

**МНОГОГРУППОВАЯ МОДЕЛЬ РАСЧЕТА КИНЕТИКИ  
БЫСТРЫХ ЭЛЕКТРОНОВ В СЛАБОИОНИЗОВАННОЙ  
ХОЛОДНОЙ ПЛАЗМЕ**

© 2023 г. Е. И. Бочков\*

*Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт  
экспериментальной физики, Саров, Нижегородская область, Россия**\*e-mail: e\_i\_bochkov@mail.ru*

Поступила в редакцию 05.10.2022 г.

После доработки 24.10.2022 г.

Принята к публикации 26.10.2022 г.

Получена система одномерных многогрупповых уравнений для трех первых моментов функции распределения электронов в области промежуточных и высоких энергий, которая включает в себя уравнения баланса концентрации, плотности потока и плотности потока импульса электронов. Система предназначена для численного моделирования процессов, протекающих с участием быстрых электронов в слабоионизованной холодной плазме.

*Ключевые слова:* слабоионизованная плазма, высокоэнергичные электроны, многогрупповые уравнения, численное моделирование

**DOI:** 10.31857/S0367292122601254, **EDN:** NPQOLU**1. ВВЕДЕНИЕ**

Наиболее полная информация, необходимая для описания плазменных процессов может быть получена из функции распределения электронов (ФРЭ), которая рассчитывается в результате решения кинетического уравнения (КУ) [1] или методом Монте-Карло (МК) [2]. Однако численное моделирование непосредственно на основе КУ или метода МК требует больших вычислительных ресурсов. Эффективнее моделирование в приближении сплошной среды на основе системы уравнений для моментов ФРЭ [3]. Чаще всего при моделировании газовых разрядов транспорт электронов рассчитывается на основе уравнения баланса концентрации электронов в рамках диффузионно-дрейфового приближения. Недостатком данного подхода является неспособность описать энергетическое распределение электронов, в том числе кинетику убегающих электронов. Кроме того в сильных электрических полях диффузионно-дрейфовое приближение для концентрации электронов становится неприменимым в связи с появлением большого числа быстрых электронов. Так результаты МК-расчетов развития в однородном электрическом поле лавины электронов показывают, что в гелии диффузионно-дрейфовое приближение для концентрации электронов становится неприменимым в полях больших  $\approx 150\text{--}200$  Тд [4].

С целью сокращения требования к вычислительным ресурсам, с одной стороны, и необходимостью учета кинетики быстрых электронов, с другой стороны, развиваются гибридные модели расчета транспорта электронов в газах [5–9]. Наиболее приближенной к КУ является модель с многогрупповым описанием кинетики электронов на основе гидродинамических уравнений для моментов ФРЭ [10]. В [10] получена система многогрупповых уравнений для трех первых моментов функции распределения релятивистских электронов, т.е. электронов с энергией большей порядка 10 кэВ. Система включает уравнения баланса концентрации, уравнения движения и уравнения баланса полной релятивистской энергии. Как показывают результаты численных расчетов, многогрупповая модель с хорошей точностью описывает пространственное и энергетическое распределение релятивистских электронов [11, 12].

Цель данной работы – расширить область применимости многогрупповой модели. Используя дифференциальное разложение интеграла упругих столкновений электронов, полученное в [13], и процедуру, развитую в [10], в данной работе выполнен вывод системы многогрупповых уравнений, которая справедлива начиная с энергий электрона  $\sim 100$  эВ. Система включает уравнения баланса концентрации, плотности потока и плотности потока импульса электронов.

## 2. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Здесь будем рассматривать случай слабоионизованного газа, когда столкновениями электронов друг с другом и с ионами можно пренебречь. Учитываются только упругие и неупругие столкновения электронов с нейтральными атомами или молекулами газа. Кроме того полагается, что плазма однородна в направлении перпендикулярном относительно вектора напряженности внешнего электрического поля  $\mathbf{E}$ . Это значит, что ФРЭ в пространстве импульсов зависит только от модуля импульса электрона  $p$ , косинуса  $\mu$  угла  $\theta$  между вектором импульса  $\mathbf{p}$  и единичным вектором в направлении электрической силы  $\mathbf{e} = -\mathbf{E}/E$  и не зависит от азимутального угла  $\phi$ . Направим ось  $OZ$  в координатном пространстве вдоль вектора  $\mathbf{e}$ , в этом случае ФРЕ будет зависеть только от переменных  $(z, p, \mu, t)$  и ее эволюция будет подчиняться кинетическому уравнению:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f(z, p, \mu, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} [\mu v f(z, p, \mu, t)] + \\ & + \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} [p^2 \mu q_e E f(z, p, \mu, t)] + \\ & + \frac{\partial}{\partial \mu} \left[ q_e E \frac{1 - \mu^2}{p} f(z, p, \mu, t) \right] = St_{el} + St_{ex} + St_{ion}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $q_e$  — заряд электрона,  $St_{el}$ ,  $St_{ex}$ ,  $St_{ion}$  компоненты интеграла столкновений электронов, отвечающие за изменение ФРЭ в упругих столкновениях, в процессах возбуждения и ионизации атомов или молекул соответственно.

Далее для упрощения выкладок мы будем рассматривать однокомпонентный газ, хотя предложенная модель может быть легко обобщена на случай многокомпонентных систем. Кроме того полагается, что кинетическая энергия электронов много больше энергии теплового движения атомов (молекул) и последние можно считать неподвижными. В этом случае интеграл упругих столкновений имеет следующий вид [14, 15]:

$$\begin{aligned} St_{el} = N_0 v \int_{\omega'} & \left[ f(z, p', \mu', t) \sigma_{el}(p', \psi) (p'/p)^4 - \right. \\ & \left. - f(z, p, \mu, t) \sigma_{el}(p, \psi) \right] d\omega' \end{aligned} \quad (2)$$

где  $N_0$  — концентрация атомов,  $\sigma_{el}$  — дифференциальное сечение упругого рассеяния,  $d\omega'$  — элемент телесного угла в пространстве импульсов,  $\psi$  — угол рассеяния. В дальнейших наших вычислениях мы будем использовать дифференциальное разложение интеграла упругих столкновений  $St_{el}$ , полученное в [13]

$$\begin{aligned} St_{el} = N_0 v \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sigma_{lr}^{(l)}}{2^l (l!)^2} \frac{\partial^l}{\partial \mu^l} & \left\{ (1 - \mu^2)^l \frac{\partial^l f}{\partial \mu^l} \right\} + \frac{N_0}{M p^2} \times \\ & \times \frac{\partial}{\partial p} \left[ p^4 \left( \sigma_{lr}^{(1)} f + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sigma_{lr}^{(l+1)}}{2^l (l!)^2} \frac{\partial^l}{\partial \mu^l} \left\{ (1 - \mu^2)^l \frac{\partial^l f}{\partial \mu^l} \right\} \right) \right], \end{aligned} \quad (3)$$

где  $M$  — масса атома;  $\sigma_{lr}^{(l)}(p) \equiv 2\pi \times \int_{-1}^1 (1 - \xi)^l \sigma_{el}(p, \xi) d\xi$ ,  $\xi = \cos \psi$ .

