

## ДИСПЕРСИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НИЗКОЧАСТОТНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ВОЛН В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ

© 2023 г. Н. С. Артеха<sup>a,b,\*</sup>, Д. Р. Шкляр<sup>a,\*\*</sup>

<sup>a</sup>Институт космических исследований РАН, Москва, Россия

<sup>b</sup>Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия

\*e-mail: natalya.arteha@mail.ru

\*\*e-mail: david@iki.rssi.ru

Поступила в редакцию 28.06.2023 г.

После доработки 17.09.2023 г.

Принята к публикации 18.09.2023 г.

Исследуются волны в бесстолкновительной магнитоактивной плазме, с частотами много ниже электронной циклотронной частоты, при произвольном соотношении между электронной плазменной и циклотронной частотами. Получено общее дисперсионное уравнение для частоты волны как функции волнового вектора и отношения плазменной частоты к циклотронной. Это соотношение представляет собой бикубическое уравнение относительно частоты. На основе этого уравнения исследованы области существования различных волновых мод в зависимости от указанного параметра, их групповая скорость, поляризация и плотность энергии. Особое внимание уделено исследованию низкочастотных свистовых волн в разреженной плазме, поскольку среди распространяющихся мод, которые существуют в указанной области параметров, свистовые волны имеют наибольший показатель преломления и играют важную роль в процессах резонансного взаимодействия волн и частиц.

*Ключевые слова:* разреженная плазма, низкочастотные волны, дисперсионные соотношения, поляризация волновых мод, плотность энергии свистовой волны, угол Жандрэна

**DOI:** 10.31857/S0367292123600838, **EDN:** HIZYRY

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Дисперсионные и поляризационные свойства волн лежат в основе исследований волновых процессов в плазме, таких как генерация и распространение волн, резонансное взаимодействие волн и частиц, нелинейное взаимодействие волн. Настоящая работа посвящена исследованию дисперсионных свойств и поляризационных характеристик волн в бесстолкновительной плазме в диапазоне частот  $\omega_{LH} \ll \omega \ll \omega_c$ , где  $\omega_{LH}$  и  $\omega_c$  — нижнегибридная и электронная циклотронная частоты соответственно. Поскольку ионы не влияют на дисперсию волн в указанном частотном диапазоне [1, 2], то в данной работе они названы электронными волнами. В случае, когда электронная плазменная частота  $\omega_p$  существенно превышает электронную гирочастоту, указанный частотный диапазон отвечает низкочастотным свистовым волнам, исследованным наиболее полно. В противоположном предельном случае разреженной плазмы, когда выполнено условие

$\omega_p^2 \ll \omega_c^2$ , в данный частотный диапазон помимо свистовых волн также частично попадают так называемая  $z$ -мода и обыкновенная волна ( $o$ -мода). Именно исследованию этого случая уделено основное внимание в настоящей работе, хотя полученное дисперсионное соотношение, которое представляет собой бикубическое уравнение для частоты волны, справедливо при произвольном соотношении между  $\omega_p$  и  $\omega_c$ .

Низкочастотные электронные волны, распространяющиеся в ионосфере и магнитосфере Земли и других планет, являются распространенным волновым явлением в космической плазме [3, 4]. Такие волны возникают в результате развития циклотронной неустойчивости в радиационных поясах Земли [5], генерируются молниевыми разрядами и навигационным оборудованием и могут регистрироваться на больших удалениях от источника своего возникновения, в том числе, на спутниках. Низкочастотные волны, принадлежащие свистовой моде, существенно влияют на динамику космической плазмы [6–8], в частности,

играют важную роль в процессах ускорения и высыпания частиц в радиационных поясах [9–11], поэтому их исследование остается актуальной задачей на протяжении многих десятилетий вплоть до настоящего времени [12–17]. Как отмечено выше, дисперсионные характеристики свистовых волн в основном исследовались для случая плотной плазмы, когда электронная плазменная частота много больше циклотронной частоты [18]. При данном условии в явном виде известны закон дисперсии для волн свистовой моды, выражения для показателя преломления волны, поляризационных коэффициентов, а также в теории свистовых волн в магнитосфере имеется несколько известных фундаментальных результатов, касающихся угла Стори [19], угла Жандрэна [20], плотности энергии, явления нижнегибридного отражения, приводящего к формированию магнитосферно-отраженных свистов [21–23].

Однако при наличии достаточно сильного магнитного поля в околопланетном космическом пространстве может наблюдаться противоположный случай, когда  $\omega_p < \omega_c$ , что имеет место, в частности, в авроральной области магнитосферы Земли. По данным миссий Voyager 1 и 2 [24] такая область была обнаружена также у Юпитера на расстояниях  $18.5R_{Jn} < R < 22.5R_{Jn}$ . Современные данные миссий Juno в магнитосфере Юпитера [25–28] и Cassini в магнитосфере Сатурна [29, 30] свидетельствуют о наличии областей с  $\omega_p < \omega_c$ : это авроральные области, где плотность мала, а магнитные поля Юпитера и Сатурна очень сильные, и лобы магнитодиска Юпитера. Поэтому изучение волн в разреженной плазме, помимо теоретического интереса, имеет и свои приложения к волновым процессам в космической плазме [31–34]. Представляет интерес исследовать, как видоизменяются известные фундаментальные результаты в этом случае.

Основные цели данной работы следующие:

- вывести и проанализировать дисперсионное соотношение для частоты волны как функции волнового вектора и параметров плазмы в диапазоне частот  $\omega_{LH} \ll \omega \ll \omega_c$  при произвольном соотношении между  $\omega_p$  и  $\omega_c$ , в частности при  $\omega_p < \omega_c$ ;

- вычислив частоты отсечки показателя преломления и резонансные частоты, при которых в заданной области параметров показатель преломления обращается в бесконечность, определить моды колебаний;

- получить аналитическое выражение для угла Жандрэна и найти область его существования;

- рассчитать значения угла Стори для свистовых волн в разреженной магнитоактивной плазме при различных значениях параметров плазмы;

- исследовать поляризацию электрического и магнитного поля и определить плотность энергии волн.

## 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Будем исходить из общего уравнения для показателя преломления  $N = kc/\omega$  электромагнитных волн в магнитоактивной плазме [1, 2]

$$AN^4 + BN^2 + C = 0. \quad (1)$$

Коэффициенты этого уравнения даются следующими выражениями [1, 2]

$$\begin{aligned} A &= \varepsilon_1 \sin^2 \theta + \varepsilon_3 \cos^2 \theta, \\ B &= -\varepsilon_1 \varepsilon_3 (1 + \cos^2 \theta) - (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) \sin^2 \theta, \\ C &= \varepsilon_3 (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  – компоненты тензора диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_{ij}(\omega)$

$$\varepsilon_{ij}(\omega) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & i\varepsilon_2 & 0 \\ -i\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

которые в рассматриваемом диапазоне частот  $\omega \ll \omega_c$  имеют вид

$$\varepsilon_1 = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_c^2}, \quad \varepsilon_2 = -\frac{\omega_p^2}{\omega \omega_c}, \quad \varepsilon_3 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad (4)$$

и  $\theta$  – угол волновой нормали. Здесь и далее мы, как обычно, считаем, что внешнее магнитное поле  $B_0$  направлено вдоль оси  $z$  декартовой системы координат, а волновой вектор  $k$  лежит в плоскости  $(x, z)$ , так что  $k_z = k_{\parallel}$  и  $k_x = k_{\perp}$ .

Введем безразмерную частоту  $F = \omega/\omega_p$ , безразмерный параметр  $p = \omega_p/\omega_c$ , а также квадраты безразмерных перпендикулярного волнового вектора  $q_1 = k_{\perp}^2 c^2 / \omega_p^2$  и продольного волнового вектора  $q_2 = k_{\parallel}^2 c^2 / \omega_p^2$ . В этих переменных уравнение (1) принимает вид бикубического уравнения для безразмерной частоты  $F$

$$\begin{aligned} \Phi \equiv & F^6 (1 + p^2)^2 - F^4 [(1 + p^2)^2 + p^2 + \\ & + 2(q_1 + q_2)(1 + p^2) + q_1 p^2 (1 + p^2)] + \\ & + F^2 [(q_1 + q_2)^2 + p^2 q_1 (q_1 + q_2) + \\ & + (q_1 + q_2)(1 + 2p^2) + q_2 + p^2] - q_2 (q_1 + q_2) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

(Напомним, что в общем случае уравнение (1) представляет собой уравнение пятой степени относительно квадрата частоты, если считать волновой вектор  $\mathbf{k}$  заданным [1].) Уравнение (5) справедливо в диапазоне нормированных частот

$F \ll 1/p$  ( $\omega \ll \omega_c$  в размерных переменных) при произвольных значениях параметра  $p$ . Однако, поскольку для случая  $p \gg 1$  дисперсионные свойства и поляризационные характеристики свистовой моды – единственной, которая существует в этом случае в рассматриваемом диапазоне частот – хорошо известны, основное внимание в данной работе будет уделено случаю  $p < 1$ . При проведении численных расчетов и их графическом представлении мы, естественно, используем безразмерные переменные. Однако аналитические соотношения приводятся в более привычных размерных переменных, сохраняя, однако, обозначение  $p$  для введенного выше основного безразмерного параметра.

