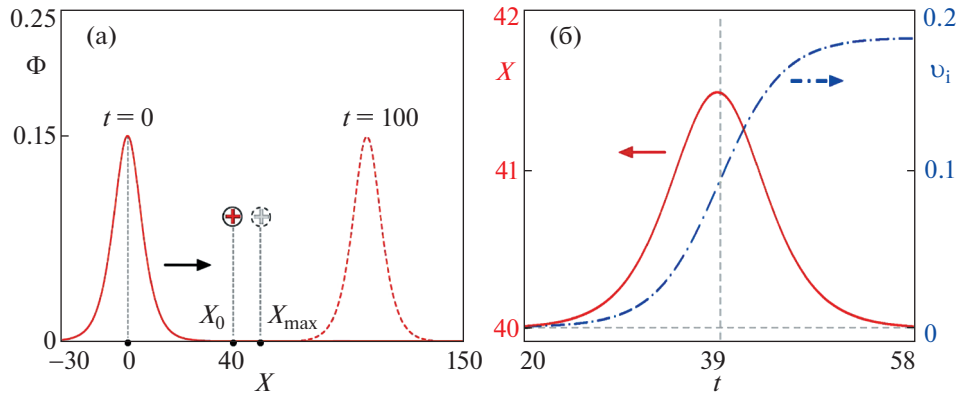


Рис. 2. а) – Схематическое изображение взаимодействия пробного иона с ИЗ-солитоном; б) – траектория пробного иона $X(t)$ и профиль его скорости $v_i(t)$ при его взаимодействии с ИЗ-солитоном.

теоретический анализ проще выполнить для случая центральной симметрии.

Будем считать, что плазма в рассматриваемой модели является эргодичной. В таком случае, ее статистические свойства можно определить либо из анализа движения большого ансамбля частиц, либо из анализа движения одной частицы за большой промежуток времени. Такое же предположение было сделано в работе [28], где результаты, полученные усреднением по ансамблю и по времени полностью совпали, что можно считать разумным обоснованием применимости эргодической гипотезы (строгое доказательство эргодичности рассматриваемой системы довольно громоздко и выходит за рамки этой статьи). По аналогии с работой [28], ограничимся поиском функции распределения для ионной фракции плазмы. При этом электронная фракция плазмы считается равновесной (см. уравнение (3)). В нашем исследовании будем рассчитывать функцию распределения по скоростям усреднением по времени для движения одного пробного иона, взаимодействующего с ИЗ-солитоном. Решаемая задача схематично изображена на рис. 2а: ИЗ-солитон при движении слева направо взаимодействует с одним из ионов фона в течение некоторого времени. После прохождения солитона ион смещается вперед на несколько радиусов Дебая [29]. Ионную функцию распределения по проекциям скоростей можно описать формулой [28]:

$$f(v_i) = \frac{\Delta t}{T|\Delta v_i|}, \quad (11)$$

где Δt – время, в течение которого выбранный ион имеет скорость в диапазоне от v_i до $v_i + \Delta v_i$, T – общее время наблюдения, которое с практической точки зрения соответствует временному разрешению приборов. В работе [28] использовались несколько разных формул для $f(v_i)$, здесь

мы выбрали актуальный для нас вариант. Для использования формулы (11) нам необходимо знать параметры движения выбранного иона, а именно, зависимость $v_i(t)$. Для ее получения можно воспользоваться уравнением движения (вторым законом Ньютона) для выбранного иона в электрическом поле ИЗ-солитона в форме $m_i \ddot{a}_i = e\vec{E}$ [27]. С учетом нормировок уравнение движения для движущейся системы координат можно переписать в виде:

$$\ddot{\xi} = -\frac{\partial \Phi(\xi)}{\partial \xi}. \quad (12)$$

Уравнение (12) справедливо и для неподвижной системы координат после подстановок $\xi = X - Mt$; $\partial/\partial X = \partial/\partial \xi$.

$$\ddot{X} = -\frac{\partial \Phi(X, t)}{\partial X}. \quad (13)$$

В уравнениях (12), (13) можно использовать профиль потенциала ИЗ-солитона $\Phi(\xi)$ (или $\Phi(X, t)$), найденный любым из описанных выше способов. В общем случае, уравнения (12), (13) требуют численного решения, поскольку профили $\Phi(\xi)$, $\Phi(X, t)$ для случая произвольных амплитуд не найдены в явном виде. На рис. 2(б) представлены зависимости $X(t)$ и $v_i(t)$ для пробного иона под воздействием ИЗ солитона в неподвижной системе координат (уравнение (13)). В нашем примере, профиль $\Phi(X, t)$ найден из численного решения (7) при $M = 1.05$ (см. рис. 1б), сплошная кривая). Задача решена со следующими начальными условиями: $X(0) = 40$, $v_i(0) = 0$. В рассматриваемом случае, ион достигает максимальной скорости при $t = 39$. Параметры моделирования соответствуют тем, что представлены на рис. 4 в работе [28]. Так сделано с целью сравнения результатов разных методов анализа.