Рассмотрим теперь интеграл, отвечающий за возбуждения электронных уровней атома [14, 15]

$$\begin{aligned} St_{ex} = N_0 v \sum_i \int_{\omega'} & \left[ f(z, p', \mu', t) \sigma_{ex}^{(i)}(p', \psi) (p'/p)^2 - \right. \\ & \left. - f(z, p, \mu, t) \sigma_{ex}^{(i)}(p, \psi) \right] d\omega' \end{aligned} \quad (4)$$

здесь суммирование ведется по всем уровням возбуждения,  $\sigma_{ex}^{(i)}$  — дифференциальное сечение возбуждения уровня  $i$  с энергией  $\epsilon_{ex}^{(i)}$  и  $p' = p + \epsilon_{ex}^{(i)}/v$ . Предположим теперь, что электрон в процессе возбуждения атома не меняет направление своего движения. Это упрощение не существенно, поскольку в большинстве газов угловое распределение электронов в основном определяется упругим рассеянием. Таким образом, полагая в (4)  $\sigma_{ex}^{(i)}(p, \psi) = q_{ex}^{(i)}(p) \delta(\psi)$ , где  $q_{ex}^{(i)}(p)$  — полное сечение возбуждения, получаем

$$\begin{aligned} St_{ex} = N_0 v \sum_i & \left[ f \left( z, p + \frac{\epsilon_{ex}^{(i)}}{v}, \mu, t \right) q_{ex}^{(i)} \left( p + \frac{\epsilon_{ex}^{(i)}}{v} \right) \times \right. \\ & \left. \times \left( 1 + \frac{\epsilon_{ex}^{(i)}}{v p} \right)^2 - f(z, p, \mu, t) q_{ex}^{(i)}(p) \right] \end{aligned} \quad (5)$$

Далее мы будем рассматривать область энергий электрона  $\epsilon \gg \max \{ \epsilon_{ex}^{(i)} \}$ , в этом случае можно разложить (5) в ряд по степеням величины  $\Delta p = \epsilon_{ex}^{(i)}/v$  и в первом приближении получим для  $St_{ex}$  следующее дифференциальное выражение:

$$St_{ex} = \frac{N_0}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \sum_i \left[ p^2 f(z, p, \mu, t) \epsilon_{ex}^{(i)} q_{ex}^{(i)}(p) \right] \quad (6)$$

В предположении, что процесс ионизации можно рассматривать как рассеяние электрона на свободном электроном в [14], получено следующее выражение для ионизационного интеграла:

$$\begin{aligned} St_{ion} = N_0 v \sum_i & \left\{ \int_{\epsilon + \epsilon_{ion}^{(i)}}^{\infty} d\epsilon' \left( \frac{\gamma'^2 - 1}{\gamma^2 - 1} \right) \sigma_{ion}^{(i)}(\epsilon', \epsilon) \times \right. \\ & \left. \times \int_0^{2\pi} \frac{f(z, p', \mu', t)}{2\pi} d\alpha - f(z, p, \mu, t) q_{ion}^{(i)}(\epsilon) \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

здесь суммирование ведется по всем ионизационным оболочкам с энергией ионизации  $\epsilon_{\text{ion}}^{(i)}$ ,  $\sigma_{\text{ion}}^{(i)}$  и  $q_{\text{ion}}^{(i)}$  – дважды дифференциальное и полное сечение ионизации,  $\gamma$  – релятивистский фактор, а связь между величинами  $\mu$  и  $\mu'$  задается уравнением [14]

$$\mu' = \mu\mu_0 + \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 - \mu_0^2} \cos \alpha, \quad (8)$$

где  $\mu_0 = \frac{\sqrt{\epsilon(\epsilon' + 2m_e c^2)}}{\sqrt{\epsilon'(\epsilon + 2m_e c^2)}}$  – косинус угла рассеяния

электрона,  $m_e$  – масса электрона,  $c$  – скорость света в вакууме. Формально выражение (7) справедливо, когда энергия первичного и вторичного электронов много больше энергии ионизации [14]. Однако, поскольку для большинства газов дважды дифференциальные по углу и энергии сечения ионизации не известны, и кроме того как говорилось выше, угловое распределение электронов в основном определяется упругим рассеянием, далее мы будем полагать, что выражение (7) справедливо во всей рассматриваемой области энергий электрона.

Ионизационный интеграл (7) также частично может быть представлен в дифференциальном виде [14]

$$\begin{aligned} \text{St}_{\text{ion}} = N_0 v \sum_i \left\{ \int_{2\epsilon + \epsilon_{\text{ion}}^{(i)}}^{\infty} d\epsilon' (p'/p)^2 \sigma_{\text{ion}}^{(i)}(\epsilon', \epsilon) \times \right. \\ \times \int_0^{2\pi} \frac{f(z, p', \mu', t)}{2\pi} d\alpha + \frac{1}{v p^2} \frac{\partial}{\partial p} \left[ p^2 f(z, p, \mu, t) \times \right. \\ \times \int_0^{(\epsilon - \epsilon_{\text{ion}}^{(i)})/2} (\epsilon_s + \epsilon_{\text{ion}}^{(i)}) \sigma_{\text{ion}}^{(i)}(\epsilon, \epsilon_s) d\epsilon_s \left. \right] + \\ \left. + \frac{m_e}{2p^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[ (1 - \mu^2) \frac{\partial f}{\partial \mu} \right] \times \right. \\ \left. \times \int_0^{(\epsilon - \epsilon_{\text{ion}}^{(i)})/2} (\epsilon_s + \epsilon_{\text{ion}}^{(i)}) \sigma_{\text{ion}}^{(i)}(\epsilon, \epsilon_s) d\epsilon_s \right\} \quad (9) \end{aligned}$$

Первый член данного выражения описывает рождение вторичных электронов, второй и третий отвечают за изменения импульса первичных электронов. Выражение (9) получено в предположении, что энергия электрона  $\epsilon \gg \epsilon_{\text{ion}}^{(i)}$  и вторичные электроны в основном рождаются с энергией  $\epsilon_s$  близкой к нулю.

Интеграл по переменной  $\alpha$  в выражениях (7), (9) можно выразить в виде ряда, аналогичного (3)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z, p', \mu', t) d\alpha = f(z, p', \mu, t) + \\ + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(1 - \mu_0)^l}{2^l (l!)^2} \frac{\partial^l}{\partial \mu^l} \left\{ (1 - \mu^2)^l \frac{\partial^l f}{\partial \mu^l} \right\} \quad (10) \end{aligned}$$

Определим величину средних энергетических потерь электрона на единице пути  $F_D$ :

$$\begin{aligned} F_D \equiv F_{\text{el}} + F_{\text{ex}} + F_{\text{ion}}, \quad \text{где} \\ F_{\text{el}}(p) = \frac{N_0 p^2 \sigma_{\text{tr}}^{(1)}(p)}{M}, \quad F_{\text{ex}}(p) = N_0 \sum_i \epsilon_{\text{ex}}^{(i)} q_{\text{ex}}^{(i)}(p), \quad (11) \\ F_{\text{ion}}(p) = N_0 \sum_i (\epsilon_{\text{ion}}^{(i)} + \langle \epsilon_s \rangle) q_{\text{ion}}^{(i)}(p) \end{aligned}$$

Запишем теперь кинетическое уравнение в области энергий электрона  $\epsilon \gg \epsilon_{\text{ion}}$  с учетом явного вида всех столкновительных членов

