ФИЗИКА ПЛАЗМЫ, 2023, том 49, № 2, с. 143–153

ДИНАМИКА ПЛАЗМЫ

УДК 533.9

О СТАЦИОНАРНОМ ТЕЧЕНИИ ПЛОТНОЙ ПЛАЗМЫ В УСЛОВИЯХ ЛОКАЛИЗОВАННОГО ЭНЕРГОВКЛАДА

И. С. Абрамов[a, b, *], Е. Д. Господчиков[a], А. Г. Шалашов[a]

[a] *Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород, Россия*

[b] *Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия*

**e-mail: abramov@ipfran.ru*

Поступила в редакцию 01.09.2022 г.
После доработки 07.10.2022 г.
Принята к публикации 15.10.2022 г.

Представлена одномерная газодинамическая модель, позволяющая установить необходимые условия возникновения и характеристики стационарного течения сжимаемой сплошной среды с нелинейной теплопроводностью, примером которой является полностью или частично ионизированная плазма, при наличии локализованного источника тепла заданной мощности.

Ключевые слова: гидродинамика плазмы, стационарный разряд, нелинейная теплопроводность

DOI: 10.31857/S0367292122601084, **EDN:** NPIRMS

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время активно развиваются приложения, связанные с применением разряда, поддерживаемого излучением гиротрона в потоке газа [1–5]. Современные приборы способны работать в субтерагерцевом диапазоне частот и обладают средней мощностью на уровне сотен киловатт [6], что позволяет поддерживать плазму с плотностями до 10^{16} см$^{-3}$ и достигать средних энергий электронов порядка 100 эВ [7]. Данные условия являются благоприятными с точки зрения протекания в плазме элементарных процессов, связанных с электронным ударом, например, генерации многозарядных ионов, используемых в ускорителях заряженных частиц и являющихся источником экстремального ультрафиолетового излучения для литографии [8, 9].

Одним из определяющих преимуществ применения гиротронов для поддержания обсуждаемого разряда традиционно называют возможность обеспечить работу в режиме длительных импульсов вплоть до стационарной генерации. С этим связываются надежды на реализацию стационарного разряда и, соответственно, разработку стационарных источников частиц и излучения. Важной задачей теоретического описания обсуждаемых разрядов, таким образом, является установление возможности реализации в них стационарного течения плазмы в зависимости от набора внешних управляющих параметров, определяемых системой напуска газа, механизмом поглощения излучения, наличием и конфигурацией внешнего магнитного поля и пр.

С точки зрения классификации обсуждаемый субтерагерцевый разряд можно назвать предельным случаем непрерывного оптического разряда в потоке газа [10], главным приложением которого является разработанный на его основе лазерный плазмотрон [11, 12]. Несмотря на различия в параметрах плазмы и поддерживающего излучения субтерагерцевого и оптического разрядов в потоке газа, их ключевые свойства во многом являются схожими:

1) характерные пространственные масштабы области энерговклада малы по сравнению с масштабами разряда в целом;

2) существенную роль в балансе энергии играют потери за счет неупругих соударений (в частности, потери на излучение атомов и ионов);

3) плазма разряда достаточно плотная и допускает гидродинамическое описание ее компонент;

4) теплопроводность плазмы нелинейна.

В случае непрерывного оптического разряда плазма, как правило, равновесна, и описание производится при помощи уравнений гидродинамики, записываемых для скорости потока газа, его концентрации и температуры, а обусловленные наличием ионизации процессы отражаются в соответствующей температурной зависимости коэффициентов уравнения баланса энергии. Такой подход с успехом развивали в своих работах Ю.П. Райзер и С.Т. Суржиков [13–15]. Субтерагерцевый разряд характеризуется, как правило, полностью ионизированной и, зачастую, неравновесной плазмой с горячими электронами. В этом случае уравнения гидродинамики записываются для газодинамических характеристик потока ионов, при необходимости – многозарядных, с явным учетом последовательной ионизации электронным ударом. При этом давление плазмы определяется давлением горячих электронов, концентрация которых связана с концентрацией ионов в силу соотношения квазинейтральности. Такое описание в приближении бесконечно большой электронной теплопроводности реализовано в работах [16–23]. Важно отметить, что, когда динамика в ионном составе связана с последовательной ионизацией электронным ударом, в силу достаточно резкого уменьшения характерных сечений ионизации с ростом заряда иона, в одной и той же точке стационарного потока плазмы многозарядных ионов присутствуют, как правило, лишь фракции с минимальным отличием зарядовых чисел. В этой ситуации можно отказаться от описания направленной скорости каждой из ионных фракций в отдельности и перейти к описанию потока плазмы в одножидкостном приближении, считая, что в каждой точке потока направленные скорости представленных в ней ионных компонент мало отличаются друг от друга и, следовательно, от локальной средней скорости потока. Таким образом, как в случае субтерагерцевого, так и в случае оптического разряда в потоке газа описание течения плазмы может быть выполнено в приближении одножидкостной гидродинамики, причем интерес представляет в первую очередь распределение характеристик плазмы вдоль потока, для приближенного описания которых целесообразно построение квазиодномерных моделей. Нелинейность теплопроводности, указанная в качестве свойства 1), имеет в непрерывном оптическом и субтерагерцевом разряде разную природу. Теплопроводность плазмы оптического разряда определяется теплопроводностью газа, нагретого до высоких температур [24]. В полностью ионизированной плазме с горячими электронами, характерной для субтерагерцевого разряда, теплопроводность плазмы определяется нелинейной теплопроводностью электронов [25].

В целом, можно сказать, что классическая теория Ю.П. Райзера допускает прямое обобщение на интересующий нас случай субтерагерцевого разряда с многозарядными ионами введением нового эффективного уравнения состояния, которое аналогично работам [16–23] учитывало бы изменение среднего заряда ионов за счет последовательной многократной ионизации, и адекватного ситуации описания поглощения энергии излучения гиротрона. Однако в вопросе о возможности реализации стационарного течения, отвечающего тому или иному набору внешних параметров, классическое рассмотрение даже в рамках самых простых одномерных моделей предполагает решение задачи методом установления [14, 15]. В условиях, когда интерес представляют лишь характеристики установившегося течения и значения необходимых для его реализации внешних параметров, такое описание представляется избыточным.