Для конкретного вида зависимости $v_i(t)$, в пределе $\Delta t \rightarrow 0$ формулу (11) можно записать в дифференциальном виде:

$$f(v_i) = \frac{2dt}{T|dv_i|}. \quad (14)$$

Множитель “2” соответствует случаю центральной симметрии. Детальный вывод формулы (14) можно найти в работе [28]. Формула (14) исчерпывающим образом описывает возмущенную функцию распределения для солитонов произвольной амплитуды, однако, в общем случае, требует привлечения численных методов, поскольку зависимость $v_i(t)$, в общем случае, определяется численно (рис. 2(б)). Для случая малых амплитуд задача была решена в [28] с использованием метода разложения псевдопотенциала Сагдеева. А именно, было использовано выражение (10) в уравнении (12).

Как было показано выше, выражение (6) значительно точнее описывает профиль потенциала ИЗ-солитона, по сравнению с (10). Найдем аналитическое представление $f(v_i)$ с использованием выражения (6). Для этого можно следовать рассуждением [28]. Но мы воспользуемся свойством консервативности электростатического поля солитона в движущейся системе координат. При этом следует учитывать сдвиг функции распределения на $-M$ по оси абсцисс, поскольку $v'_i = v_i - M$, где v'_i – скорость иона в движущейся системе координат. В движущейся системе координат все ионы фона движутся справа налево. Из консервативности электростатического поля следует сохранение механической энергии. Невозмущенная скорость ионов $v'_i = -M$, в то время как в окрестности солитона ионную скорость, в соответствии с законом сохранения энергии, можно выразить в виде:

$$v'_i = -\sqrt{M^2 - 2\Phi}. \quad (15)$$

Отметим, что в работе [28] это же выражение получено интегрированием уравнения (12). Перейдем теперь к поиску явного вида функции $f(v_i)$ с учетом (14). Началом отсчета будем считать момент, когда пробный ион находится в центре солитона. Тогда начальные условия можно описать следующим образом:

$$\xi(0) = 0; \quad v'_i(0) = -\sqrt{M^2 - 2\Phi_{\max}}. \quad (16)$$

Подставляя (6) в (15) получим уравнение, описывающее скорость выбранного иона в виде:

$$\frac{d\xi}{dt} = v'_i(\xi) = -\sqrt{M^2 - 2\Phi_{\max} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\xi}{\Delta}\right)}. \quad (17)$$

Далее нам понадобится функция $t(v'_i)$. Из уравнения (17) выразим обратную функцию $\xi(v'_i)$, с учетом начальных условий (16) имеем:

$$\xi(v'_i) = -\Delta \cdot \operatorname{arch}\left(\sqrt{\frac{2\Phi_{\max}}{M^2 - v'^2_i}}\right). \quad (18)$$

В соответствии с начальными условиями нас будет интересовать ветвь функции, которая расположена в 3-й четверти прямоугольной системы координат на плоскости (ξ, v'_i) . Далее, учитывая, что $\frac{dt}{dv'_i} = \frac{dt}{d\xi} \frac{d\xi}{dv'_i} = \frac{1}{v'_i} \frac{d\xi}{dv'_i}$ можно получить выражение:

$$\frac{dt}{dv'_i} = \frac{2\sqrt{3}}{(M^2 - v'^2_i)\sqrt{6(M-1) - (M^2 - v'^2_i)}}. \quad (19)$$

С учетом (14) получим выражение для функции распределения в движущейся системе координат:

$$f(v'_i) = \frac{4\sqrt{3}}{T(M^2 - v'^2_i)\sqrt{6(M-1) - (M^2 - v'^2_i)}}. \quad (20)$$

Для перехода в неподвижную систему координат необходимо выполнить подстановку $v'_i = v_i - M$, в результате можно окончательно получить:

$$f(v_i) = \frac{4\sqrt{3}}{Tv_i(2M - v_i)\sqrt{6(M-1) - v_i(2M - v_i)}}. \quad (21)$$

На рис. 3 представлены графики $f(v_i)$ полученные в рамках трех методов: численно по формуле (14); по формуле (20) из статьи [28] (график смещен на M по оси абсцисс, для соответствия неподвижной системе координат); по формуле (21), полученной с помощью уравнения КДВ. График функции $f(v_i)$, полученный численно из (14), справедливый для солитонов произвольной амплитуды выполнен с заливкой, поскольку является эталоном точности. При этом приближенные зависимости отображены штрихпунктирной и штриховой кривыми.