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(\mu v f)}{\partial z} + \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \left[ p^2 (\mu q_e E - F_D) f \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial \mu} \left[ q_e E \frac{1 - \mu^2}{p} f \right] = \left( \frac{N_0 v \sigma_{\text{tr}}^{(1)}}{2} + \frac{F_{\text{ion}}}{2\gamma p} \right) \times \\ \times \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{\partial f}{\partial \mu} \right\} + N_0 v \sum_{l=2}^{\infty} \frac{\sigma_{\text{tr}}^{(l)}}{2^l (l!)^2} \times \\ \times \frac{\partial^l}{\partial \mu^l} \left\{ (1 - \mu^2)^l \frac{\partial^l f}{\partial \mu^l} \right\} + \frac{N_0}{M p^2} \times \\ \times \frac{\partial}{\partial p} \left[ p^4 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sigma_{\text{tr}}^{(l+1)}}{2^l (l!)^2} \frac{\partial^l}{\partial \mu^l} \left\{ (1 - \mu^2)^l \frac{\partial^l f}{\partial \mu^l} \right\} \right] + \\ + N_0 v \sum_i \left\{ \int_{2\epsilon + \epsilon_{\text{ion}}^{(i)}}^{\infty} d\epsilon' \left[ f(p') + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(1 - \mu_0)^l}{2^l (l!)^2} \frac{\partial^l}{\partial \mu^l} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left\{ (1 - \mu^2)^l \frac{\partial^l f}{\partial \mu^l} \right\} \right] \sigma_{\text{ion}}^{(i)}(\epsilon', \epsilon) (p'/p)^2 \right\} \quad (12) \end{aligned}$$

Отметим, что поскольку мы изначально предположили, что ФРЭ не зависит от азимутального угла  $\phi$  в пространстве импульсов, то полученная далее на основе уравнения (12) система многогрупповых уравнений для моментов ФРЭ не будет описывать диффузию электронов в направлении, ортогональном вектору напряженности поля.

Для того чтобы получить систему групповых уравнений разобьем интересующий нас интервал значений импульса  $[p_{\text{min}}, p_{\text{max}}]$  на  $N$  частей  $\Delta p_{k+1/2, k-1/2} = p_{k+1/2} - p_{k-1/2}$ ,  $k = 1, \dots, N$ .

Определим величину концентрации электронов в  $k$ -й группе

$$\begin{aligned} n_k(z, t) &\equiv \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} p^2 dp \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} f(z, p, \mu, t) d\varphi \approx \\ &\approx 2\pi p_k^2 \Delta p_{k+1/2, k-1/2} \int_{-1}^1 f(z, p_k, \mu, t) d\mu \end{aligned} \quad (13)$$

Определим величину плотности потока электронов в  $k$ -й группе

$$\begin{aligned} j_k(z, t) &\equiv \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} v p^2 dp \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} f(z, p, \mu, t) d\varphi \approx \\ &\approx 2\pi v_k p_k^2 \Delta p_{k+1/2, k-1/2} \int_{-1}^1 \mu f(z, p_k, \mu, t) d\mu \end{aligned} \quad (14)$$

Кроме того определим величину направленной скорости электронов

$$\begin{aligned} u_k(z, t) &\equiv j_k(z, t)/n_k(z, t) = \\ &= \frac{\int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} v p^2 dp \int_{-1}^1 \mu f(z, p, \mu, t) d\mu}{\int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} p^2 dp \int_{-1}^1 f(z, p, \mu, t) d\mu} \approx \\ &\approx \frac{\int_{-1}^1 \mu f(z, p_k, \mu, t) d\mu}{\int_{-1}^1 f(z, p_k, \mu, t) d\mu} v_k = \langle \mu \rangle_k v_k. \end{aligned} \quad (15)$$

Величина плотности потока импульса определяется так

$$\begin{aligned} \pi_k(z, t) &\equiv \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} v^2 p^2 dp \int_{-1}^1 \mu^2 d\mu \int_0^{2\pi} f(z, p, \mu, t) d\varphi \approx \\ &\approx 2\pi v_k^2 p_k^2 \Delta p_{k+1/2, k-1/2} \int_{-1}^1 \mu^2 f(z, p_k, \mu, t) d\mu = \\ &= \langle \mu^2 \rangle_k v_k^2 n_k \end{aligned} \quad (16)$$

Ниже в процессе вывода групповых уравнений для моментов ФРЭ будут использоваться следующие равенства

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \left( (1 - \mu^2) \frac{\partial f}{\partial \mu} \right) d\mu &= -2 \int_{-1}^1 \mu f(z, p, \mu, t) d\mu, \\ \int_{-1}^1 \mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu} \left( (1 - \mu^2) \frac{\partial f}{\partial \mu} \right) d\mu &= \\ = 2 \int_{-1}^1 (1 - 3\mu^2) f(z, p, \mu, t) d\mu, \\ \int_{-1}^1 \mu^2 \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \left( (1 - \mu^2)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2} \right) d\mu &= \end{aligned} \quad (17)$$

$$= -8 \int_{-1}^1 (1 - 3\mu^2) f(z, p, \mu, t) d\mu,$$

$$\int_{-1}^1 \mu^n \frac{\partial^m}{\partial \mu^m} \left( (1 - \mu^2)^m \frac{\partial^m f}{\partial \mu^m} \right) d\mu = 0, \quad n < m.$$

### 3. УРАВНЕНИЯ БАЛАНСА КОНЦЕНТРАЦИИ

Для того чтобы найти уравнения для величин концентрации  $n_k$  необходимо кинетическое уравнение (12) умножить на величину  $p^2$  и проинтегрировать по переменным  $p, \mu, \varphi$  на отрезках  $p \in [p_{k-1/2}, p_{k+1/2}]$ ,  $\mu \in [-1, 1]$  и  $\varphi \in [0, 2\pi]$ .

Интегрируя, таким образом, первый член в левой части кинетического уравнения, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} p^2 dp \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} f(z, p, \mu, t) d\varphi = \frac{\partial n_k}{\partial t}. \quad (18)$$

Далее интегрируем второй член

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} v p^2 dp \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} f(z, p, \mu, t) d\varphi \right) = \frac{\partial j_k}{\partial z} \quad (19)$$

Интегрирование третьего члена дает

$$\begin{aligned} &\int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} p^2 dp \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \times \\ &\times \left[ p^2 (\mu q_e E - F_D(p)) f(z, p, \mu, t) \right] d\varphi = 2\pi \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} dp \times \\ &\times \int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial p} \left[ p^2 (\mu q_e E - F_D(p)) f(z, p, \mu, t) \right] d\mu = \\ &= 2\pi p_{k+1/2}^2 \int_{-1}^1 (\mu q_e E - F_D(p_{k+1/2})) \times \\ &\times f(z, p_{k+1/2}, \mu, t) d\mu - 2\pi p_{k-1/2}^2 \times \\ &\times \int_{-1}^1 (\mu q_e E - F_D(p_{k-1/2})) f(z, p_{k-1/2}, \mu, t) d\mu \approx \\ &\approx \frac{\langle \mu \rangle_{k+1/2} q_e E - F_D(p_{k+1/2})}{p_{k+1} - p_k} n_{k+1/2} - \\ &- \frac{\langle \mu \rangle_{k-1/2} q_e E - F_D(p_{k-1/2})}{p_k - p_{k-1}} n_{k-1/2} \end{aligned} \quad (20)$$