В настоящей работе рассматривается одномерное течение простой модельной сплошной среды, обладающее свойствами 1)–4). Предложен подход, позволяющий решить задачу о структуре стационарного течения и установить необходимые для его реализации значения внешних параметров, оставаясь в рамках анализа системы стационарных уравнений гидродинамики. В частности, рассмотренная в работе модель предоставляет возможность описания в рамках одножидкостной гидродинамики стационарного течения полностью ионизированной плазмы, содержащей одну ионную компоненту и нагреваемой локализованным источником тепла [25]. Для аналогичного течения плазмы многозарядных ионов, распределение которых по зарядовым состояниям изменяется вдоль потока за счет последовательной ионизации, связь давления с концентрацией и температурой (уравнение состояния) и функция потерь энергии являются более сложными по сравнению с рассмотренными в настоящей работе, и при необходимости корректного учета связанных с последовательной ионизацией эффектов предложенная модель должна быть обобщена включением явного описания изменения концентрации каждой ионной компоненты в отдельности и зависимости потерь от ионного состава [16–19].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим стационарное одномерное течение идеального газа, задаваемое плотностью потока G и динамическим давлением p. Поток распространяется вдоль оси z, характеризуется направленной скоростью $u(z)$, концентрацией газа $n(z)$ и его температурой $T(z)$. Для описания течения будем использовать систему стационарных уравнений гидродинамики [26]

$$\frac{d}{dz}(nu) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dz}\left(mnu^2 + nT\right) = 0, \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\left(nu\left[\frac{mu^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}T\right] - \varkappa(T)\frac{dT}{dz}\right) = \\ = I\delta(z) - Q(T,n),\end{aligned} \tag{3}$$

где $\varkappa(T)$ – коэффициент (нелинейной) теплопроводности, m – масса частиц газа, γ – показатель адиабаты Пуассона. В потоке присутствует источник тепла, характеризующийся плотностью мощности I и пренебрежимо малой протяженностью по оси z, которая описывается дельта-функцией Дирака $\delta(z)$ в (3). Получаемая от источника энергия тратится на нагрев газа и теряется в результате происходящих в газе неупругих элементарных процессов, характеризуемых объемной плотностью мощности потерь $Q(T,n)$ в (3). Температурная зависимость плотности мощности потерь определяется сечениями и характерными энергиями неупругих процессов, которые носят, как правило, пороговый характер. Поэтому будем предполагать, что при уменьшении температуры ниже некоторого значения $T_{\min}$, определяемого энергиями возбуждения внутренних степеней свободы, объемная плотность мощности потерь становится нулевой, т.е. $Q(T,n) \propto \Theta(T - T_{\min})$, $\Theta(x)$ – тета-функция Хевисайда.

Уравнения (1) и (2) представляют собой законы сохранения плотности потока и динамического давления соответственно

$$nu = G, \tag{4}$$

$$mnu^2 + nT = p, \tag{5}$$

что позволяет выразить скорость потока и концентрацию газа как функции температуры. Тем самым задача сводится к нахождению зависимости $T(z)$ из уравнения баланса энергии (3).

Выражения для u и n неоднозначны и имеют две ветви

$$u^{\pm} = \frac{p}{2mG} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2mG}\right)^2 - \frac{T}{m}}, \tag{6}$$

$$n^{\pm} = G\left(\frac{p}{2mG} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2mG}\right)^2 - \frac{T}{m}}\right)^{-1}. \tag{7}$$

Знаку “–” соответствует дозвуковой режим течения, а знаку “+” – сверхзвуковой. Из выражений видно, что непрерывный переход скорости потока через скорость изотермического звука $c_s = \sqrt{T/m}$ и, соответственно, смена ветви возможны только при достижении температурой значения

$$T_{\max} = \frac{p^2}{4mG^2}, \tag{8}$$

являющегося максимально возможным для течения, определяемого данными p и G. Поскольку температура газа спадает при удалении от локализованного источника тепла, значение $T_{\max}$ может достигаться лишь на самом источнике. Таким образом, непрерывный переход между режимами возможен только в области источника тепла.

Пользуясь выражениями (6), (7) и рассматривая течение вне области источника, перепишем уравнение баланса энергии (3) в виде

$$\frac{d}{dz}\left(GT_{\max}\left[\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}\frac{T}{T_{\max}} \pm \sqrt{1 - \frac{T}{T_{\max}}}\right] - \varkappa(T)\frac{dT}{dz}\right) = -Q^{\pm}(T), \tag{9}$$

где $Q^{\pm}(T) = Q(T, n^{\pm}(T))$ – известная функция температуры, причем $Q^{\pm} = 0$ при $T < T_{\min}$. Искомое решение $T(z)$ получается в результате непрерывной “сшивки” решений (9), полученных для областей $z < 0$ и $z > 0$, в точке $z = 0$. Для корректной математической постановки задачи остается задать необходимые граничные условия.

Чтобы однозначно определить решение уравнения (9), требуется задать в некоторой точке значение температуры и ее первой производной. В рассматриваемой постановке единственным выделенным значением температуры является температура отключения объемных потерь $T_{\min}$. Поскольку плотность мощности источника тепла I конечна, температура газа снижаясь от области источника, локализованного в $z = 0$, стремится к $T_{\min}$, обеспечивая тем самым конечные объемные потери, а ее производная, соответственно, стремится к нулю

$$\lim_{T \to T_{\min}} (dT/dz) = 0. \tag{10}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае нам известна лишь связь между температурой и ее производной, выражаемая соотношением (10), но не значение этих величин в некоторой точке. Для замыкания задачи этого недостаточно.

Еще одно условие связано с тем, что плотность теплового потока на источнике тепла терпит разрыв, однозначно определяемый плотностью мощности I. Проинтегрировав уравнение баланса энергии (3) в малой окрестности точки $z = 0$, явно разрешаем данное условие относительно производной температуры

$$\left.\frac{dT}{dz}\right|_{-0} - \left.\frac{dT}{dz}\right|_{+0} = \frac{I}{\varkappa(T_0)} > 0, \tag{11}$$

где $T_0 = T(0)$ – температура газа в области источника. Здесь важно отметить, что зависимость T_0 от плотности мощности источника тепла I монотонно возрастающая. Чтобы это показать, достаточно перейти в уравнении (9) к дифференцированию по температуре T, а затем вычесть значения полученных выражений в точках $z = +0$ и

$z = -0$. Выделяя под знаком производной плотность мощности источника тепла согласно выражению (11), получаем

$$\frac{dI}{dT_0} = Q^{\pm}(T_0)\left(\left.\frac{dT}{dz}\right|_{+0} - \left.\frac{dT}{dz}\right|_{-0}\right)\times \times\left(\left.\frac{dT}{dz}\right|_{-0}\left.\frac{dT}{dz}\right|_{+0}\right)^{-1} > 0 \Rightarrow \frac{dT_0}{dI} > 0. \quad (12)$$

Таким образом, соответствие между плотностью мощности и температурой газа в области источника является взаимно однозначным на области определения dI/dT_0.