Все методы дают схожие результаты при $M = 1.05$ (при $\Phi_{\max} \approx 0.2$). Однако, уже при $M = 1.1$ ($\Phi_{\max} \approx 0.3$) метод разложения псевдопотенциала Сагдеева дает большую погрешность, в то же время выражение (21) и численное решение хорошо согласуются. Случай $M > 1.2$ ($\Phi_{\max} \approx 0.5$) методом разложения псевдопотенциала описать невозможно, в то время как формула (21) позволяет качественно описать решаемую задачу. Формула (21) остается справедливой для солитонов средних амплитуд $\Phi_{\max} \approx 0.5$ (верхний предел

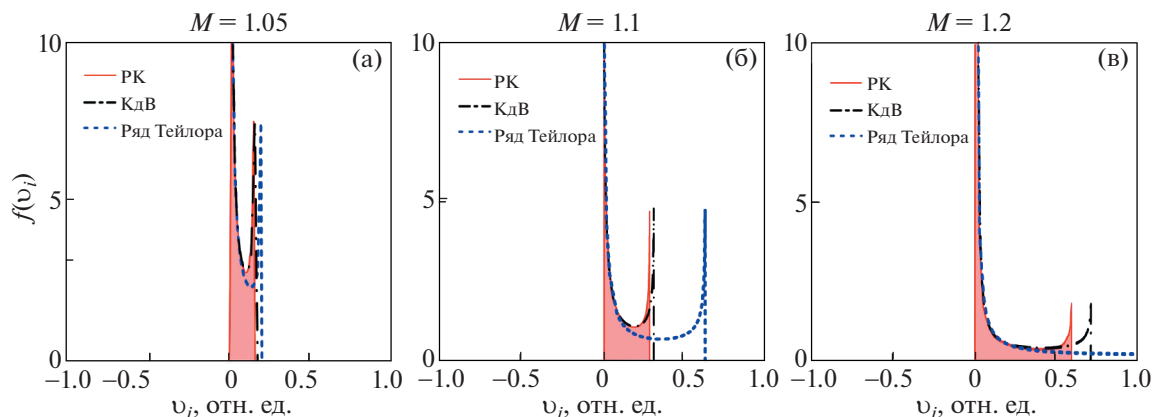


Рис. 3. Возмущенные функции распределения $f(v_i)$, рассчитанные в рамках рассмотренных методов: численно по формуле (14) – сплошная кривая (для этой кривой выполнена заливка области под графиком, поскольку численный метод является самым точным и выступает в качестве эталона); по формуле (21), полученной с использованием уравнения КдВ – штрихпунктирная кривая; по формуле (20) из статьи [28] – пунктирная кривая.