Из условия  $A = 0$  следует выражение для резонансной частоты свистовых волн, при которой показатель преломления  $N$  обращается в бесконечность

$$\omega_{res} = \sqrt{\frac{\omega_p^2 \cos^2 \theta}{1 + p^2 \sin^2 \theta}}, \quad (6)$$

а из условия  $C = 0$  получаем две частоты отсечки  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , выше которых оба возможных значения квадрата показателя преломления являются положительными, и существуют две распространяющиеся моды

$$\omega_1 = \omega_p \frac{p}{1 + p^2}; \quad \omega_2 = \omega_p. \quad (7)$$

Приведенное выражение для частоты отсечки  $\omega_1$  справедливо при  $\omega_1 \ll \omega_c$ , что выполняется только при  $p^2 \ll 1$ . Подчеркнем, что в рассматриваемый частотный диапазон  $\omega_{LH} \ll \omega \ll \omega_c$  попадают не все резонансные частоты и частоты отсечки показателя преломления. Кроме того, условие  $\omega \gg \omega_{LH}$  накладывает ограничение на угол распространения свистовой волны, которое следует из (6)

$$\frac{\omega |\cos \theta|}{\sqrt{1 + p^2 \sin^2 \theta}} \gg \omega_{LH},$$

в частности, угол распространения  $\theta$  не может быть слишком близок к  $\pi/2$ .

Обсудим более подробно указанную выше область частот, в которой применимо наше рассмотрение. Поскольку речь идет в первую очередь о численных расчетах и их графическом представлении, в обсуждении этого вопроса мы используем безразмерную частоту  $F$ . В безразмерных переменных в электрон-протонной плазме нижнегибридная частота  $F_{LH} = 1/(43\sqrt{1 + p^2})$ . В качестве нижней границы частотного диапазона

мы выберем величину  $2F_{LH}$ . Верхнюю же границу частотного диапазона, в котором применимо наше рассмотрение, мы определим значением  $F_{max} = 1/2p$ , что соответствует  $\omega_{max} = \omega_c/2$ . В этих же границах будут приведены все результаты численных расчетов. Обратим внимание, что как минимальная, так и максимальная частоты в наших расчетах зависят от параметра  $p$ .

Нетрудно видеть, что в области применимости уравнения (5), указанной выше, а именно,  $2\omega_{LH} < \omega < \omega_c/2$ , все три частоты  $\omega_{res}$ ,  $\omega_1$  и  $\omega_2$  оказываются меньше  $\omega_c/2$  при  $p < 1/2$ . Если при этом  $\omega_{res} > \omega_1$ , что выполняется при достаточно малых углах волновой нормали  $\theta$ , то между  $\omega_1$  и  $\omega_{res}$  существуют две распространяющиеся моды: свистовая мода и так называемая  $z$ -мода. Наличие двух распространяющихся мод в указанном частотном диапазоне в разреженной плазме является существенным отличием от случая плотной плазмы, где в свистовом диапазоне существует только одна распространяющаяся – свистовая – мода, а между резонансной частотой свистовой волны и частотой отсечки  $z$ -моды имеется интервал частот, в котором в приближении холодной плазмы нет распространяющихся волновых мод.

В случае же  $\omega_{res} < \omega_1$ , что имеет место, в частности, при достаточно больших углах волновой нормали  $\theta$ , диапазон частот между  $\omega_{res}$  и  $\omega_1$  оказывается “пустым”, как и в случае плотной плазмы. При достаточно малом значении параметра  $p$  частота  $\omega_2$  также лежит в области применимости уравнения (5), и при частотах больше  $\omega_2$  и вплоть до максимальной частоты применимости уравнения (5), а именно,  $\omega \leq \omega_c/2$ , наряду с  $z$ -модой может также распространяться обыкновенная волна, называемая  $o$ -модой. Все эти особенности распространения волн, наряду с их поляризационными характеристиками, будут проиллюстрированы ниже на основе решения уравнения (5).

### 3. ДИСПЕРСИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НИЗКОЧАСТОТНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ВОЛН

Отыскание дисперсионных уравнений для распространяющихся мод является фундаментальной задачей теории электромагнитных волн в бесстолкновительной магнитоактивной плазме. Эта задача исследовалась в большом количестве работ (см, например, [1, 2] и имеющиеся там ссылки). Классическим и хорошо известным результатом является построение квадрата показателя преломления как функции частоты при фиксированном угле распространения, а также зависимости частоты от модуля волнового вектора при фиксированном угле распространения, в частности, при продольном и поперечном рас-

пространении, когда имеются и явные выражения для квадрата показателя преломления волн. Указанные результаты схематически представлены, в частности, в [1, 2].

Однако для ряда задач распространения волн, а также их нелинейного взаимодействия и резонансного взаимодействия с частицами необходимо иметь не графические, а явные численные дисперсионные уравнения, т.е. зависимости частоты от волнового вектора и параметров плазмы. Такая задача для низкочастотных электронных волн и решается ниже: дается алгоритм получения численных дисперсионных уравнений и приводится их трехмерное графическое представление.

Для любых значений волнового вектора  $(k_{\perp}, k_{\parallel})$  а, следовательно, и величин  $q_1, q_2$ , уравнение (5) имеет три решения для величины  $F^2$ , которые дают три значения квадрата частоты  $\omega^2$ . В среде MATLAB, например, три корня уравнения (5) находятся с помощью одной команды *roots*. Сортировка этих решений по волновым модам, которая и составляет суть построения численных дисперсионных уравнений, зависит от соотношения между  $\omega_1$  и  $\omega_{res}$ , которое помимо параметра  $p$  зависит также от угла распространения  $\theta$ . Если  $\omega_1 < \omega_{res}$ , то все частоты больше нижнегибридной частоты  $\omega_{LH}$  и меньше  $\omega_1$  принадлежат свистовой моде. Частоты в интервале  $\omega_1 < \omega < \omega_{res}$  принадлежат либо свистовой моде, если соответствующий показатель преломления  $kc/\omega > 1$ , либо  $z$ -моде, если  $kc/\omega < 1$ . Все частоты в интервале  $\omega_{res} < \omega < \omega_p$  принадлежат  $z$ -моде, а частоты  $\omega_p < \omega < \omega_{max}$  принадлежат либо  $z$ -моде, если  $kc/\omega > 1$ , либо  $o$ -моде, если  $kc/\omega < 1$ . Если же  $\omega_1 > \omega_{res}$ , то все частоты в интервале  $\omega_{LH} < \omega < \omega_{res}$  принадлежат свистовой моде, частоты в интервале  $\omega_1 < \omega < \omega_p$  принадлежат  $z$ -моде, а частоты в интервале  $\omega_p < \omega < \omega_{max}$ , также как и в предыдущем случае, принадлежат  $z$ -моде, если  $kc/\omega > 1$ , и  $o$ -моде, если  $kc/\omega < 1$ . Рассортированные таким образом частоты, представляющие собой решения уравнения (5), формируют три матрицы частот на плоскости  $(k_{\perp}, k_{\parallel})$ , которые и задают в численном виде три дисперсионных уравнения для трех волновых мод. На рис. 1 показаны найденные из этих дисперсионных уравнений изолинии постоянной нормированной частоты для трех волновых мод на плоскости  $(k_{\perp}c/\omega_p, k_{\parallel}c/\omega_p)$ , где  $k_{\perp}$  и  $k_{\parallel}$ , как и выше, значения поперечной и продольной компонент волнового вектора.