3. ТЕЧЕНИЯ БЕЗ ПЕРЕХОДА ЧЕРЕЗ ЗВУКОВОЙ БАРЬЕР

Поскольку коэффициенты уравнения (9) не содержат координаты z в явном виде, дальнейший анализ удобно произвести с помощью фазовой плоскости $\{T, W = dT/dz\}$. Для ее построения перейдем от уравнения второго порядка (9) к системе двух уравнений первого порядка и разрешим их относительно производных

$$\frac{dT}{dz} = W, \quad \frac{dW}{dz} = F(T,W), \quad (13)$$

где функция $F(T,W)$ дается выражением

$$F(T,W) = \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \mp \frac{1}{\sqrt{1 - T/T_{\max}}}\right)\frac{GW}{2\varkappa(T)} - - \frac{W^2}{\varkappa(T)}\frac{d\varkappa(T)}{dT} + \frac{Q^{\pm}(T)}{\varkappa(T)}. \quad (14)$$

Дозвуковому течению отвечает выражение с $Q^{-}(T)$, сверхзвуковому – выражение с $Q^{+}(T)$. Характерные фазовые портреты дозвукового и сверхзвукового течений представлены на рис. 1а и б.

Разделив друг на друга выражения для dW/dz и dT/dz из (13) можно записать уравнение, которому удовлетворяют фазовые траектории $W(T)$

$$\frac{dW}{dT} = W^{-1}F(T,W). \quad (15)$$

Данная возможность также – следствие того, что коэффициенты уравнения (9) не являются явными функциями z. В соответствии с условием (10) для тех фазовых траекторий, которые удовлетворяют рассматриваемой постановке, справедливо $W \to 0$ при $T \to T_{\min}$. Однако для практического отыскания этих траекторий данное условие не применимо. Точка $\{T_{\min}, 0\}$ является особенной, и условие (10) выделяет сразу две различных фазовых траектории, одна из которых целиком лежит в верхней фазовой полуплоскости $W > 0$, а другая в нижней $W < 0$. Физически первая из них отвечает решению (9) в области $z < 0$, где производная температуры положительна, а вторая – решению в области $z > 0$, где производная температуры отрицательна. Задать в явном виде два граничных условия, которые однозначно определяют каждую из искомых фазовых траекторий в отдельности, можно, например, найдя асимптотики решений (15) при $T \to T_{\min}$. В этом случае граничные условия задаются при температуре T^*, близкой к $T_{\min}$, но слегка ее превосходящей, а значит, в обход особенности. Соответствующая техника представлена в Приложении А и используется нами для практического отыскания при помощи уравнения (15) фазовых траекторий, удовлетворяющих (10).

Таким образом, находим четыре фазовых траектории, отвечающих рассматриваемой постановке: по две для дозвукового и сверхзвукового режимов течения. Траектория $W^{-}_{<}(T)$ в верхней полуплоскости $dT/dz > 0$ соответствует зависимости производной температуры газа от самой этой температуры при $z < 0$, т.е. в дозвуковом режиме выше по течению относительно источника, расположенного в $z = 0$. Траектория $W^{-}_{>}(T)$ в нижней полуплоскости $dT/dz < 0$ соответствует зависимости при $z > 0$, отвечающей дозвуковому течению ниже источника. Аналогично, траектории $W^{+}_{<}(T)$ и $W^{+}_{>}(T)$ отвечают зависимостям производной температуры газа от самой этой температуры в сверхзвуковом режиме выше и ниже источника, соответственно.

Подставляя найденные фазовые траектории в условие (11), определяем на отрезке $T_{\min} \le T_0 \le \le T_{\max}(G, p)$ функцию

$$I^{\pm}(T_0) = \varkappa(T_0)\left[W^{\pm}_{<}(T_0) - W^{\pm}_{>}(T_0)\right]. \quad (16)$$

Данная функция монотонно возрастает с увеличением температуры на источнике T_0 и имеет область значений

$$0 \le I^{\pm} \le I^{\pm}_{\max}(G, p) = I^{\pm}(T_{\max}). \quad (17)$$

Если I превосходит $I^{\pm}_{\max}(G, p)$, то для данного сочетания плотности мощности источника тепла I, плотности потока G и динамического давления p реализация стационарного течения без звукового перехода невозможна. Если плотность мощности I меньше $I^{\pm}_{\max}$, то, обращая зависимость (16), получаем соответствующее значение температуры газа в области источника тепла для дозвукового (T_0^{-}) или сверхзвукового (T_0^{+}) течения. По известным фазовым траекториям $W^{\pm}_{<}(T)$ и $W^{\pm}_{>}(T)$ можно восстановить значение производной температуры dT/dz при $T = T_0^{\pm}$, т.е. в $z = +0$ и $z = -0$. В ре-