Интегралы от четвертого члена в левой части уравнения (12), а также первых трех членов в правой части равны нулю. Таким образом, объеди-

няя выражения (18)–(20), получаем уравнения баланса концентрации электронов

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} + \frac{\partial j_k}{\partial z} = \frac{\langle \mu \rangle_{k-1/2} q_e E - F_D(p_{k-1/2})}{p_k - p_{k-1}} n_{k-1/2} - \frac{\langle \mu \rangle_{k+1/2} q_e E - F_D(p_{k+1/2})}{p_{k+1} - p_k} n_{k+1/2} + S_{\text{ion},k} \quad (21)$$

Вычислим теперь ионизационный член  $S_{\text{ion},k}$ , для этого проинтегрируем последний член в правой части кинетического уравнения (12)

$$S_{\text{ion},k} = 2\pi N_0 \sum_i \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} v p^2 dp \times \int_{2\varepsilon + \varepsilon_{\text{ion}}^{(i)}}^{\infty} (p'/p)^2 \sigma_{\text{ion}}^{(i)}(\varepsilon', \varepsilon) d\varepsilon' \int_{-1}^1 f(z, p', \mu, t) d\mu \approx N_0 V_k \Delta p_{k+1/2, k-1/2} \times \sum_i \int_{2\varepsilon_k + \varepsilon_{\text{ion}}^{(i)}}^{\infty} \sigma_{\text{ion}}^{(i)}(\varepsilon', \varepsilon_k) 2\pi p'^2 v' dp' \times \int_{-1}^1 f(z, p', \mu, t) d\mu \approx N_0 V_k \Delta p_{k+1/2, k-1/2} \sum_{j=k}^N \sum_i \sigma_{\text{ion}}^{(i)}(\varepsilon_j, \varepsilon_k) v_j n_j, \quad (22)$$

где  $j_k$  это номер интервала импульса электронов  $[p_{j-1/2}, p_{j+1/2}]$ , в котором лежит значение  $p(2\varepsilon_k + \varepsilon_{\text{ion}})$ . Здесь при получении последнего равенства в (22) мы учли соотношение  $d\varepsilon' = v' dp'$ , и что по определению  $n_j \equiv 2\pi \int_{p_{j-1/2}}^{p_{j+1/2}} p^2 dp \int_{-1}^1 f(z, p, \mu, t) d\mu$ .

#### 4. УРАВНЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ПОТОКА

Для того чтобы найти уравнения для величин  $j_k$  необходимо уравнение (12) умножить на величину  $\mu v p^2$  и проинтегрировать по переменным  $p, \mu, \varphi$ .

Интегрируя первый член в левой части кинетического уравнения, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} v p^2 dp \int_{-1}^1 \mu d\mu \int_0^{2\pi} f(z, p, \mu, t) d\varphi = \frac{\partial j_k}{\partial t}. \quad (23)$$

Далее интегрируем второй член

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} v p^2 dp \int_{-1}^1 \mu^2 d\mu \int_0^{2\pi} f(z, p, \mu, t) d\varphi \right) = \frac{\partial \pi_k}{\partial z} \quad (24)$$

Интегрирование третьего члена дает

$$\int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} v p^2 dp \int_{-1}^1 \mu d\mu \int_0^{2\pi} \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \times \left[ p^2 (\mu q_e E - F_D(p)) f(z, p, \mu, t) \right] d\varphi = 2\pi \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} v dp \int_{-1}^1 \mu \frac{\partial}{\partial p} \times \left[ p^2 (\mu q_e E - F_D(p)) f(z, p, \mu, t) \right] d\mu = \pi p_{k+1/2}^2 V_{k+1/2} \int_{-1}^1 (\mu^2 q_e E - \mu F_D(p_{k+1/2})) \times f(z, p_{k+1/2}, \mu, t) d\mu - 2\pi p_{k-1/2}^2 V_{k-1/2} \times \int_{-1}^1 (\mu^2 q_e E - \mu F_D(p_{k-1/2})) f(z, p_{k-1/2}, \mu, t) d\mu - 2\pi p_k^2 \left( \frac{dv}{dp} \right)_k \Delta p_{k+1/2, k-1/2} \int_{-1}^1 (\mu^2 q_e E - \mu F_D(p_k)) \times f(z, p_k, \mu, t) d\mu \approx \frac{\langle \mu^2 \rangle_{k+1/2} q_e E - \langle \mu \rangle_{k+1/2} F_D(p_{k+1/2})}{p_{k+1} - p_k} V_{k+1/2} n_{k+1/2} - \frac{\langle \mu^2 \rangle_{k-1/2} q_e E - \langle \mu \rangle_{k-1/2} F_D(p_{k-1/2})}{p_k - p_{k-1}} V_{k-1/2} n_{k-1/2} - \frac{\langle \mu^2 \rangle_k q_e E - \langle \mu \rangle_k F_D(p_k)}{\gamma_k^2 p_k} V_k n_k = \frac{q_e E (\pi_{k+1/2}/V_{k+1/2}) - F_D(p_{k+1/2}) j_{k+1/2}}{p_{k+1} - p_k} - \frac{q_e E (\pi_{k-1/2}/V_{k-1/2}) - F_D(p_{k-1/2}) j_{k-1/2}}{p_k - p_{k-1}} - \frac{q_e E (\pi_k/V) - F_D(p_k) j_k}{\gamma_k^2 p_k} \quad (25)$$

Здесь мы учли соотношение  $\frac{1}{v} \left( \frac{dv}{dp} \right) = \frac{1}{\gamma^2 p}$ .

Интегрируем четвертый член уравнения

$$2\pi \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} v p^2 dp \int_{-1}^1 \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \left( q_e E \frac{1 - \mu^2}{p} f(z, p, \mu, t) \right) d\mu = -2\pi \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} \frac{v p^2}{p} dp \int_{-1}^1 q_e E (1 - \mu^2) f(z, p, \mu, t) d\mu \approx - \left( 1 - \langle \mu^2 \rangle_k \right) \frac{V_k n_k}{p_k} q_e E \approx - (v_k n_k - (\pi_k/V_k)) \frac{q_e E}{p_k} \quad (26)$$

Интегрируя первый член в правой части уравнения (12) получаем

$$\begin{aligned}
& 2\pi \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} v p^2 \left( \frac{N_0 v \sigma_{tr}^{(1)}(p)}{2} + \frac{F_{ion}(p)}{2\gamma p} \right) dp \times \\
& \quad \times \int_{-1}^1 \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \left( (1 - \mu^2) \frac{\partial f}{\partial \mu} \right) d\mu = \\
& = -2\pi \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} v p^2 \left( N_0 v \sigma_{tr}^{(1)}(p) + \frac{F_{ion}}{\gamma p} \right) dp \times \\
& \quad \times \int_{-1}^1 \mu f(z, p, \mu, t) d\mu \approx - \left( v_{tr}(p_k) + \frac{F_{ion}(p_k)}{\gamma_k p_k} \right) j_k,
\end{aligned} \tag{27}$$

где введено обозначение  $v_{tr}(p) \equiv N_0 v \sigma_{tr}^{(1)}(p)$ .