Рисунок 1 отвечает значению параметра  $p = 0.3$ , для которого в рамках применимости уравнения (5) существуют три волновых моды –

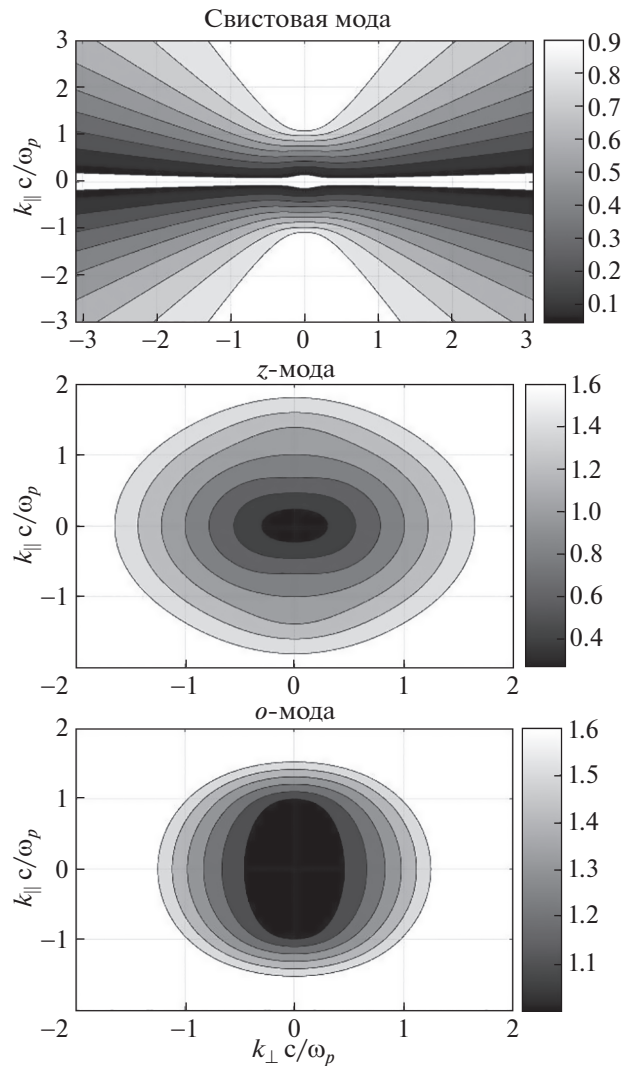


Рис. 1. Изолинии постоянной частоты  $F(k_{\perp}c/\omega_p, k_{\parallel}c/\omega_p)$  при  $p = 0.3$ : свистовая мода,  $z$ -мода, обыкновенная волна ( $o$ -мода).

свисты в диапазоне частот выше нижнегибридной частоты до  $\omega = \omega_p$ ;  $z$ -мода в диапазоне частот от  $\omega_2$  вплоть до максимальной частоты применимости уравнения (5), определенной как  $\omega_c/2$ ; и обыкновенная волна ( $o$ -мода) в диапазоне частот  $\omega_p < \omega < \omega_c/2$ . Контуры постоянной частоты для параметра  $p = 0.7$ , когда в области применимости уравнения (5) существуют только две распространяющиеся моды, показаны на рис. 2. Поскольку с ростом параметра  $p$  от 0 до 1 частота отсечки  $z$ -моды возрастает, то интервал частот  $\omega_1 < \omega < \omega_p$ , в котором одновременно существуют свистовая и  $z$ -моды, уменьшается с ростом  $p$ : при  $p = 0.3$  частота отсечки  $z$ -моды  $\omega_1 = 0.275\omega_p$ , а при  $p = 0.7$  частота  $\omega_1 = 0.47\omega_p$ . Подчеркнем,

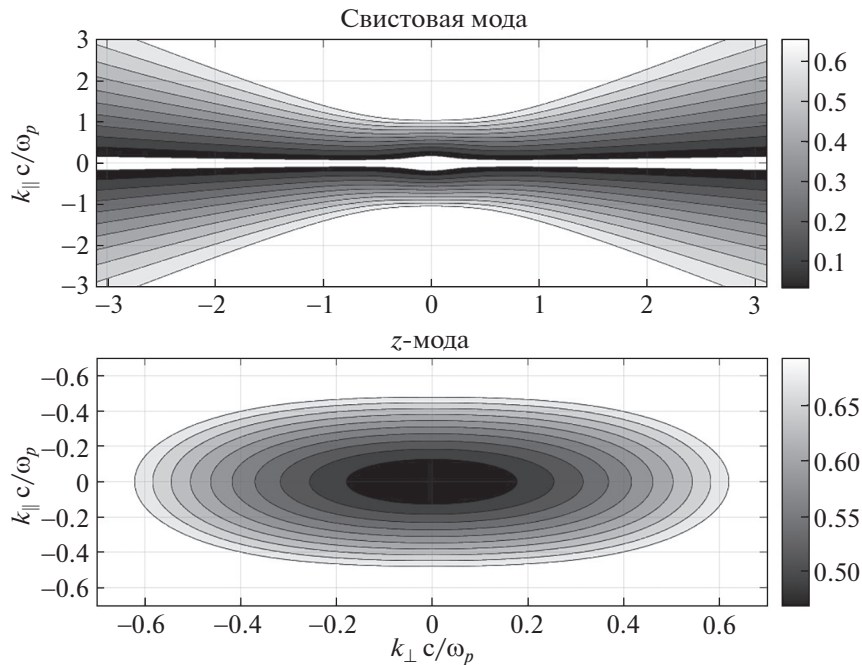
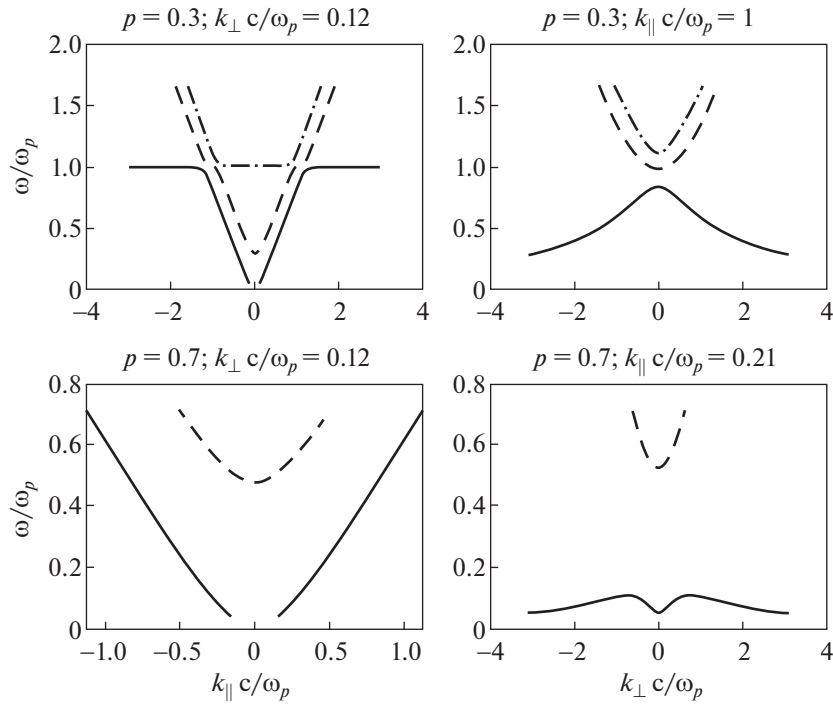


Рис. 2. Изолинии постоянной частоты  $F(k_{\perp}c/\omega_p, k_{\parallel}c/\omega_p)$  при  $p = 0.7$ : свистовая мода,  $z$ -мода.