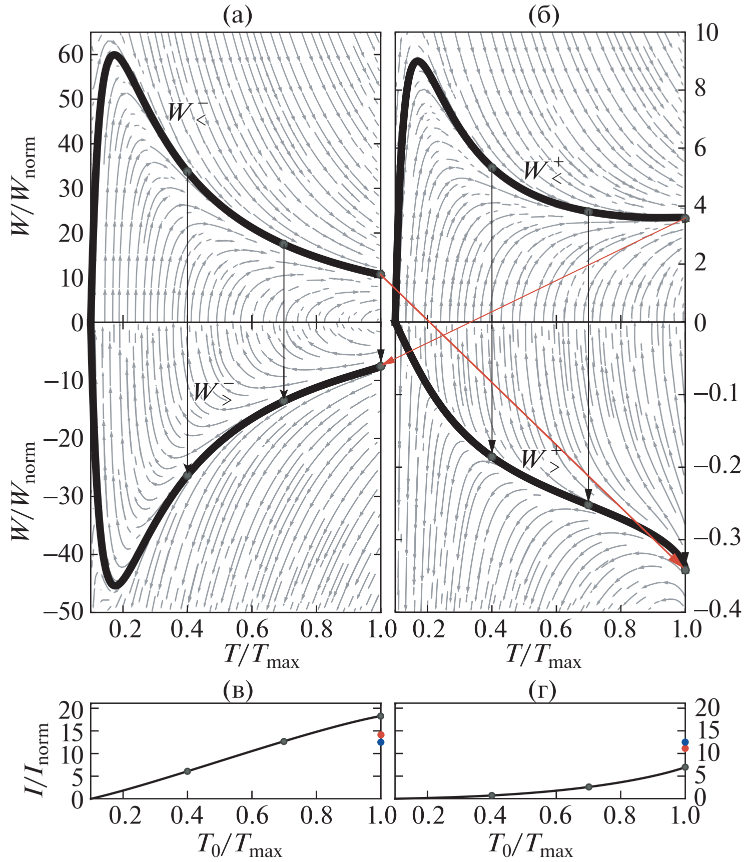

Рис. 1. Фазовая плоскость уравнения (9) для дозвукового (а) и сверхзвукового (б) режимов течения и отвечающие им законы соответствия между допустимыми значениями плотности мощности I и температурой газа в области источника T_0 (в, г). Для фазовых портретов при $W < 0$ и $W > 0$ выбран различный масштаб вертикальной оси в целях удобства анализа рисунка. Фазовые траектории $W_<^{\pm}$ и $W_>^{\pm}$, выделяемые условием (10), показаны на (а) и (б) жирными черными линиями, остальные траектории показаны серыми линиями со стрелками, указывающими направление увеличения координаты z. Черными стрелками показаны переходы между траекториями $W_<^- \to W_>^-$ (а) и $W_<^+ \to W_>^+$ (б), отвечающие течениям без перехода через звуковой барьер и соответствующие плотностям мощности источника I и температурам газа в области источника T_0, отмеченным черными точками на (в) и (г). Красными стрелками показаны переходы $W_<^- \to W_>^- \to W_>^+$ и $W_<^+ \to W_>^-$, отвечающие течениям с переходом через звуковой барьер. Необходимые для этих переходов $I^{-\to+}$ и $I^{+\to-}$ показаны красными точками на (в) и (г), значение (31) – синей точкой. Нормировки: $W_{\text{norm}} = G\varkappa_0^{-1}T_{\max}^{-3/2}$, $I_{\text{norm}} = GT_{\max}$.

зультате, задание плотности потока G, динамического давления p и совместного с ними значения плотности мощности источника тепла $I < I_{\max}^{\pm}$ приводит в силу условий (10), (11) к постановке задач Коши для уравнения (9) в областях $z > 0$ и $z < 0$

$$\left.\frac{dT}{dz}\right|_{+0} = W_>^{\pm}\left(T_0^{\pm}\right), \quad T(+0) = T_0^{\pm}, \tag{18}$$

$$\left.\frac{dT}{dz}\right|_{-0} = W_<^{\pm}(T_0^{\pm}), \quad T(-0) = T_0^{\pm}. \tag{19}$$

Их решения сшиваются между собой в $z = 0$, образуя тем самым решение $T^{\pm}(z)$ исходного уравнения баланса энергии (3). Подстановка найденного $T^{\pm}(z)$ в соотношения (6) и (7) определяет концентрации газа $n^{\pm}(z)$ и скорости потока $u^{\pm}(z)$, что завершает формальное решение задачи.

В качестве иллюстрации на рис. 2 и 3 приведены примеры расчетов пространственных профилей газодинамических характеристик дозвуковых и сверхзвуковых течений, соответствующих выделенным на рис. 1 значениям плотности мощности источника тепла. При построении всех ри-

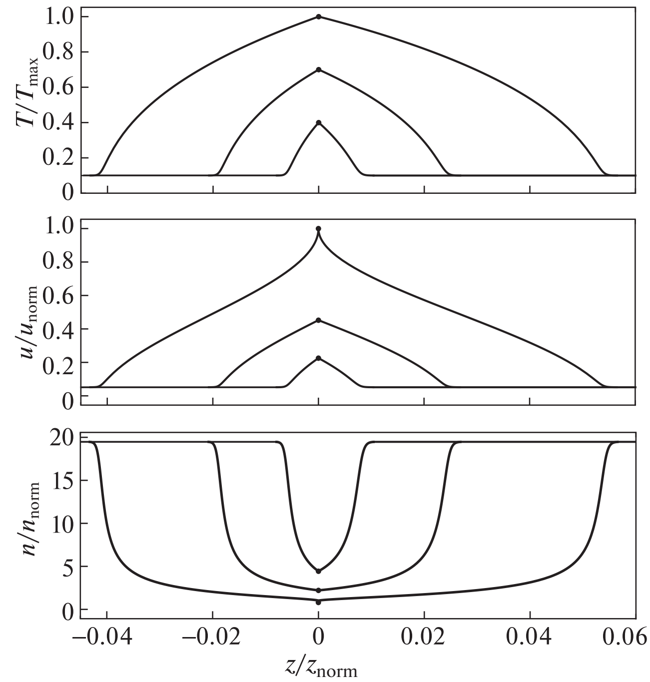

Рис. 2. Зависимость температуры, скорости потока и концентрации частиц от координаты z для дозвуковых течений, соответствующих выделенным черными точками на рис. 1в значениям плотности мощности источника тепла. Нормировки: $u_{\text{norm}} = \sqrt{T_{\max}/m}$, $n_{\text{norm}} = G\sqrt{m/T_{\max}}$, $z_{\text{norm}} = \varkappa_0 T_{\max}^{5/2}/G$.

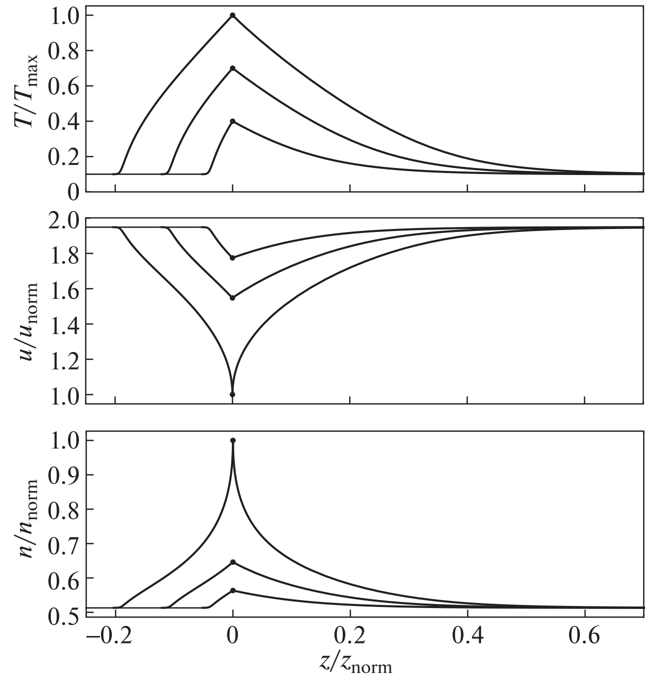

Рис. 3. То же, что и рис. 2, для сверхзвуковых течений, соответствующих значениям плотности мощности источника тепла, выделенным черными точками на рис. 1г.