Интеграл от второго члена в правой части равен нулю, а интеграл от третьего члена

$$\begin{aligned}
& 2\pi \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} v dp \frac{\partial}{\partial p} \left\{ \frac{p^4 N_0 \sigma_{tr}^{(2)}(p)}{2M} \times \right. \\
& \quad \times \int_{-1}^1 \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \left( (1 - \mu^2) \frac{\partial f}{\partial \mu} \right) d\mu \left. \right\} = -2\pi \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} v dp \times \\
& \quad \times \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{p^4 N_0 \sigma_{tr}^{(2)}(p)}{M} \int_{-1}^1 \mu f(z, p, \mu, t) d\mu \right) \approx \\
& \quad \approx - \frac{F_{el}^{(2)}(p_{k+1/2})}{p_{k+1} - p_k} j_{k+1/2} + \\
& \quad + \frac{F_{el}^{(2)}(p_{k-1/2})}{p_k - p_{k-1}} j_{k-1/2} + \frac{F_{el}^{(2)}(p_k)}{\gamma_k^2 p_k} j_k,
\end{aligned} \tag{28}$$

здесь введено обозначение  $F_{el}^{(2)}(p) \equiv \frac{N_0 p^2 \sigma_{tr}^{(2)}(p)}{M}$ .

Объединяя выражения (23)–(28) получаем следующее уравнение для плотности потока электронов в  $k$ -й группе

$$\begin{aligned}
\frac{\partial j_k}{\partial t} + \frac{\partial \pi_k}{\partial z} = & \frac{q_e E(\pi_{k-1/2}/v_{k-1/2}) - (F_D(p_{k-1/2}) - F_{el}^{(2)}(p_{k-1/2})) j_{k-1/2}}{p_k - p_{k-1}} - \\
& - \frac{q_e E(\pi_{k+1/2}/v_{k+1/2}) - (F_D(p_{k+1/2}) - F_{el}^{(2)}(p_{k+1/2})) j_{k+1/2}}{p_{k+1} - p_k} + \\
& + \left( v_k n_k - \frac{\gamma_k^2 - 1}{\gamma_k^2} \frac{\pi_k}{v_k} \right) \frac{q_e E}{p_k} - \left( \frac{F_D(p_k) - F_{el}^{(2)}(p_k) + \gamma_k F_{ion}(p_k)}{\gamma_k^2 p_k} + v_{tr}(p_k) \right) j_k + S_{ion,k}^j
\end{aligned} \tag{29}$$

Вычислим ионизационный член

$$\begin{aligned}
S_{ion,k}^j = & 2\pi N_0 \sum_i \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} v^2 p^2 dp \times \\
& \times \int_{2\varepsilon + \varepsilon_{ion}^{(i)}}^{\infty} (p'/p)^2 \sigma_{ion}^{(i)}(\varepsilon', \varepsilon) d\varepsilon' \left[ \int_{-1}^1 \mu f(z, p', \mu, t) d\mu - \right. \\
& \quad \left. - (1 - \mu_0(\varepsilon', \varepsilon)) \int_{-1}^1 \mu f(z, p', \mu, t) d\mu \right] \approx \\
& \approx N_0 \sum_i v_k^2 \Delta p_{k+1/2, k-1/2} \times \\
& \times \int_{2\varepsilon_k + \varepsilon_{ion}^{(i)}}^{\infty} \sigma_{ion}^{(i)}(\varepsilon', \varepsilon_k) \mu_0(\varepsilon', \varepsilon_k) 2\pi p'^2 v' dp' \times \\
& \quad \times \int_{-1}^1 \mu f(z, p', \mu, t) d\mu \approx \\
& \approx N_0 v_k^2 \Delta p_{k+1/2, k-1/2} \sum_{j=k}^N \sum_i \sigma_{ion}^{(i)}(\varepsilon_j, \varepsilon_k) \mu_0(\varepsilon_j, \varepsilon_k) j_j
\end{aligned} \tag{30}$$

При выводе данного выражения мы учли, что

$$j_j \equiv 2\pi \int_{p_{j-1/2}}^{p_{j+1/2}} v p^2 dp \int_{-1}^1 \mu f(z, p, \mu, t) d\mu.$$

## 5. УРАВНЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ПОТОКА ИМПУЛЬСА

Для того чтобы найти уравнения для величин  $\pi_k$  необходимо кинетическое уравнение (12) умножить на величину  $\mu^2 v^2 p^2$  и проинтегрировать.

Интегрируя первый член в левой части кинетического уравнения, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} v^2 p^2 dp \int_{-1}^1 \mu^2 d\mu \int_0^{2\pi} f(z, p, \mu, t) d\phi = \frac{\partial \pi_k}{\partial t}. \tag{31}$$

Далее интегрируем второй член

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} v^3 p^2 dp \int_{-1}^1 \mu^3 d\mu \int_0^{2\pi} f(z, p, \mu, t) d\phi \right) \approx$$

$$\begin{aligned} &\approx \frac{\partial}{\partial z} \left( 2\pi v_k^3 p_k^2 \Delta p_{k+1/2, k-1/2} \int_{-1}^1 \mu^3 f(z, p, \mu, t) d\mu \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left( v_k^3 \int_{-1}^1 \mu^3 f(z, p, \mu, t) d\mu \int_{-1}^1 f(z, p, \mu, t) d\mu \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( v_k^3 \langle \mu^3 \rangle_k n_k \right) \approx \\ &\approx \frac{\partial}{\partial z} \left( v_k^3 \langle \mu^2 \rangle_k \langle \mu \rangle_k n_k \right) = \frac{\partial (u_k \pi_k)}{\partial z} \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь мы величину  $\langle \mu^3 \rangle_k$ , которая является моментом третьего порядка, заменили на произведение  $\langle \mu^2 \rangle_k \langle \mu \rangle_k$ , для того чтобы разорвать цепочку уравнений моментов.

Интегрируя третий член в левой части (12), получаем

$$\begin{aligned} &2\pi \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} v^2 p^2 dp \int_{-1}^1 \mu^2 \frac{\partial}{\partial p} \left[ p^2 (\mu q_e E - F_D(p)) f(z, p, \mu, t) \right] d\mu = 2\pi \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} v^2 dp \times \\ &\times \int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial p} \left[ p^2 (\mu^3 q_e E - \mu^2 F_D(p)) f(z, p, \mu, t) \right] d\mu = 2\pi p_{k+1/2}^2 v_{k+1/2}^2 \int_{-1}^1 (\mu^3 q_e E - \mu^2 F_D(p_{k+1/2})) \times \\ &\times f(z, p_{k+1/2}, \mu, t) d\mu - 2\pi p_{k-1/2}^2 v_{k-1/2}^2 \int_{-1}^1 (\mu^3 q_e E - \mu^2 F_D(p_{k-1/2})) f(z, p_{k-1/2}, \mu, t) d\mu - 2\pi p_k^2 2v_k \left( \frac{dv}{dp} \right)_k \times \\ &\times \Delta p_{k+1/2, k-1/2} \int_{-1}^1 (\mu^3 q_e E - \mu^2 F_D(p_k)) f(z, p_k, \mu, t) d\mu \approx \frac{\langle \mu^3 \rangle_{k+1/2} q_e E - \langle \mu^2 \rangle_{k+1/2} F_D(p_{k+1/2})}{p_{k+1} - p_k} v_{k+1/2}^2 n_{k+1/2} - \\ &- \frac{\langle \mu^3 \rangle_{k-1/2} q_e E - \langle \mu^2 \rangle_{k-1/2} F_D(p_{k-1/2})}{p_k - p_{k-1}} v_{k-1/2}^2 n_{k-1/2} - \frac{\langle \mu^3 \rangle_k q_e E - \langle \mu^2 \rangle_k F_D(p_k)}{\gamma_k^2 p_k} 2v_k^2 n_k \approx \\ &\approx \frac{\langle \mu \rangle_{k+1/2} q_e E - F_D(p_{k+1/2})}{p_{k+1} - p_k} \pi_{k+1/2} - \frac{\langle \mu \rangle_{k-1/2} q_e E - F_D(p_{k-1/2})}{p_k - p_{k-1}} \pi_{k-1/2} - 2 \frac{\langle \mu \rangle_k q_e E - F_D(p_k)}{\gamma_k^2 p_k} \pi_k \end{aligned} \quad (33)$$