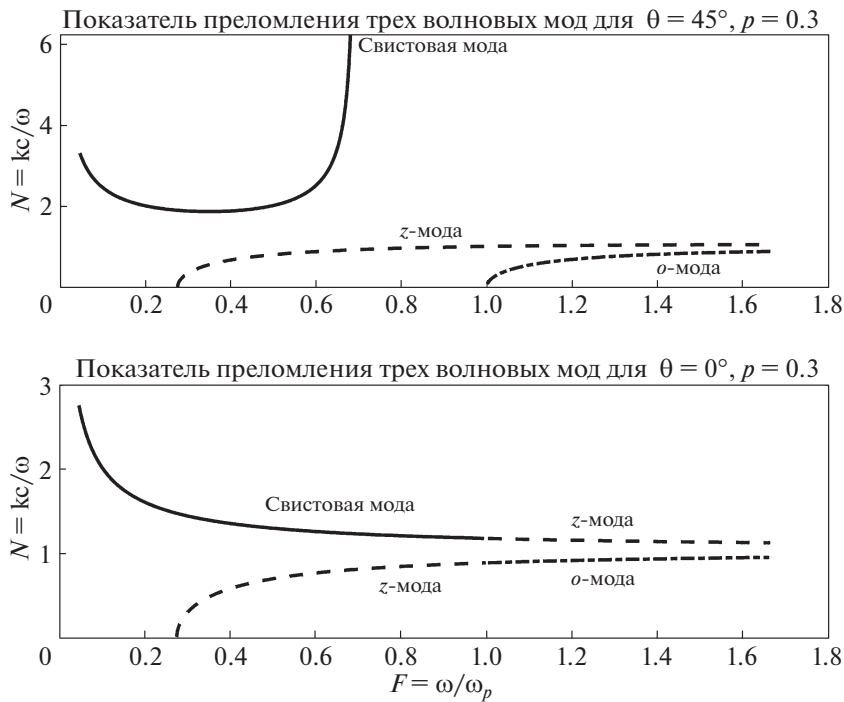
что этот интервал, помимо параметра  $p$ , зависит также от угла распространения  $\theta$  свистовой волны, а приведенные выше максимальные интервалы отвечают углу  $\theta = 0$ . На рис. 3, также для значений параметра  $p = 0.3$  и  $p = 0.7$ , показаны зависимости нормированных частот распространяющихся мод от нормированной продольной компоненты волнового вектора при фиксированной перпендикулярной компоненте (левые панели) и зависимости от нормированной перпендикулярной компоненты при фиксированной продольной компоненте волнового вектора (правые панели). Соответствующие значения  $k_{\perp}c/\omega_p$  и  $k_{\parallel}c/\omega_p$ , также как и параметра  $p$ , указаны на рисунках. Свистовой моде отвечает сплошная линия,  $z$ -моду отвечает штриховая линия, а  $o$ -мода изображена штрихпунктирной линией. Отметим, что при фиксированных значениях  $k_{\perp}$  или  $k_{\parallel}$  частоты отсечки  $z$ -моды и  $o$ -моды оказываются выше значений  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , которые являются частотами отсечки при фиксированном угле распространения и соответствуют значениям волнового вектора  $k \rightarrow 0$ . Зависимость показателя преломления от частоты при фиксированных углах распространения  $\theta = 45^\circ$  и  $\theta = 0^\circ$  для трех волновых мод показана на рис. 4 для разреженной плазмы ( $p = 0.3$ ). Эти зависимости хорошо известны [1, 2] и приведены лишь для полноты картины. Верхняя панель иллюстрирует высказанное выше утверждение, что в разреженной плазме, в отличие от плотной плазмы, диапазоны частот, где су-

ществует свистовая мода и  $z$ -мода перекрываются. Нижняя панель иллюстрирует особенности зависимостей показателя преломления волновых мод от частоты при продольном распространении, которые заключаются в том, что для  $\theta = 0^\circ$  свистовая мода после  $\omega = \omega_p$  продолжается  $z$ -модой,  $z$ -мода продолжается  $o$ -модой, а показатель преломления  $z$ -моды испытывает скачок. Это связано с тем, что точка  $\theta = 0^\circ$ ,  $\omega = \omega_p$  является вырожденной точкой уравнения (1) для показателя преломления, в которой все коэффициенты  $A, B, C$  обращаются в ноль. В то же время, при  $\theta = 0^\circ$ , то есть при  $q_1 = 0$ ,  $\omega = \omega_p$  является решением уравнения (5) при любых значениях  $p$  и  $q_2$ .

Перейдем теперь к анализу дисперсионных и поляризационных характеристик свистовых волн, которые играют важную роль в динамике заряженных частиц космической плазмы. Поскольку для плотной плазмы, когда  $p \gg 1$ , эти характеристики хорошо известны, то основное внимание при анализе свистовых волн будет уделено случаю разреженной плазмы  $p < 1$ . На рис. 5 показаны контуры постоянной безразмерной частоты  $F$  на плоскости  $(k_{\perp}c/\omega_p, k_{\parallel}c/\omega_p)$ , так называемые поверхности показателя преломления [3], для  $p = 0.5$ . Как известно [3], направление групповой скорости волны совпадает с нормалью к поверхности показателя преломления. Как видно из рис. 5, при углах распространения  $\theta = 0^\circ$ , когда  $k_{\perp} = 0$ , групповая скорость волны всегда направ-



**Рис. 3.** Зависимость частот распространяющихся мод от продольной компоненты волнового вектора при фиксированной перпендикулярной компоненте (левые панели) и зависимость частот распространяющихся мод от перпендикулярной компоненты при фиксированной продольной (правые панели) при  $p = 0.3$  и  $p = 0.7$ .



**Рис. 4.** Зависимость показателя преломления от частоты при фиксированных углах распространения  $\theta = 45^\circ$  и  $\theta = 0^\circ$  для трех волновых мод.

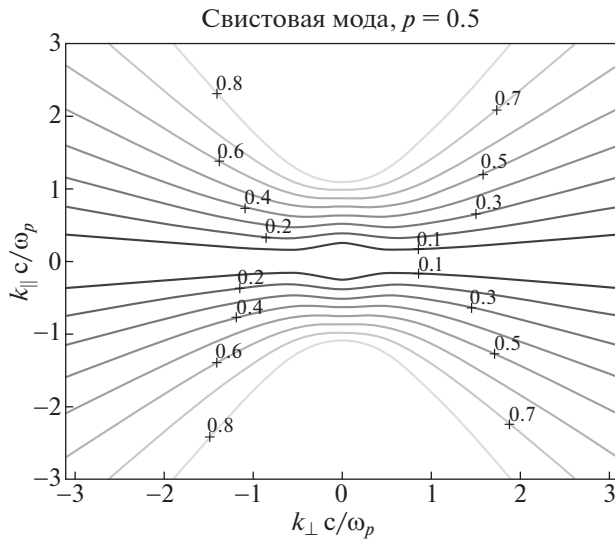


Рис. 5. Контуры постоянной безразмерной частоты  $F$  на плоскости  $(k_{\perp}c/\omega_p, k_{\parallel}c/\omega_p)$  при  $p = 0.5$ .

лена вдоль оси  $z$ , т.е. вдоль направления внешнего магнитного поля. Из данного рисунка также можно понять такие важные характеристики свистовых волн, как угол Жандрэна и угол Стори. Напомним, что угол Жандрэна – это, отличный от нуля и  $\pi/2$ , угол между волновым вектором и

внешним магнитным полем  $B_0$ , при котором групповая скорость волны коллинеарна  $B_0$ . Угол Стори – это угол максимального отклонения групповой скорости от направления внешнего магнитного поля в области очень низких частот. Для плотной плазмы из теории свистовых волн известно, что для частот  $\omega < \omega_c/2$  групповая скорость коллинеарна внешнему магнитному полю, когда угол волновой нормали равен  $\theta_G = \arccos(2\omega/\omega_c)$ , который, очевидно, существует только для частот  $\omega < \omega_c/2$  и называется углом Жандрэна. Для нахождения угла Жандрэна при произвольном  $p$  и значений частот  $\omega$ , удовлетворяющих условию  $\omega \ll \omega_c$ , которое, строго говоря, является условием применимости всех результатов, основанных на уравнении (5), мы сначала находим перпендикулярную компоненту групповой скорости из соотношения (5) как производную неявной функции и приравняем ее к нулю

$$v_{g\perp} \equiv \frac{\partial \omega}{\partial k_{\perp}} = -\frac{\partial \Phi / \partial k_{\perp}}{\partial \Phi / \partial \omega} = 0. \quad (8)$$

Далее мы решаем совместно два уравнения: уравнение (8) и уравнение (5) относительно  $k^2$  и  $\cos^2 \theta$ . Решение этой системы не является единственным. То решение для угла Жандрэна, которое соответствует свистовой моде, для которой  $\omega < \omega_p$ , имеет вид

$$\cos^2 \theta_G = \frac{F^2}{(1 + p^2 F^2)(F^2 p^2 - p^2 + F^4(1 + p^2 - p^6) + F^6 p^2(1 + p^2)^3)} \times \\ \times \left[ (1 + p^2) \left( F^2(1 + 4p^2) + 2F^4 p^4 + F^6 p^4(1 + p^2)^2 - 2p^2 \right) - \right. \\ \left. - (1 + 2p^2 - F^2(2 + 3p^2 + p^4)) \sqrt{(1 - F^2)(p^2 + p^4)(1 + F^2 p^2 + F^4 p^4)} \right], \quad (9)$$

где мы использовали нормированную частоту  $F$ , через которую записано дисперсионное уравнение (5). Поскольку формула (9) достаточно громоздкая, мы приведем асимптотические выражения для косинуса угла Жандрэна свистовых волн в двух предельных случаях