сунков используется зависимость $\varkappa(T) = \varkappa_0 T^{5/2}$, $\varkappa_0 = \text{const}$, что соответствует электронной теплопроводности полностью ионизированной плазмы [25]. Функция потерь $Q(T,n)$ берется пропорциональной квадрату концентрации частиц, что соответствует потерям за счет парных соударений, и задается выражением

$$Q(T,n) = \alpha(T)\frac{n^2 T_{\max}}{mG^2}Q_{\text{ref}}, \tag{20}$$

где температурная зависимость $\alpha(T)$ нормирована на единицу и на исследуемом отрезке $T_{\min} \le \le T \le T_{\max}$ берется линейной $\alpha(T) = [(T - T_{\min})/ /(T_{\max} - T_{\min})]\Theta(T - T_{\min})$, отношение $T_{\min}/T_{\max} = = 0.1$, величина Q_{ref} имеет смысл объемной плотности мощности потерь в $T = T_{\max}$, при построении рисунков берется $Q_{\text{ref}} = 50\, G^2/\varkappa_0 T_{\max}^{3/2}$. Графики демонстрируют типичные для дозвукового и сверхзвукового течений зависимости скорости и концентрации газа вдоль потока [26–28]. Нагрев газа в дозвуковом режиме сопровождается увеличением скорости и уменьшением концентрации, в сверхзвуковом – уменьшением скорости и увеличением концентрации. При охлаждении газа зависимости инвертированы: дозвуковой режим характеризуется уменьшением скорости и увеличением концентрации, сверхзвуковой – увеличением скорости и уменьшением концентрации. Скорость, таким образом, растет к области источника тепла в дозвуковом режиме и убывает в сверхзвуковом. Концентрация, напротив, в дозвуковом имеет минимум на источнике, а в сверхзвуковом – максимум.

4. ТЕЧЕНИЯ С ПЕРЕХОДОМ ЧЕРЕЗ ЗВУКОВОЙ БАРЬЕР

Непрерывный переход скорости потока через скорость звука возможен в силу (6) только в окрестности источника тепла. Фазовый портрет такого течения представляет собой сшивку верхней фазовой полуплоскости, отвечающей одному режиму, с нижней фазовой полуплоскостью другого (крест-накрест). Переход между соответствующими фазовыми траекториями происходит при строго определенной температуре источника $T_0 = T_{\max}$. Для перехода из дозвукового режима в сверхзвуковой это переход между фазовыми траекториями $W_<^-$ и $W_>^+$. Для перехода от сверхзвукового течения к дозвуковому – между $W_<^+$ и $W_>^-$. Требуемые для данных переходов мощности так-

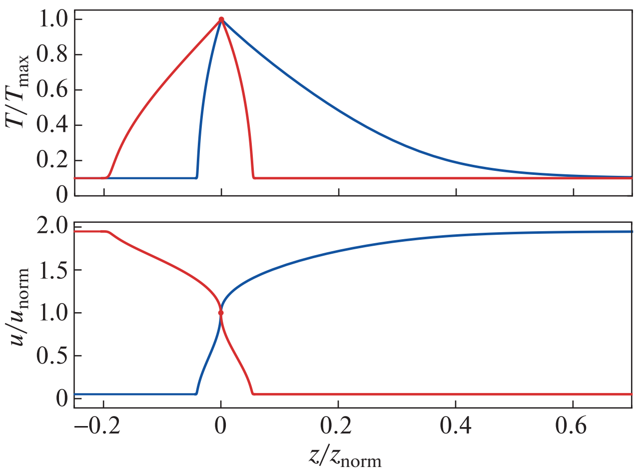

Рис. 4. Зависимость температуры газа и скорости потока от пространственной координаты z для течений с переходом через звуковой барьер, соответствующих значениям плотности мощности источника тепла, показанных красными точками на рис. 1в (синяя кривая) и рис. 1г. (красная кривая). Нормировки: $u_{\text{norm}} = \sqrt{T_{\max}/m}$, $z_{\text{norm}} = \varkappa_0 T_{\max}^{5/2}/G$.

же должны принимать строго определенные (для данных p и G) значения

$$I^{-\to+} = \varkappa(T_{\max})\left[W_<^-(T_{\max}) - W_>^+(T_{\max})\right], \quad (21)$$

$$I^{+\to-} = \varkappa(T_{\max})\left[W_<^+(T_{\max}) - W_>^-(T_{\max})\right]. \quad (22)$$

На рис. 4 приведены пространственные профили температуры и скорости для течений с переходом через звуковой барьер. Отвечающие им переходы между фазовыми траекториями и необходимые для них мощности показаны на рис. 1 красными стрелками и красными точками соответственно.

5. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

При конкретной зависимости теплопроводности от температуры $\varkappa(T)$ решение уравнений (1)—(3) в рассмотренной постановке зависит от двух безразмерных параметров: нормированной плотности мощности источника тепла $I/GT_{\max}$ и параметра

$$R_q = \frac{Q\varkappa(T_{\max})}{G^2 T_{\max}}, \quad (23)$$

являющегося характерным отношением плотности потока энергии за счет теплопроводности к плотности потока энергии за счет конвекции. Убедиться в этом можно, нормировав газодинамические характеристики и координату z в уравнениях (1)—(3). Нормировки: $T_{\text{norm}} = T_{\max}$, $u_{\text{norm}} = \sqrt{T_{\max}/m}$, $n_{\text{norm}} = G\sqrt{m/T_{\max}}$, $z_{\text{norm}} = \varkappa(T_{\max})/G$.

Для субтерагерцевых разрядов отношение (23), как правило, является числом, много большим единицы. Так, при давлениях $p \sim 0.1$ атм, линейных размерах разряда $l \sim 100$ мкм, потоках частиц $Gl^2 \sim 10^{18}$ с$^{-1}$ и полной мощности излучения $Ql^3 \sim 100$ Вт, характерных для разряда в потоке ксенона из экспериментов [5] оценка параметра R_q по (23) с коэффициентом теплопроводности $\varkappa(T) = \varkappa_0 T^{5/2}$, соответствующим полностью ионизированной плазме, параметром $\varkappa_0 \approx 3.5 \times 10^{31}$ см$^{-3}$ · эВ$^{-3/2}$ · г$^{-1}$ · с, вычисленным согласно [25], массой иона ксенона $m = 2.2 \times 10^{-22}$ г и $T_{\max}$ из (8) дает

$$R_q = \frac{Q\varkappa_0 p^3}{8G^5 m^{3/2}} \approx 50. \quad (24)$$

В случае увеличения давления, например, при увеличении частоты греющего субтерагерцевого излучения, данное число быстро растет, как куб давления. Используемый при построении иллюстраций параметр $Q_{\text{ref}} = 50G^2/\varkappa_0 T_{\max}^{3/2}$ призван отразить это обстоятельство; параметры в приводимых примерах обеспечивают достаточно высокие характерные значения R_q.