Проинтегрируем четвертый член в левой части кинетического уравнения

$$\begin{aligned} &2\pi \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} v^2 p^2 dp \int_{-1}^1 \mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu} \left[ q_e E \frac{1 - \mu^2}{p} f(z, p, \mu, t) \right] d\mu = \\ &= - \left[ \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} \frac{v^2}{p} 2\pi p^2 dp \int_{-1}^1 2\mu (1 - \mu^2) f(z, p, \mu, t) d\mu \right] \times \\ &\quad \times q_e E \approx \\ &\approx - \left[ \frac{v_k^2}{p_k} 2\pi p_k^2 \Delta p_{k+1/2, k-1/2} \int_{-1}^1 (\mu - \mu^3) f(z, p_k, \mu, t) d\mu \right] \times \\ &\quad \times 2q_e E = \\ &= - \left[ \frac{v_k^2 n_k}{p_k} (\langle \mu \rangle_k - \langle \mu^3 \rangle_k) \right] 2q_e E \approx \\ &\approx -2 \left[ \frac{v_k^2 n_k - \pi_k}{p_k} \right] \langle \mu \rangle_k q_e E \end{aligned} \quad (34)$$

Теперь проинтегрируем первый и второй члены в правой части уравнения (12)

$$\begin{aligned} &2\pi \left[ \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} v^2 p^2 \left( \frac{N_0 v \sigma_{tr}^{(1)}(p)}{2} + \frac{F_{ion}(p)}{2\gamma p} \right) dp \times \right. \\ &\quad \times \int_{-1}^1 \mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{\partial f}{\partial \mu} \right\} d\mu + \\ &\quad + \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} v^3 p^2 \frac{N_0 \sigma_{tr}^{(2)}(p)}{16} dp \times \\ &\quad \times \int_{-1}^1 \mu^2 \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \left\{ (1 - \mu^2)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2} \right\} d\mu \left. \right] = \\ &= 2\pi \left[ \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} v^2 p^2 \left( N_0 v \sigma_{tr}^{(1)}(p) + \frac{F_{ion}(p)}{\gamma p} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{N_0 v \sigma_{tr}^{(2)}(p)}{2} \right) dp \int_{-1}^1 (1 - 3\mu^2) f(z, p, \mu, t) d\mu \right] \approx \\ &\approx \left( v_{tr}^{(2)}(p_k) + \frac{F_{ion}(p_k)}{\gamma_k p_k} \right) (v_k^2 n_k - 3\pi_k) \end{aligned} \quad (35)$$

здесь введено обозначение  $v_{ir}^{(2)}(p) \equiv N_0 v \times$   
 $\times \left( \sigma_{ir}^{(1)}(p) - \frac{\sigma_{ir}^{(2)}(p)}{2} \right)$ .

Интегрируем четвертый член в правой части

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi N_0}{M} \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} v^2 dp \frac{\partial}{\partial p} \left\{ \frac{p^4 \sigma_{ir}^{(2)}(p)}{2} \int_{-1}^1 \mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu} \times \right. \\ & \times \left. \left( (1-\mu^2) \frac{\partial f}{\partial \mu} \right) d\mu + \frac{p^4 \sigma_{ir}^{(3)}(p)}{16} \times \right. \\ & \times \left. \int_{-1}^1 \mu^2 \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \left( (1-\mu^2)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2} \right) d\mu \right\} = \frac{2\pi N_0}{M} \times \\ & \times \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} v^2 dp \frac{\partial}{\partial p} \left\{ p^4 \left( \sigma_{ir}^{(2)}(p) - \frac{\sigma_{ir}^{(3)}(p)}{2} \right) \times \right. \\ & \times \left. \int_{-1}^1 (1-3\mu^2) f(z, p, \mu, t) d\mu \right\} \approx \frac{F_{el}^{(3)}(p_{k+1/2})}{p_{k+1} - p_k} \times \\ & \times \left( v_{k+1/2}^2 n_{k+1/2} - 3\pi_{k+1/2} \right) - \frac{F_{el}^{(3)}(p_{k-1/2})}{p_k - p_{k-1}} \times \\ & \times \left( v_{k-1/2}^2 n_{k-1/2} - 3\pi_{k-1/2} \right) - \frac{2F_{el}^{(3)}(p_k)}{\gamma_k^2 p_k} \left( v_k^2 n_k - 3\pi_k \right) \end{aligned} \quad (36)$$

здесь мы ввели обозначение  $F_{el}^{(3)}(p) \equiv$   
 $\equiv \frac{N_0 p^2}{M} \left( \sigma_{ir}^{(2)}(p) - \frac{\sigma_{ir}^{(3)}(p)}{2} \right)$ .

Объединяя выражения (31)–(36) получаем уравнения для плотности потока импульса

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_k}{\partial t} + \frac{\partial (u_k \pi_k)}{\partial z} &= \frac{\langle \mu \rangle_{k-1/2} q_e E - F_D(p_{k-1/2})}{p_k - p_{k-1}} \pi_{k-1/2} - \\ & - \frac{\langle \mu \rangle_{k+1/2} q_e E - F_D(p_{k+1/2})}{p_{k+1} - p_k} \pi_{k+1/2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_k}{\partial t} + \frac{\partial j_k}{\partial z} &= \frac{\langle \mu \rangle_{k-1/2} q_e E - F_D(p_{k-1/2})}{p_k - p_{k-1}} n_{k-1/2} - \frac{\langle \mu \rangle_{k+1/2} q_e E - F_D(p_{k+1/2})}{p_{k+1} - p_k} n_{k+1/2} + \sum_{j=k}^N S_{jk} v_j n_j; \\ \frac{\partial j_k}{\partial t} + \frac{\partial \pi_k}{\partial z} &= \frac{q_e E (\pi_{k-1/2} / v_{k-1/2}) - (F_D(p_{k-1/2}) - F_{el}^{(2)}(p_{k-1/2})) j_{k-1/2}}{p_k - p_{k-1}} - \\ & - \frac{q_e E (\pi_{k+1/2} / v_{k+1/2}) - (F_D(p_{k+1/2}) - F_{el}^{(2)}(p_{k+1/2})) j_{k+1/2}}{p_{k+1} - p_k} - \left( \frac{F_D(p_k) - F_{el}^{(2)}(p_k) + \gamma_k F_{ion}(p_k)}{\gamma_k^2 p_k} + v_{tr,k} \right) j_k + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + 2 \frac{\langle \mu \rangle_k q_e E - F_D(p_k)}{\gamma_k^2 p_k} \pi_k + \frac{F_{el}^{(3)}(p_{k+1/2})}{p_{k+1} - p_k} \times \\ & \times \left( v_{k+1/2}^2 n_{k+1/2} - 3\pi_{k+1/2} \right) - \frac{F_{el}^{(3)}(p_{k-1/2})}{p_k - p_{k-1}} \times \\ & \times \left( v_{k-1/2}^2 n_{k-1/2} - 3\pi_{k-1/2} \right) + \frac{2 \langle \mu \rangle_k q_e E}{p_k} \left( v_k^2 n_k - \pi_k \right) + \\ & + \left( v_{ir}^{(2)}(p_k) + \frac{\gamma_k F_{ion}(p_k) - 2F_{el}^{(3)}(p_k)}{\gamma_k^2 p_k} \right) \times \\ & \times \left( v_k^2 n_k - 3\pi_k \right) + S_{ion,k}^\pi \end{aligned} \quad (37)$$