$\Phi_{\max} \approx 0.66$ при $M = 1.26$), что делает возможным ее практическое применение. Для нашей простой модели функция $f(v_i)$ зависит только от скорости солитона M . Важно отметить, что область ее определения лежит в диапазоне $0 < v_i < M$. Действительно, как показано в работах [27–29] в электрическом поле консервативного ИЗ-солитона “сжатия” (т.е. при $\Phi > 0$) ионы могут двигаться только с положительной скоростью $v_i > 0$ (с чем и связан их односторонний перенос). Верхняя граница $v_i < M$ соответствует докритическим солитонам. В самом деле, при $v_i \geq M$ происходит опрокидывание солитона и формируется многопоточковое движение. Наглядное представление исследуемой проблемы и ее прикладных аспектов содержится в видеосимуляциях, добавленных в работу [28].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе уравнения КдВ получено аналитическое выражение, описывающее возмущенную ионно-звуковым солитоном функцию распределения по скоростям фоновых ионов $f(v_i)$. Как было показано ранее, ИЗ-солитон сильно возмущает изначально равновесную функцию распределения ионов. В области занятой солитонами, такая функция имеет “beam-like” форму [27, 28]. Аналитические формулы (20), (21), полученные с использованием КдВ-уравнения удовлетворительно описывают исследуемую проблему для солитонов средних амплитуд $\Phi_{\max} \approx 0.5$, что позволяет их использовать в прикладных задачах. В частности, полученные результаты могут использоваться для интерпретации экспериментальных данных, а также для развития новых методов плазменной диагностики.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при поддержке гранта РФФ 19-12-00354 П.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zabusky N.J., Kruskal M.D.* // Phys. Rev. Lett. 1965. V. 15. P. 240.
2. *Russell J.* // Report of the Committee on Waves: Appointed by the British Association at Bristol in 1836 (R. and JE Taylor, 1838)
3. *Russell J.S.* // Report on Waves, Published in the York 1844 (BA Reports, 1844).
4. *Boussinesq J.* // CR Acad. Sci. Paris. V. 72. № 755–759. P. 1871.
5. *Boussinesq J.* // Journal de mathématiques pures et appliquées. 1872. V. 17. P. 55.
6. *Korteweg D.J., De Vries G.* // Philos. Mag. J. Sci. 1895. V. 39. P. 422.
7. *Washimi H., Taniuti T.* // Phys. Rev. Lett. 1966. V. 17. P. 996.
8. *Tran M.* // Phys. Scripta. 1979. V. 20. P. 317.
9. *Kotsarenko N.Y., Koshevaya S.V., Stewart G.A., Maravilla D.* // Planetary and space science. 1998. V. 46. № 4. P. 429. [https://doi.org/10.1016/S0032-0633\(97\)00205-5](https://doi.org/10.1016/S0032-0633(97)00205-5)
10. *Mamun A.A.* // Astrophysics and Space Science. 1999. V. 268. P. 443. <https://doi.org/10.1023/A:1002031022895>
11. *Tagare S.G., Singh S.V., Reddy R.V., Lakhina G.S.* // Nonlinear Processes in Geophysics. 2004. V. 11. № 2. P. 215. <https://doi.org/10.5194/npg-11-215-2004>
12. *Hussain S., Hasnain H.* // Physics of Plasmas. 2017. T. 24. № 3. <https://doi.org/10.1063/1.4978492>

13. *Giampo S., Pantano P., Tucci P.* // American Journal of Physics. 1984. V. 52. № 3. P. 238.
<https://doi.org/10.1119/1.13685>
14. *Ikezi H.S., Wojtowicz S., Waltz R., DeGrassie J., Baker D.* // Journal of Applied Physics. 1988. V. 64. № 6. P. 3277.
<https://doi.org/10.1063/1.341517>
15. *Kuusela T.* // Chaos, Solitons & Fractals. 1995. V. 5. № 12. P. 2419.
[https://doi.org/10.1016/0960-0779\(94\)E0107-Z](https://doi.org/10.1016/0960-0779(94)E0107-Z)
16. *Ким Д.Ч.* // Журнал технической физики. 2013. Т. 83. № 3. С. 31.
17. *Newell A.C.* // Solitons in Mathematics and Physics. SIAM, 1985.
18. *Ablowitz M.J.D., Kaup J., Newell A.C., Segur H.* // Physical Review Letters. 1973. V. 30. № 25. P. 1262.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.30.1262>
19. *Кадомицев Б.Б.* // Доклады Академии наук. 1970. Т. 192. № 4. С. 753.
20. *Gedalin M., Scott T.C., Band Y.B.* // Physical review letters. 1997. V. 78. № 3. P. 448.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.78.448>
21. Вопросы теории плазмы. Вып. 4. М.: Атомиздат, 1967.
22. *Ландау Л.Д.* // ЖЭТФ. 1946. Т. 16. С. 574.
23. *Stasiewicz K., Lundin R.* // Physica Scripta. 2000. V. 2000. № T84. P. 60.
<https://doi.org/10.1238/Physica.Topical.084a00060>
24. *Alberti S.* // Nature Physics. 2007. V. 3. № 6. P. 376–377.
<https://doi.org/10.1038/nphys637>
25. *Esarey E., Schroeder C.B., Leemans W.P.* // Reviews of modern physics. 2009. V. 81. № 3. P. 1229.
<https://doi.org/10.1103/RevModPhys.81.1229>
26. *Aleshin I.M., Peregodov D.V.* // Moscow University Physics Bulletin. 2000. V. 55 (1). P. 9.
27. *Trukhachev F.M., Vasiliev M.M., Petrov O.F.* // Plasma Physics Reports. 2022. V. 48. № 10. P. 1116.
<https://doi.org/10.1134/S1063780X2260075X>
28. *Trukhachev F.M., Gerasimenko N.V., Vasiliev M.M., Petrov O.F.* // Physics of Plasmas. 2023. T. 30. № 2.
<https://doi.org/10.1063/5.0133413>
29. *Trukhachev F.M., Vasiliev M.M., Petrov O.F.* // High Temperature. 2020. V. 58. P. 520.
<https://doi.org/10.1134/S0018151X2004015X>