В приближении $R_q \gg 1$ возможен ряд упрощений. В частности, для зависимостей (16) мощности источника тепла $I^{\pm}$ от температуры T_0 в $z = 0$ можно получить приближенное выражение в квадратурах. Для этого пренебрежем в (14) конвективным потоком энергии. Уравнение (15) перепишется в виде

$$W\frac{d}{dT}(\varkappa(T)W) \approx Q^{\pm}(T). \quad (25)$$

Решением данного уравнения будут четыре функции

$$\widetilde{W}_<^-(T) = \sqrt{2}\varkappa(T)^{-1}\left(\int\limits_{T_{\min}}^{T} \varkappa(T')Q^-(T')\,dT'\right)^{1/2}, \quad (26)$$

$$\widetilde{W}_<^+(T) = \sqrt{2}\varkappa(T)^{-1}\left(\int\limits_{T_{\min}}^{T} \varkappa(T')Q^+(T')\,dT'\right)^{1/2}, \quad (27)$$

$$\widetilde{W}_>^+(T) = -\sqrt{2}\varkappa(T)^{-1}\left(\int\limits_{T_{\min}}^{T} \varkappa(T')Q^-(T')\,dT'\right)^{1/2}, \quad (28)$$

$$\widetilde{W}_>^+(T) = -\sqrt{2}\varkappa(T)^{-1}\left(\int\limits_{T_{\min}}^{T} \varkappa(T')Q^+(T')\,dT'\right)^{1/2}, \quad (29)$$

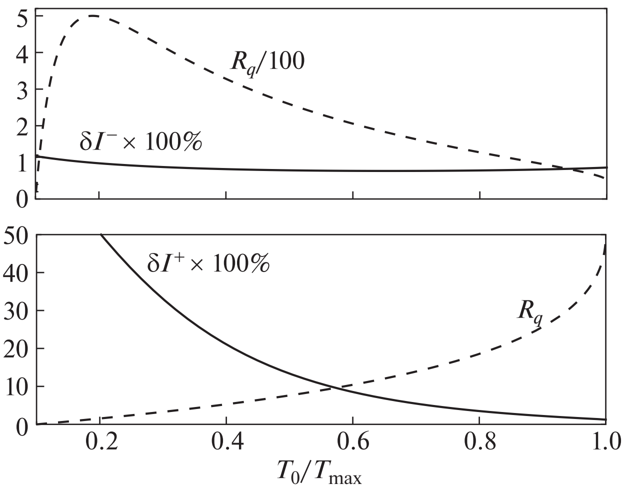

Рис. 5. Относительные погрешности $\delta I^{\pm} = 1 - I^{\pm}_{(30)}/I^{\pm}_{(16)}$ приближенного выражения (30), построенные для параметров рис. 1(в, г), и соответствующие значения R_q в области источника. Здесь $I^{\pm}_{(30)}$ – приближенное значение $I^{\pm}(T_0)$ по (30), $I^{\pm}_{(16)}$ – точное значение $I^{\pm}(T_0)$ по (16).

подставив которые вместо $W^{\pm}_{\gtrless}$ в выражение (16), получим

$$I^{\pm}(T_0) \approx 2\sqrt{2}\left(\int_{T_{\min}}^{T_0} \varkappa(T')Q^{\pm}(T')\,dT'\right)^{1/2}. \quad (30)$$

Данные приближенные выражения практически во всей области определения довольно точно воспроизводят примеры зависимостей, изображенные на рис. 1в, г. Для удобства сравнения, на рис. 5 построены соответствующие графики относительной погрешности, а также зависимость R_q в области источника от T_0. Видно, что ошибка существенна лишь для сверхзвуковых течений при $T_0 \ll T_{\max}$, где характерные R_q малы за счет низкой концентрации частиц.

Воспользовавшись выражением (30), значения $I^{\pm}(T_0)$ в пределе больших R_q можно упорядочить. Для этого вспомним, что согласно выражению (7) на интервале $T_{\min} < T < T_{\max}$ справедливо $n^+ < n^-$. Значит, если Q растет с увеличением n, то $Q^+ < Q^-$. Следовательно, в силу выражения (30) имеем $I^+(T_0) < I^-(T_0)$, причем поскольку (30) есть интеграл как функция верхнего предела, утверждение распространяется в том числе на верхние граничные значения $I^+(T_{\max})$ и $I^-(T_{\max})$, т.е. $I^+_{\max} < I^-_{\max}$.

Приближенное выражение, аналогичное (30), можно получить для значений плотности мощности источника $I^{-\to+}$, необходимой для перехода из дозвукового в сверхзвуковой режим, и $I^{+\to-}$, необходимой для перехода из сверхзвукового режима в дозвуковой. Для этого подставим $\widetilde{W}^{\pm}_{\gtrless}$ вместо $W^{\pm}_{\gtrless}$ в выражения (21) и (22)

$$I^{-\to+} \approx I^{+\to-} \approx \sqrt{2}\left(\int_{T_{\min}}^{T_{\max}} \varkappa(T')Q^-(T')\,dT'\right)^{1/2} + \\ + \sqrt{2}\left(\int_{T_{\min}}^{T_{\max}} \varkappa(T')Q^+(T')\,dT'\right)^{1/2}. \quad (31)$$

Величины $I^{-\to+}$ и $I^{+\to-}$, найденные в приближении $R_q \gg 1$, получаются равными и делят пополам интервал $\left(I^+_{\max}, I^-_{\max}\right)$. Соответствующее значение показано синей точкой на рис. 1в, г. Небольшое различие между (31) и точными значениями (21) и (22) связано с наличием конвекции: для ускорения дозвукового потока до сверхзвуковых скоростей требуется несколько более высокая мощность, чем задаваемая (31), и, наоборот, в случае замедления сверхзвукового потока и организации перехода в дозвуковой режим требуется мощность, слегка меньшая чем (31). Таким образом, при $R_q \gg 1$ все четыре характерных значения однозначно упорядочены: $I^+_{\max} < I^{+\to-} < I^{-\to+} < I^-_{\max}$.