Вычислим ионизационный член

$$\begin{aligned} S_{ion,k}^\pi &= 2\pi N_0 \sum_i \int_{p_{k-1/2}}^{p_{k+1/2}} v^3 p^2 dp \times \\ & \times \int_{2\varepsilon + \varepsilon_{ion}^{(i)}}^{\infty} (p'/p)^2 \sigma_{ion}^{(i)}(\varepsilon', \varepsilon) d\varepsilon' \left[ \int_{-1}^1 \mu^2 f(z, p', \mu, t) d\mu + \right. \\ & + (1 - \mu_0(\varepsilon', \varepsilon)) \int_{-1}^1 (1 - 3\mu^2) f(z, p', \mu, t) d\mu - \\ & \left. - \frac{(1 - \mu_0(\varepsilon', \varepsilon))^2}{2} \int_{-1}^1 (1 - 3\mu^2) f(z, p', \mu, t) d\mu \right] \approx \\ & \approx N_0 v_k^3 \Delta p_{k+1/2, k-1/2} \sum_{j=k}^N \sum_i \sigma_{ion}^{(i)}(\varepsilon_j, \varepsilon_k) \times \\ & \times \left( \frac{1 - \mu_0^2(\varepsilon_j, \varepsilon_k)}{2} v_j n_j - \frac{1 - 3\mu_0^2(\varepsilon_j, \varepsilon_k)}{2} \frac{\pi_j}{v_j} \right) \end{aligned} \quad (38)$$

## 6. СИСТЕМА МНОГОГРУППОВЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ МОМЕНТОВ ФРЭ

Выпишем теперь полную систему многогрупповых уравнений для трех первых моментов ФРЭ: баланса концентрации, плотности потока и плотности потока импульса электронов



$$\begin{aligned}
 & + \left( v_k n_k - \frac{\gamma_k^2 - 1}{\gamma_k^2} \frac{\pi_k}{v_k} \right) \frac{q_e E}{p_k} + \sum_{j=j_k}^N s_{jk} \mu_0(\epsilon_j, \epsilon_k) v_k j_j; \\
 \frac{\partial \pi_k}{\partial t} + \frac{\partial(u_k \pi_k)}{\partial z} = & \frac{\langle \mu \rangle_{k-1/2} q_e E - F_D(p_{k-1/2})}{p_k - p_{k-1}} \pi_{k-1/2} - \frac{\langle \mu \rangle_{k+1/2} q_e E - F_D(p_{k+1/2})}{p_{k+1} - p_k} \pi_{k+1/2} + \\
 & + 2 \frac{\langle \mu \rangle_k q_e E - F_D(p_k)}{\gamma_k^2 p_k} \pi_k + \frac{F_{el}^{(3)}(p_{k+1/2})}{p_{k+1} - p_k} (v_{k+1/2}^2 n_{k+1/2} - 3\pi_{k+1/2}) - \frac{F_{el}^{(3)}(p_{k-1/2})}{p_k - p_{k-1}} (v_{k-1/2}^2 n_{k-1/2} - 3\pi_{k-1/2}) + \\
 & + 2 \left( v_k^2 n_k - \pi_k \right) \frac{\langle \mu \rangle_k q_e E}{p_k} + \left( v_{tr}^{(2)}(p_k) + \frac{\gamma_k F_{ion}(p_k) - 2F_{el}^{(3)}(p_k)}{\gamma_k^2 p_k} \right) (v_k^2 n_k - 3\pi_k) + \\
 & + \sum_{j=j_k}^N s_{jk} v_k^2 \left( \frac{1 - \mu_0^2(\epsilon_j, \epsilon_k)}{2} v_j n_j - \frac{1 - 3\mu_0^2(\epsilon_j, \epsilon_k) \pi_j}{2 v_j} \right),
 \end{aligned} \tag{39}$$

где  $s_{jk} = N_0 v_k \Delta p_{k+1/2, k-1/2} \sum_i \sigma_{ion}^{(i)}(\epsilon_j, \epsilon_k)$ .

Рассмотрим также упрощенную систему групповых уравнений, состоящую только из уравнений баланса концентрации и плотности потока электронов. Для того чтобы получить данную систему предположим, что  $\langle \mu^2 \rangle_k = \langle \mu \rangle_k \langle \mu \rangle_k$  или эквивалентно  $\pi_k = \langle \mu \rangle_k v_k j_k$ . Данное предположение справедливо в области больших энергий электрона, поскольку с ростом энергии угловое распределение электронов становится все более вытянутым вдоль вектора  $\mathbf{e}$ , и следовательно для высокоэнергичных электронов будут выполняться условия  $\langle \mu^2 \rangle \approx 1$  и  $\langle \mu \rangle \approx 1$ . Упрощенная система многогрупповых уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial n_k}{\partial t} + \frac{\partial j_k}{\partial z} = & \frac{\langle \mu \rangle_{k-1/2} q_e E - F_D(p_{k-1/2})}{p_k - p_{k-1}} n_{k-1/2} - \\
 & - \frac{\langle \mu \rangle_{k+1/2} q_e E - F_D(p_{k+1/2})}{p_{k+1} - p_k} n_{k+1/2} + \sum_{j=j_k}^N s_{jk} v_j n_j; \\
 \frac{\partial j_k}{\partial t} + \frac{\partial(u_k j_k)}{\partial z} = & \frac{\langle \mu \rangle_{k-1/2} q_e E - (F_D(p_{k-1/2}) - F_{el}^{(2)}(p_{k-1/2}))}{p_k - p_{k-1}} j_{k-1/2} - \\
 & - \frac{\langle \mu \rangle_{k+1/2} q_e E - (F_D(p_{k+1/2}) - F_{el}^{(2)}(p_{k+1/2}))}{p_{k+1} - p_k} j_{k+1/2} - \\
 & - \left( \frac{F_D(p_k) - F_{el}^{(2)}(p_k) + \gamma_k F_{ion}(p_k)}{\gamma_k^2 p_k} + v_{tr, k} \right) j_k + \\
 & + \left( v_k n_k - \frac{\gamma_k^2 - 1}{\gamma_k^2} \langle \mu \rangle_k j_k \right) \frac{q_e E}{p_k} + \sum_{j=j_k}^N s_{jk} \mu_0(\epsilon_j, \epsilon_k) v_k j_j.
 \end{aligned} \tag{40}$$