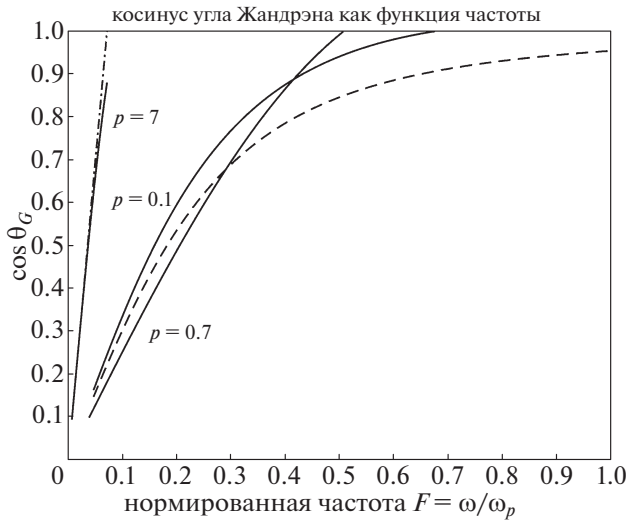
$$\cos \theta_G = \begin{cases} \left( 1 + \frac{\omega_p^3}{\omega^2 \omega_c} \right)^{-1/2}, & p \ll 1, \quad \omega \ll \omega_p; \\ \frac{2\omega}{\omega_c}, & p \gg 1, \quad \omega \ll \omega_c. \end{cases} \quad (10)$$

На рис. 6 показаны зависимости косинуса угла Жандрэна от безразмерной частоты, рассчитанные по формуле (5), для трех значений параметра  $p = 0.1, 0.7$  и  $7$ . Асимптотические зависимости для случая малых и больших значений параметра  $p$ , рассчитанные по формуле (10), показаны штриховой и штрихпунктирной линиями соот-

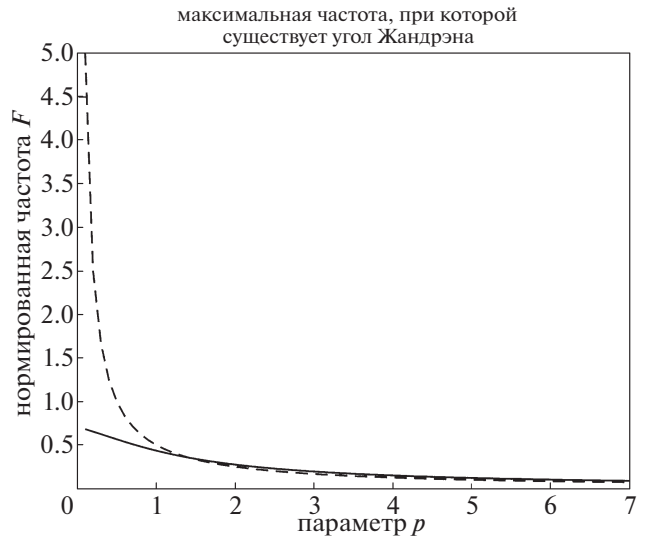
ветственно. Мы видим, что интервал частот, в котором существует угол Жандрэна, уменьшается с ростом  $p$ : при  $p = 0.1$  жандрэновский угол существует вплоть до частоты  $\omega = 0.7\omega_p$ , а при  $p = 0.7$  этот интервал ограничен значением частоты  $\omega \simeq 0.5\omega_p$ . В каждом из этих случаев  $\cos \theta_G$  увеличивается с ростом частоты, следовательно сам угол Жандрэна уменьшается. Из этих соображений, приравняв косинус единице, можно найти верхнюю предельную частоту волны, до которой существует угол Жандрэна. Она дается следующей формулой:

$$\omega_{\max}^2 = \frac{4 + 3p^2 - p\sqrt{8 + 5p^2}}{2(4 + 4p^2 + p^4)} \omega_p^2. \quad (11)$$

Зависимость максимальной нормированной предельной частоты от параметра  $p$  показана на рис. 7. Штриховой линией показана зависимость



**Рис. 6.** Зависимости косинуса угла Жандрэна от частоты для трех значений параметра  $p = 0.1, 0.7$  и  $7$ . Асимптотические зависимости для случая малых и больших значений параметра  $p$  показаны штриховой и штрихпунктирной линиями соответственно.



**Рис. 7.** Зависимость предельной частоты, до которой существует угол Жандрэна, от параметра  $p$ . Штриховой линией показана максимальная частота, до которой существует угол Жандрэна в плотной плазме.

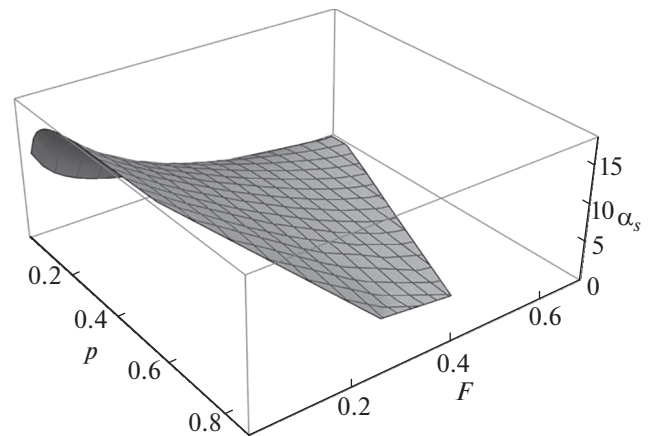
$F = 1/2p$ , которая представляет собой максимальную частоту, до которой существует угол Жандрэна в плотной плазме, т.е. при больших  $p$ . Поскольку это значение частоты лежит на границе применимости нашего анализа, асимптотика выражения (11) при больших  $p$  не совпадает точно с  $1/2p$ .

Для плотной плазмы ( $p \gg 1$ ) Стори показал, что групповая скорость низкочастотных свистовых волн не отклоняется от направления внешнего магнитного поля на угол более  $19.47^\circ$  [19]. В случае, когда  $\omega_p < \omega_c$  ( $p < 1$ ), наличие угла Жандрэна является необходимым и достаточным условием существования угла Стори, т.е. максимального, не равного  $90^\circ$ , угла отклонения групповой скорости от направления внешнего магнитного поля. Это видно графически из рис. 5: так как при больших  $k_\perp$  линии постоянной частоты загибаются вверх, то если существует угол Жандрэна, т.е. минимум на этой линии, то между ним и максимумом при  $\theta = 0$  всегда существует точка, в которой перпендикуляр к линии отклонится от вертикали на максимальный угол. На рис. 8 показан трехмерный график зависимости максимального отклонения групповой скорости от направления магнитного поля в зависимости от безразмерной частоты и параметра  $p$ . Найти эту зависимость аналитически не удается. Численно же абсолютный максимум этого угла в диапазоне частот  $\omega < 0.8\omega_p$  и  $p < 0.9$  равен  $18.16^\circ$ . Это значение можно назвать углом Стори для случая разреженной плазмы ( $p < 1$ ).

Рассмотрим теперь поляризацию низкочастотных волн в плазме произвольной плотности, делая, как и выше, акцент на случай разреженной плазмы. Как и при выводе основных уравнений считаем, что внешнее магнитное поле  $B_0$  направлено вдоль оси  $z$ , волновой вектор  $k$  лежит в плоскости  $(x, z)$ , а электрическое и магнитное поле волны задаются выражениями

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \text{Re}\{E\mathbf{a}\exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]\}; \\ \mathcal{B} &= \text{Re}\{B\mathbf{b}\exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]\}, \end{aligned} \tag{12}$$

где  $E, B$  — комплексные амплитуды, а  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  — комплексные вектора поляризации электрического и магнитного поля волны соответственно. Компоненты вектора поляризации называют также по-



**Рис. 8.** Трехмерный график зависимости угла Стори в градусах от безразмерной частоты и параметра  $p$ .

ляризационными коэффициентами. Без ограничения общности можно положить  $a_x = 1$ . Поляризационные коэффициенты  $a_j$  выражаются через компоненты тензора диэлектрической проницаемости, показатель преломления и угол волновой нормали следующим образом (с учетом сделанного выше замечания) [2]:

$$a_x = 1, \quad a_y = -\frac{i\varepsilon_2}{N^2 - \varepsilon_1}, \quad a_z = \frac{N^2 \sin \theta \cos \theta}{N^2 \sin^2 \theta - \varepsilon_3}. \quad (13)$$

Комплексный вектор поляризации магнитного поля  $\mathbf{b}$  связан с вектором  $\mathbf{a}$  соотношением, которое следует из закона индукции Фарадея

$$\begin{aligned} b_x &= -Na_y \cos \theta, \\ b_y &= N \cos \theta - Na_z \sin \theta, \quad b_z = Na_y \sin \theta. \end{aligned} \quad (14)$$