Возможность реализации стационарного течения и его тип определяются оставшимся управляющим параметром – плотностью мощности источника тепла I. Анализ данного вопроса удобно произвести, расположив значения $I^+_{\max}$, $I^{+\to-}$, $I^{-\to+}$ и $I^-_{\max}$ на числовой прямой и выделив области возможной реализации тех или иных течений. Для $R_q \gg 1$ это сделано на рис. 6. Видим, что в данном случае можно выделить три характерных области значений плотности мощности источника тепла.

1. При $I \le I^+_{\max}$ возможна реализация как дозвукового, так и сверхзвукового течений без звукового перехода.

2. При $I^+_{\max} < I \le I^-_{\max}$ возможна реализация дозвукового течения без звукового перехода, а также для выделенных значений плотности мощности возможны течения со звуковым переходом – из дозвукового в сверхзвуковой режим при $I = I^{-\to+}$ и из сверхзвукового в дозвуковой при $I = I^{+\to-}$.

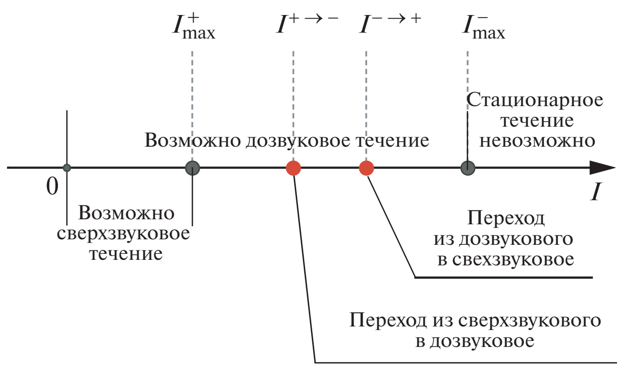

Рис. 6. Схема взаимного расположения характерных значений плотности мощности I при $R_q \gg 1$.

3. При $I > I^-_{\max}$ стационарное течение невозможно.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанная модель позволяет установить возможность реализации и определить газодинамические характеристики стационарного одномерного течения идеального газа с нелинейной теплопроводностью и объемными потерями энергии в присутствии локализованного источника тепла. Предложенный в работе подход к заданию граничных условий для уравнения баланса энергии по известной мощности энерговклада является достаточно общим и, после соответствующей модификации модели, может быть применен и полезен при решении широкого круга задач физики плазмы, связанных с описанием стационарных течений сред, обладающих более сложными уравнениями состояния и функциями потерь. Наиболее интересным с точки зрения приложений представляется применение изложенного подхода для описания субтерагерцевого разряда в потоке газа с образованием плотной сильно излучающей плазмы, ионный состав которой изменяется вследствие последовательной ионизации электронным ударом.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПФ РАН (код-шифр тематики FFUF-2023-0002). Исследования И.С. Абрамова поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 19-32-90019).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Перепишем уравнение (9) для температуры, слегка превосходящей температуру отключения потерь $T_{\min}$, и разрешим его относительно малого отклонения $\delta T = T - T_{\min} \ll T_{\max}$, в области $\delta T > 0$:

$$\frac{d^2\delta T}{dz^2} = a^{\pm}\frac{d\delta T}{dz} + b^{\pm}\delta T^{\lambda}, \tag{32}$$

где коэффициенты $a^{\pm}$ и $b^{\pm}$ определяются выражениями

$$a^{\pm} = \frac{G}{2\varkappa(T_{\min})}\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \mp \sqrt{\frac{T_{\max}}{T_{\max}-T_{\min}}}\right], \qquad b^{\pm} = \frac{\beta^{\pm}}{\varkappa(T_{\min})}. \tag{33}$$

Функция $\beta^{\pm}\delta T^{\lambda}$ представляет собой асимптотику функции потерь $Q^{\pm}(T)$ при стремлении $T \to T_{\min}$ справа, $\beta^{\pm} = \mathrm{const}$. Различные диапазоны λ соответствуют трем качественно разным ситуациям, когда выключение потерь происходит при нулевой $(\lambda > 1)$, конечной $(\lambda = 1)$ и бесконечной $(\lambda < 1)$ производной функции потерь $dQ^{\pm}(T)/dT$ в точке $T = T_{\min}$.

Если пренебречь в уравнении (32) слагаемым с первой производной $d\delta T/dz$, то уравнение можно переписать для поиска соответствующих асимптотик искомых фазовых траекторий

$$\frac{d}{dT}\left(\frac{W^2}{2}\right) = b^{\pm}\delta T^{\lambda}. \tag{34}$$

Решив его, можем задать по два условия для каждого из режимов течения

$$W(T^*) = \left(\frac{2b^{\pm}(T^* - T_{\min})^{\lambda+1}}{\lambda+1}\right)^{1/2}, \tag{35}$$

$$W(T^*) = -\left(\frac{2b^{\pm}(T^* - T_{\min})^{\lambda+1}}{\lambda+1}\right)^{1/2}, \tag{36}$$

где T^* такова, что $T^* - T_{\min} \ll T_{\max}$. Условия (35) и (36) выделяют фазовые траектории, отвечающие (10), в верхней и нижней фазовой полуплоскости соответственно. Подставив решение уравнения (34) в исходное уравнение (32) и сравнив порядки малости слагаемых по δT, видим, что пренебрежение слагаемым с первой производной справедливо для случая $\lambda < 1$. Формулы (35) и (36) будут также справедливы в вырожденном случае равенства нулю коэффициента $a^{\pm}$ перед первой производной $d\delta T/dz$.

Если пренебречь в уравнении (32) слагаемым со второй производной $d^2\delta T/dz^2$, оставшиеся слагаемые непосредственно дадут асимптотику фазовых траекторий

$$W(T^*) = -\frac{b^{\pm}}{a^{\pm}}(T^* - T_{\min})^{\lambda}, \tag{37}$$

справедливую при $\lambda > 1$, что также проверяется подстановкой в (32) и сравнением порядков малости слагаемых. Видно, однако, что условие (37) задает решения для дозвукового и сверхзвукового режимов, но лишь в одной из фазовых полуплоскостей: нижней, если $a^{\pm} > 0$, и верхней, если $a^{\pm} < 0$. Чтобы задать условие для отыскания фазовых траекторий, принадлежащих другой полуплоскости, необходимо пренебречь в уравнении (32) диссипативным слагаемым

$$dW/dT = a^{\pm}. \tag{38}$$

Решив это уравнение, формулируем условие

$$W(T^*) = a^{\pm}(T^* - T_{\min}). \tag{39}$$

Подставляя решение уравнения (38) в (32), убеждаемся, что условие (39), как и (37), справедливо для случая $\lambda > 1$. Таким образом, при $\lambda > 1$ комбинация условий (37) и (39) выделяет все искомые фазовые траектории.