В рассматриваемой геометрии одна из полуосей эллипса поляризации электрического поля волны лежит в плоскости  $(x, z)$ , а вторая направлена по  $y$ . То же самое относится к магнитному полю волны. Эллиптичностью электрического (магнитного) поля называют отношение меньшей полуоси эллипса поляризации к большей, взятой со знаком плюс, если направление вращения поля волны соответствует направлению вращения электронов в магнитном поле, или со знаком минус если поле вращается в направлении вращения протонов. В первом случае поляризацию называют правой, во втором случае левой. Поскольку в бесстолкновительной плазме частота  $\omega$ , волновое число  $k$ , а с ними и показатель преломления  $N$  являются действительными величинами, то электрическое и магнитное поле волны всегда вращаются в одном направлении, что следует из (13), (14). Поэтому знак поляризации не зависит от того, определена она по электрическому или магнитному полю. С учетом (13) нетрудно видеть, что при выборе  $a_x = 1$ , знак поляризации совпадает со знаком величины  $-ia_y$ . Резюмируя, можно записать выражения для поляризации электрического и магнитного поля волны, соответственно,  $L_E$  и  $L_B$  в виде

$$L_E = \min(\sqrt{|a_y|^2/(1+a_z^2)}, \sqrt{(1+a_z^2)/|a_y|^2}) \text{sign}(-ia_y), \quad (15)$$

$$L_B = \min(\sqrt{(|b_x|^2 + |b_z|^2)/b_y^2}, \sqrt{b_y^2/(|b_x|^2 + |b_z|^2)}) \text{sign}(-ia_y). \quad (16)$$

Как показывает анализ, знак поляризации зависит не только от волновой моды, но и в рамках одной моды может зависеть от волнового вектора, что имеет место, в частности, для  $z$ -моды. Поляризация электрического и магнитного поля для трех волновых мод в разреженной плазме показана на рис. 9 для значения параметра  $p = 0.3$ . Мы

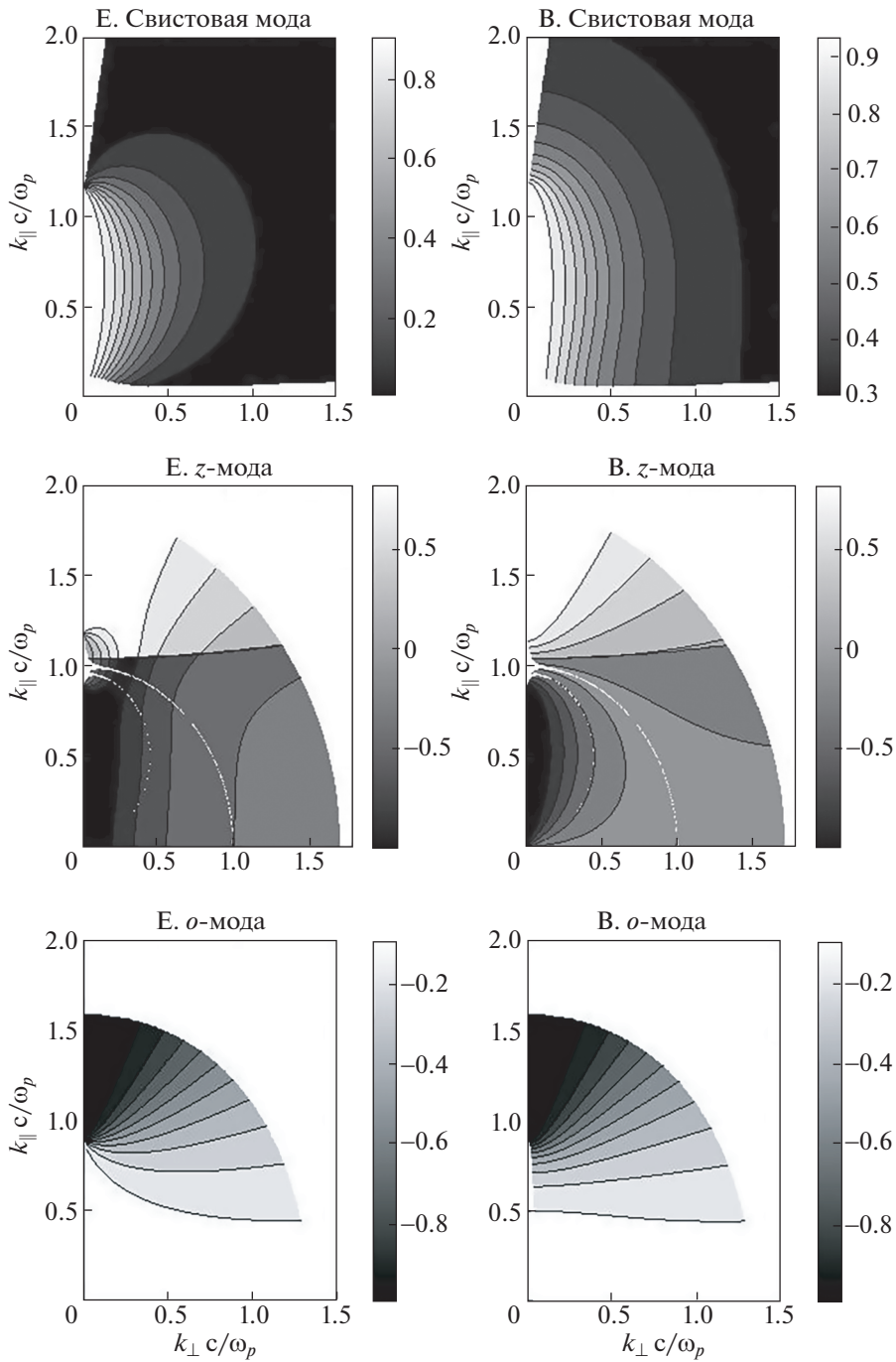
видим, что свистовая волна в разреженной плазме, также как и в плотной плазме, во всем диапазоне волновых векторов имеет правую поляризацию, обыкновенная волна имеет левую поляризацию, а поляризация  $z$ -моды в зависимости от значений волнового вектора может быть как правой, так и левой. Сравнение поляризации магнитного поля свистовой волны в разреженной и плотной плазме показано на рис. 10. Мы видим, что для  $p = 0.5$  поляризация свистовой волны меняется от 0.45 до 1, в то время, как в плотной плазме поляризация магнитного поля свиста близка к круговой во всей области волновых векторов. Существенное отличие поляризации магнитного поля свистовой волны от круговой при  $p < 1$  может служить одним из индикаторов разреженной плазмы. Естественно что это отличие проявляется только при углах волновой нормали не равных нулю, в то время как в случае продольного распространения электромагнитные волны в магнитоактивной плазме всегда имеют круговую поляризацию [1, 2].

При исследовании генерации волн и их резонансного взаимодействия с частицами важной величиной является плотность энергии волны, которая включает энергию электромагнитного поля и кинетическую энергию колебательного движения нерезонансных частиц. Общее выражение для плотности энергии волны имеет вид [35]

$$U = \frac{1}{16\pi\omega\partial\omega} (\omega^2 \varepsilon_{ij}) a_j a_i^* |E|^2, \quad (17)$$

где  $E$  – амплитуда электрического поля волны, а  $a_j$  – поляризационные коэффициенты (13). Поскольку мы полагаем  $a_x = 1$ , то величина  $E$  фактически представляет собой амплитуду компоненты электрического поля волны в плоскости  $(\mathbf{B}_0, \mathbf{k})$ , перпендикулярную  $\mathbf{B}_0$ . Производные тензора диэлектрической проницаемости по частоте вычисляются достаточно просто. Однако, поскольку плотность энергии зависит от поляризационных коэффициентов, которые в свою очередь зависят от показателя преломления, общее выражение для плотности энергии волны для всех частот и углов распространения в области  $\omega_{LH} \ll \omega \ll \omega_c$  получается чрезвычайно громоздким. Поэтому мы приводим его графически на рис. 11 для свистовой моды для трех значений параметра  $p$ :  $p = 0.3$ ,  $p = 1$  и  $p = 2$ . На данном рисунке в виде “цветового” кода изображен логарифм плотности энергии волны, нормированной на  $|E|^2/8\pi$ , как функция угла волновой нормали  $\theta$  в градусах и безразмерной частоты.

В аналитическом виде мы приведем выражение для плотности энергии волны в частном случае продольного распространения, когда показатель преломления определяется выражением



**Рис. 9.** Поляризация электрического (левые панели) и магнитного (правые панели) поля для трех волновых мод при  $p = 0.3$ .

$N^2 = \epsilon_1 \pm \epsilon_2$ , а поляризация волны круговая – правая или левая [1, 2]. В этом случае из (17) получим

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{|E|^2}{8\pi} \left[ 2(1 + p^2) \pm \frac{\omega_p^2}{\omega\omega_c} \right] \equiv \\
 &\equiv \frac{|B|^2}{8\pi N^2} \left[ 2(1 + p^2) \pm \frac{\omega_p^2}{\omega\omega_c} \right], \tag{18}
 \end{aligned}$$

где знак плюс соответствует волнам с правой поляризацией, а знак минус – с левой. Подчеркнем, что в случае продольного распространения знак поляризации однозначно связан со знаком в выражении для квадрата показателя преломления  $N^2$  (см. выше). Так, для волновой моды, для которой  $N^2 = \epsilon_1 - \epsilon_2$ , поляризация является пра-

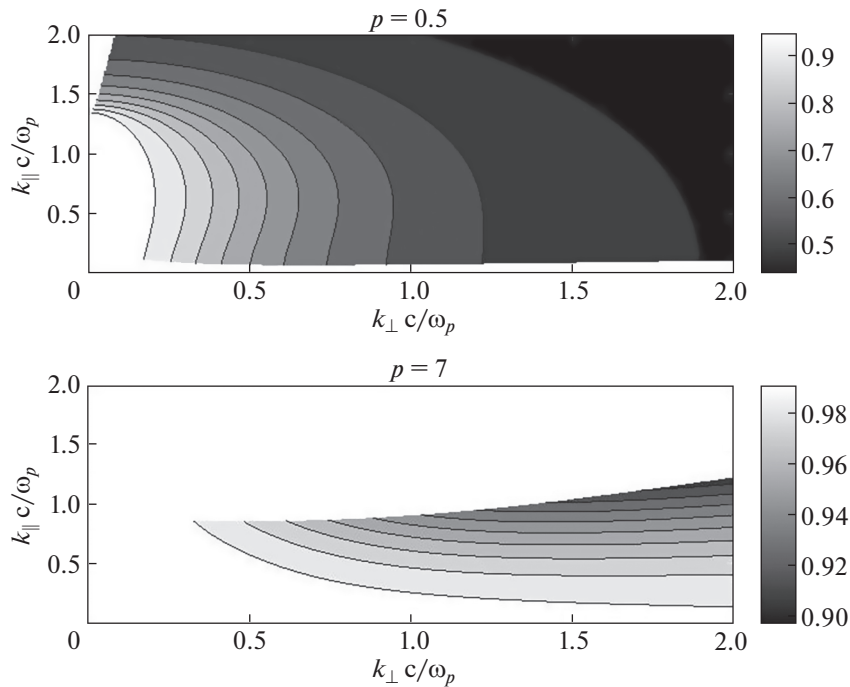


Рис. 10. Сравнение поляризации магнитного поля свистовой волны для  $p = 0.5$  и для  $p = 7$ .

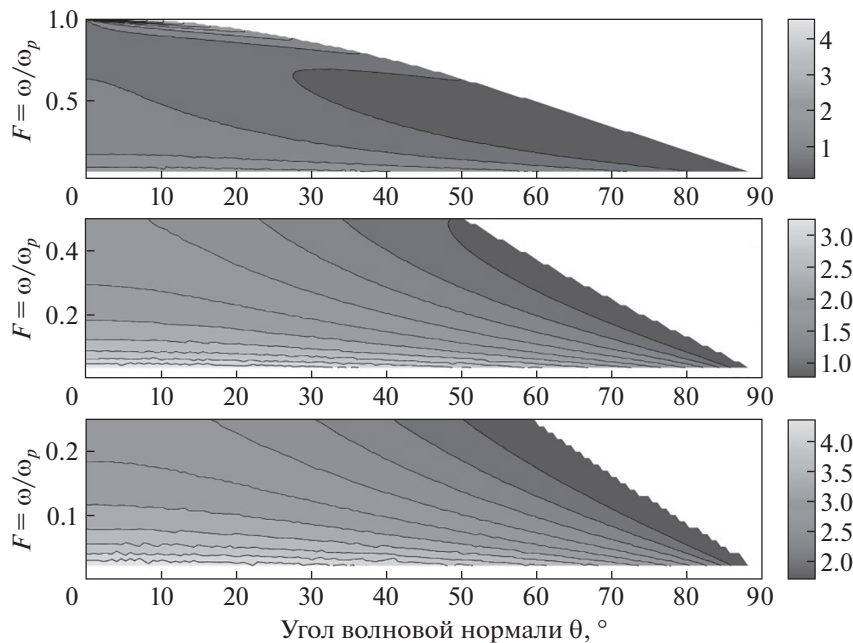


Рис. 11. Зависимость нормированной плотности энергии свистовой волны от угла волновой нормали и нормированной частоты для трех значений параметра  $p$ .

вой, а волновая мода, для которой  $N^2 = \epsilon_1 + \epsilon_2$ , имеет левую поляризацию. Для правополяризованной свистовой волны плотность энергии принимает вид

$$U = \frac{|B|^2}{8\pi} \left[ 1 + \frac{\omega(p^2 + 1)}{\omega(p^2 + 1) + p\omega_p} \right]. \quad (19)$$

Формула (19), также как и другие результаты настоящей работы, справедлива при выполнении условия  $\omega \ll \omega_c$ . Если при этом  $p \gg 1$ , то (19) переходит в хорошо известное выражение для плотности энергии низкочастотной свистовой волны в плотной плазме при продольном распространении (см., например, [17]):

$$U = \frac{|B|^2}{8\pi} \frac{\omega_c}{\omega_c - \omega}.$$

Получить явное выражение для плотности энергии свистовой волны удастся еще в одном предельном случае, а именно, в случае очень низ-

кочастотных свистов в сильно разреженной плазме, т.е. при выполнении условий

$$\omega \lesssim \frac{\omega_p^2}{\omega_c} \ll \omega_p.$$

Вычисления, которые мы здесь не приводим, дают

$$U = \frac{|E|^2}{8\pi} \left[ 1 + \frac{2\omega_p^4 \cos^2 \theta \left( 1 + \cos^2 \theta + \sqrt{\frac{4\omega_p^4}{\omega^2 \omega_c^2} \cos^2 \theta + \sin^4 \theta} \right)}{\omega^2 \omega_c^2 \left( \sin^2 \theta + \sqrt{\frac{4\omega_p^4}{\omega^2 \omega_c^2} \cos^2 \theta + \sin^4 \theta} \right)^2} \right]. \quad (20)$$

Для случая продольного распространения, т.е. при  $\theta = 0$ , это выражение переходит в формулу (18) с точностью до первого порядка по  $p$ . Подчеркнем, что поскольку при  $\omega_p \ll \omega_c$  нижнегибридная частота близка к плазменной частоте протонов, то условие  $\omega \ll \omega_p$  совместимо с условием применимости всего нашего рассмотрения  $\omega \gg \omega_{LH}$ .

Детальное исследование резонансного взаимодействия квазимонохроматических волн и частиц в разреженной плазме ( $p < 1$ ) с использованием полученных выше результатов мы предполагаем выполнить в дальнейшем.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Одним из базовых уравнений линейной теории волновых явлений в холодной магнитоактивной плазме является биквадратное уравнение для показателя преломления волн, которое определяет величину  $N^2 = k^2 c^2 / \omega^2$  как функцию частоты и угла волновой нормали. Решение этого уравнения, однако, не является дисперсионным уравнением в строгом смысле этого слова, так как оно не определяет в явном виде зависимость частоты волны от волнового вектора при фиксированных параметрах плазмы. Такое уравнение известно лишь в ряде частных случаев, например, для волн с частотами много ниже протонной гирочастоты (как и выше, мы говорим об электрон-протонной плазме) и для свистовых волн в плотной плазме, когда  $\omega_p^2 \gg \omega_c^2$  [1, 2]. Поляризационные характеристики волн также известны только как функции частоты и угла волновой нормали, а не как функции волнового вектора. В то же время, зависимость частоты от волнового вектора  $\mathbf{k}$ , который представляет собой исходную независимую переменную для дисперсионного уравнения  $\omega = \omega(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ , представляет несомненный интерес, в

частности, для записи уравнений геометрической оптики

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} \equiv \mathbf{v}_g; \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = -\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{r}}, \quad (21)$$

где  $\mathbf{v}_g$  – групповая скорость. В настоящей работе получено бикубическое уравнение для частоты волны как функции волнового вектора, а также представлен алгоритм сортировки трех его решений по волновым модам. Получаемые таким образом численные дисперсионные уравнения для трех волновых мод, которые представляют собой три матрицы на плоскости  $(k_{\perp}, k_{\parallel})$ , справедливы для частот много меньше электронной гирочастоты при произвольном соотношении между  $\omega_p^2$  и  $\omega_c^2$ . Кроме того, представлены поляризационные характеристики волн для различных соотношений между  $\omega_p^2$  и  $\omega_c^2$ .