В случае $\lambda = 1$ все слагаемые (32) одного порядка малости. Общее решение $\delta T(z)$ состоит из двух слагаемых

$$\delta T(z) = \delta T_1(z) + \delta T_2(z), \tag{40}$$

$$\delta T_1(z) = C_1 \exp\left[\left(\frac{a^{\pm}}{2} - \sqrt{\left(\frac{a^{\pm}}{2}\right)^2 + b^{\pm}}\right) z\right], \tag{41}$$

$$\delta T_2(z) = C_2 \exp\left[\left(\frac{a^{\pm}}{2} + \sqrt{\left(\frac{a^{\pm}}{2}\right)^2 + b^{\pm}}\right) z\right], \tag{42}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. В зависимости от знака $a^{\pm}$, одна из экспонент (41) и (42) убывающая, другая – возрастающая. Поскольку вне источника тепла производная температуры не может менять знак, одна из двух произвольных постоянных, C_1 или C_2, в каждом из случаев равна нулю: решению в области $z > 0$ отвечает убывающая экспонента, а в области $z < 0$ – возрастающая. Дифференцируя (41) и (42) по z, получим условия

$$W(T^*) = \left(\frac{a^{\pm}}{2} - \sqrt{\left(\frac{a^{\pm}}{2}\right)^2 + b^{\pm}}\right)(T^* - T_{\min}), \tag{43}$$

$$W(T^*) = \left(\frac{a^{\pm}}{2} + \sqrt{\left(\frac{a^{\pm}}{2}\right)^2 + b^{\pm}}\right)(T^* - T_{\min}), \tag{44}$$

выделяющие все искомые фазовые траектории в случае $\lambda = 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mansfeld D., Sintsov S., Chekmarev N., Vodopyanov A.* // J. CO2 Util. 2020. V. 40. P. 101197.
2. *Sintsov S.V., Vodopyanov A.V., Viktorov M.E., Morozkin M.V. and Glyavin M.Yu.* // J. Infrared Millim. Terahertz Waves. 2020. V. 41. P. 711.
3. *Vodopyanov A.V., Mansfeld D.A., Chekmarev N.V., Viktorov M.E., Nikolaev A.G., Yushkov G.Yu.* // Proc. SPIE. 2020. V. 11582. P. 115820Z-1.
4. *Vodopyanov A.V., Sidorov A.V., Razin S.V., Dubinov I.D., Sintsov S.V., Proyavin M.D., Morozkin M.V., Fokin A.P., Glyavin M.Yu.* // Proc. of 43rd Internat. Confer. on Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves. 2018. P. 8510395.
5. *Shalashov A.G., Vodopyanov A.V., Abramov I.S., Sidorov A.V., Gospodchikov E.D., Razin S.V., Chkhalo N.I., Salashchenko N.N., Glyavin M.Yu., and Golubev S.V.* // Appl. Phys. Lett. 2018. V. 113. P. 153502.
6. *Thumm M.* // J. Infrared Millim. Terahertz Waves. 2020. V. 41. P. 1.
7. *Glyavin M.Yu., Golubev S.V., Izotov I.V., Litvak A.G., Luchinin A.G., Razin S.V., Sidorov A.V., Skalyga V.A., and Vodopyanov A.V.* // Appl. Phys. Lett. 2014. V. 105 P. 174101.
8. *Brown I.G.*. The Physics and Technology of Ion Sources. WILEY-VCH Verlag GmbH and Co. KGaA, 2004.
9. *Bakshi V.* EUV Lithography. Second Edition. Bellingnham, WA: SPIE, 2018.
10. *Райзер Ю.П.* // Физика газового разряда. – 3-е изд. перераб. и доп. Долгопрудный: Издательский дом “Интеллект”, 2009. С. 537.
11. *Райзер Ю.П.* // Письма в ЖЭТФ. 1970. Т. 11. С. 195.
12. *Герасименко М.В., Козлов Г.И., Кузнецов В.А.* // Квантовая электроника. 1983. Т. 10. С. 709.
13. *Райзер Ю.П.* // УФН. 1980. Т. 132. С. 549.
14. *Райзер Ю.П., Суржиков С.Т.* // Квантовая электроника. 1984. Т. 11. С. 2301.
15. *Райзер Ю.П., Суржиков С.Т.* // ТВТ. 1985. Т. 23. С. 29.
16. *Abramov I.S., Gospodchikov E.D., Shalashov A.G.* // Phys. Rev. Applied. 2018. V. 10. P. 034065.
17. *Шалашов А.Г., Абрамов И.С., Голубев С.В., Господчиков Е.Д.* // ЖЭТФ. 2016. Т. 150 (2). С. 254.
18. *Shalashov A.G., Golubev S.V., Abramov I.S., Gospodchikov E.D.* AIP Conf. Proc. 2016. V. 1771 (1). P. 070001.
19. *Абрамов И.С., Господчиков Е.Д., Шалашов А.Г.* // Изв. вузов. Радиофизика. 2015. Т. 58 (12). С. 1022.

20. *Chkhalo N.I., Salashchenko N.N., Golubev S.V., Mansfeld D., Vodopyanov A.V., Sjmaenok L.* // J. Micro/Nanolithogr. MEMS MOEMS. 2012. V. 11 (2). P. 021123.
21. *Боханов А.Ф., Зорин В.Г., Изотов И.В., Разин С.В., Сидоров А.В., Скалыга В.А.* // Физика плазмы. 2007. Т. 33 (5). С. 387.
22. *Semenov V., Skalyga V., Smirnov A., Zorin V.* // Rev. Sci. Instrum. 2002. V. 73 (2). P. 635.
23. *Golubev S.V., Razin S.V., Semenov V.E., Smirnov A.N., Vodopyanov A.V., Zorin V.G.* // Rev. Sci. Instrum. 2000. V. 71 (2). P. 669.
24. *Соколова И.М.* // ПМТФ. 1973. Т. 2. С. 80.
25. *Брагинский С.И.* // Вопросы теории плазмы. Вып. 1. М.: Атомиздат, 1963. С. 183.
26. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика. 3-е изд., перераб. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.
27. *Лойцянский Л.Г.* // Механика жидкости и газа: Учеб. для вузов. 7-е изд., испр. М.: Дрофа, 2003. С. 120.
28. *Чукбар К.В.* // ВАНТ. Сер. Термоядерный синтез. 2021. Т. 44 (3). С. 107.