Особое внимание уделено исследованию дисперсионных и поляризационных характеристик низкочастотных свистовых волн  $\omega \ll \omega_c$  для случая разреженной плазмы  $\omega_p^2 < \omega_c^2$ . (Как уже отмечалось, свистовые волны в плотной плазме с  $\omega_p^2 \gg \omega_c^2$  исследованы наиболее полно.) Получено выражение для угла Жандрэна – отличного от нуля угла волновой нормали, при котором групповая скорость свистовой волны направлена вдоль внешнего магнитного поля, и определена максимальная частота волны, для которой такой угол существует. Показано, что для частот, для которых существует угол Жандрэна, максимальный угол отклонения групповой скорости от направления внешнего магнитного поля не может превышать определенного значения, и численно определено это значение. Данное утверждение является аналогом теоремы Стори для низкочастотных свистовых волн в плотной плазме.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФ 22-22-00135.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахиезер А.И. (ред.), Ахиезер И.А., Половин Р.В., Ситенко А.Г., Степанов К.Н. Электродинамика плазмы. М.: Наука, 1974.
2. Гинзбург В.Л., Рухадзе А.А. Волны в магнитоактивной плазме. М.: Наука, 1975.
3. Helliwell R.A. Whistlers and related ionospheric phenomena. Stanford: Stanford University Press, 1965.
4. Ferencz C., Ferencz O.E., Namar D., Lichtenberger J. (eds). Whistler phenomena. Short impulse propagation. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001.
5. Беспалов П.А., Трахтенгерц В.Ю. // Вопросы теории плазмы. М.: Атомиздат, 1980. Вып. 10. С. 88.
6. Matsumoto H., Kimura I. // Planetary Space Sci. 1971. V. 19. P. 567.
7. Matsumoto H. // Wave instabilities in space plasmas / Eds. Palmadesso P.J., Papadopoulos K. Hingham: D. Reidel, 1979. 163 p.
8. Omura Y., Nunn D., Matsumoto H., Rycroft M.J. // J. Atmospheric Terrestrial Phys. 1991. V. 53. P. 351.
9. Demekhov A.G., Trakhtengerts V.Y., Rycroft M.J., Nunn D. // Geomagnetism and Aeronomy. 2006. V. 46. P. 711.  
<https://doi.org/10.1134/S0016793206060053>
10. Demekhov A.G., Trakhtengerts V.Y., Rycroft M.J., Nunn D. // Geomagnetism and Aeronomy. 2009. V. 49(1). 24.  
<https://doi.org/10.1134/S0016793209010034>
11. Shklyar D.R. // Planetary Space Sci. 1986. V. 34. P. 1091.
12. Thorne R.M., Kennel C.F. // J. Geophys. Res. 1971. V. 76(19). P. 4446.  
<https://doi.org/10.1029/JA076i019p04446>
13. Сажин С.С. Естественные радиоизлучения в магнитосфере Земли. М.: Наука, 1982. 9 с.
14. Artemyev A., Agapitov O., Breuillard H., Krasnoselskikh V., Rolland G. // Geophys. Res. Lett. V. 39. P. L08105.  
<https://doi.org/10.1029/2012GL051393>
15. Artemyev A., Agapitov O., Mourenas D., Krasnoselskikh V., Shastun V., Mozer F. // Space Sci. Rev. 2016.  
<https://doi.org/10.1007/s11214-016-0252-5>
16. Trakhtengerts V.Y., Rycroft M.J. // J. Atmospheric Solar-Terrestrial Phys. 2000. V. 62. P. 1719.
17. Trakhtengerts V.Y., Rycroft M.J. Whistler and Alfvén mode cyclotron masers in space. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.
18. Шкляр Д.Р. // Плазменная гелиогеофизика / Под ред. Л.М. Зеленого и И.С. Веселовского. М.: Физматлит, 2008. Т. 2. С. 391.
19. Storey L.R.O. // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 1953. V. A246(908). P. 113.
20. Gendrin R. // Planet. Space Sci. 1961. V. 5. P. 274.  
[https://doi.org/10.1016/0032-0633\(61\)90096-4](https://doi.org/10.1016/0032-0633(61)90096-4)
21. Kimura I. // Radio Sci. 1966. V. 1(3). P. 269.
22. Kimura I. // Space Sci. Rev. 1985. V. 42 (3/4). P. 449.
23. Smith R.L., Angerami J.J. // J. Geophys. Res. 1968. V. 73 (1). P. 1.
24. Barnhart B.L., Kurth W.S., Groene J.B., Faden J.B., Santolik O., Gurnett D.A. // J. Geophys. Res. 2009. V. 114. P. A05218.  
<https://doi.org/10.1029/2009JA014069>
25. Tetrick S.S., Gurnett D.A., Kurth W.S., Imai M., Hospodarsky G.B., Bolton S.J., Connerney J.E.P., Levin S.M., Mauk B.H. // Geophys. Res. Lett. 2017. V. 44. P. 4447.  
<https://doi.org/10.1002/2017GL073073>
26. Zhang X.-J., Ma Q., Artemyev A.V., Li W., Kurth W.S., Mauk B.H., Clark G., Allegrini F., Gershman D.J., Bolton S.J. // J. Geophys. Res.: Space Phys. 2020. V. 125. P. e2020JA027957.  
<https://doi.org/10.1029/2020JA027957>
27. Kurth W.S., Mauk B.H., Elliott S.S., Gurnett D.A., Hospodarsky G.B., Santolik O., Connerney J.E.P., Valek P., Allegrini F., Gladstone G.R., Bolton S.J., Levin S.M. // Geophys. Res. Lett. 2018. V. 45. P. 9372.  
<https://doi.org/10.1029/2018GL078566>
28. Sulaiman A.H., Mauk B.H., Szalay J.R., Allegrini F., Clark G., Gladstone G.R., Kotsiaros S., Kurth W.S., Bagenal F., Bonfond B., Connerney J.E.P., Ebert R.W., Elliott S.S., Gershman D.J., Hospodarsky G.B., Hue V., Lysak R.L., Masters A., Santolik O., Saur J., Bolton S.J. // J. Geophys. Res.: Space Phys. 2022. V. 127. P. e2022JA030334.  
<https://doi.org/10.1029/2022JA030334>
29. Persoon A.M., Kurth W.S., Gurnett D.A., Groene J.B., Sulaiman A.H., Wahlund J.-E., Morooka M.W., Haddid L.Z., Nagy A.F., Waite J.H., Jr., Cravens T.E. // Geophys. Res. Lett. 2019. V. 46. P. 3061.  
<https://doi.org/10.1029/2018GL078020>
30. Lamy L., Cecconi B., Zarka P., Canu P., Schippers P., Kurth W.S., Mutel R.L., Gurnett D.A., Menietti D., Louarn P. // J. Geophys. Res.: Space Phys. 2010. V. 116. P. A04212.  
<https://doi.org/10.1029/2010JA016195>
31. Shprits Y.Y., Menietti J.D., Gu X., Kim K.C., Horne R.B. // J. Geophys. Res. 2012. V. 117. P. A11216.  
<https://doi.org/10.1029/2012JA018031>
32. Menietti J.D., Averkamp T.F., Imai M., Kurth W.S., Clark G.B., Allegrini F., Groene J.B., Faden J.B., Bolton S.J. // J. Geophys. Res.: Space Phys. 2021. V. 126. P. e2020JA028742.  
<https://doi.org/10.1029/2020JA028742>
33. Lamy L., Schippers P., Zarka P., Cecconi B., Arridge C.S., Dougherty M.K., Louarn P., Andre N., Kurth W.S., Mutel R.L., Gurnett D.A., Coates A.J. // Geophys. Res. Lett. 2010. V. 37. P. L12104.  
<https://doi.org/10.1029/2010GL043415>
34. Mutel R.L., Menietti J.D., Gurnett D.A., Kurth W., Schippers P., Lynch C., Lamy L., Arridge C., Cecconi B. // Geophys. Res. Lett. 2010. V. 37. P. L19105.  
<https://doi.org/10.1029/2010GL044940>
35. Шафранов В.Д. // Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963.