При решении системы уравнений (39) или (40) необходимо вычислять величины  $n_{k-1/2}$  и  $n_{k+1/2}$ , для этого используется следующая процедура

$$n_{k+1/2} = \begin{cases} n_k, & [\langle \mu \rangle_{k+1/2} eE - F_D(p_{k+1/2})] > 0, \\ n_{k+1}, & [\langle \mu \rangle_{k+1/2} eE - F_D(p_{k+1/2})] < 0. \end{cases} \tag{41}$$

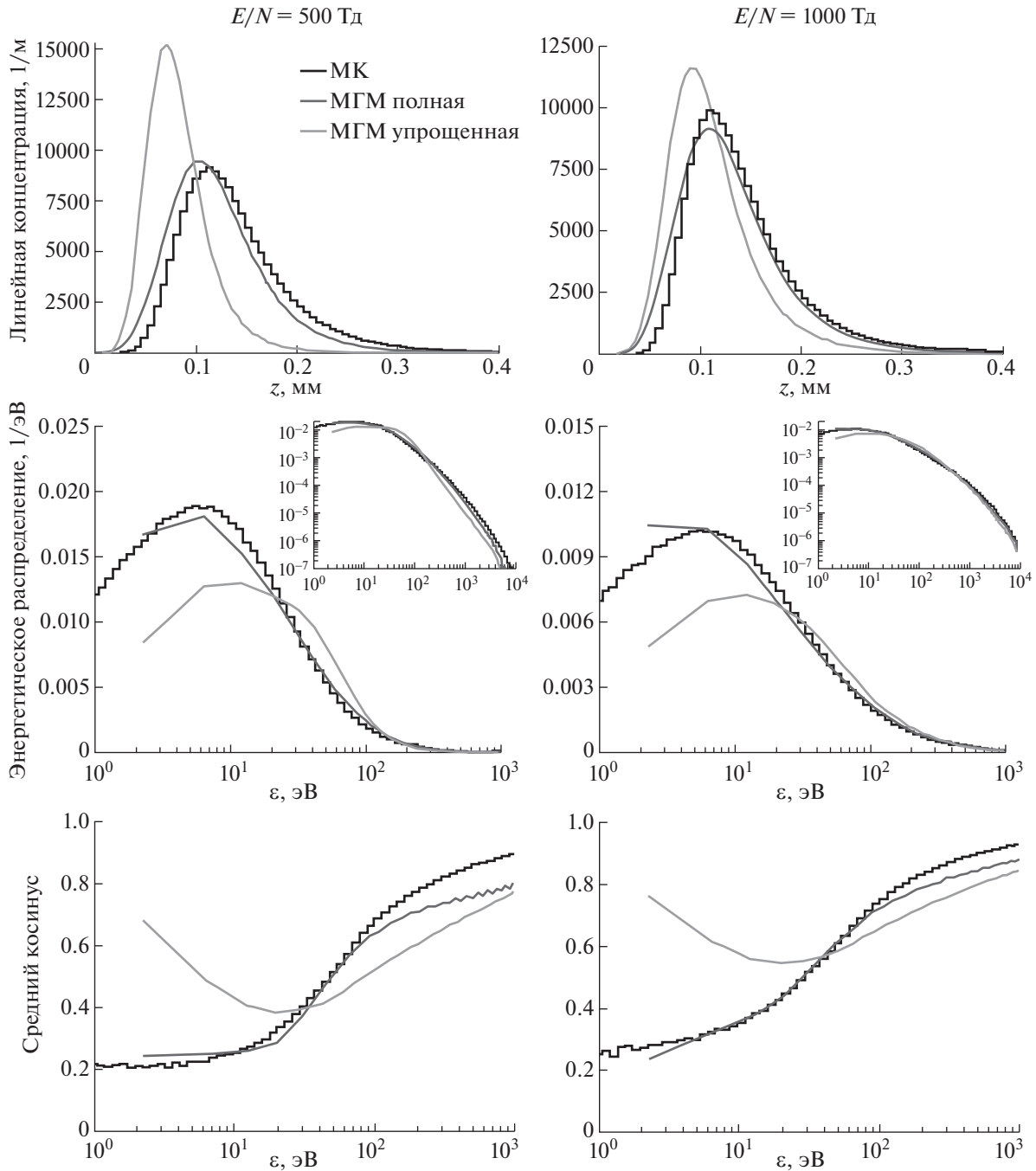
Аналогично рассчитываются величины  $j_{k-1/2}$ ,  $j_{k+1/2}$  и  $\pi_{k-1/2}$ ,  $\pi_{k+1/2}$ . Величина  $\langle \mu \rangle_{k+1/2}$  вычисляется путем линейной интерполяции величин  $\langle \mu \rangle_k$  и  $\langle \mu \rangle_{k+1}$ .

Ниже при проведении расчетов мы также будем полагать, электроны в импульсном пространстве не выходят за границы рассматриваемого диапазона, т.е.

$$\begin{aligned}
 n_{1/2}(z, t) = n_{N+1/2}(z, t) = & 0, \\
 j_{1/2}(z, t) = j_{N+1/2}(z, t) = & 0, \\
 \pi_{1/2}(z, t) = \pi_{N+1/2}(z, t) = & 0.
 \end{aligned} \tag{42}$$

## 7. РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ ЛАВИНЫ ЭЛЕКТРОНОВ В ГЕЛИИ. СРАВНЕНИЕ С РЕЗУЛЬТАТАМИ РАСЧЕТОВ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

Для того чтобы продемонстрировать точность метода групповых уравнений, был выполнен расчет развития лавины электронов в гелии в однородном электрическом поле с напряженностью  $E/N = 500$  и  $1000$  Тд, концентрация атомов гелия полагалась равной  $N_0 = 2.69 \times 10^{25} \text{ м}^{-3}$ . Величины  $\sigma_{tr}^{(1)}(p)$ ,  $\sigma_{tr}^{(2)}(p)$ ,  $\sigma_{tr}^{(3)}(p)$  были рассчитаны на основе дифференциальных сечений упругого рассеяния, для которых использованы те же зависимости, что и в работе [16]. Полные сечения возбуждения электронных уровней, а также дифференциальное и полное сечения ионизации, также взяты из работы [16]. Система уравнений (39) решалась численно в диапазоне энергий от 1 эВ до 10 кэВ. Данный энергетический диапазон был разбит на  $N_\epsilon = 100$  групп, таким образом, что все интервалы  $\Delta p_{k+1/2, k-1/2}$  равны.



**Рис. 1.** Сверху пространственное распределение электронов вдоль оси  $z$ . В середине энергетическое распределение электронов (вставки – распределение в дважды логарифмическом масштабе). Внизу зависимость от энергии среднего косинуса угла между вектором импульса электрона и направлением действия электрической силы. МК расчет и решение по полной и упрощенной МГМ.

Расчеты выполнялись в следующей постановке: в начальный момент времени в точке  $z = 0$  задавалось максвелловское распределение электронов по энергиям  $f_M$  со средней энергией 10 эВ (выбор данного значения не влияет на конечные

результаты, поскольку равновесная средняя энергия электронов много больше этого значения)

$$\begin{aligned} n_k(z, t = 0) &= \delta(z) f_M(\epsilon_k) \Delta \epsilon_{k+1/2, k-1/2}, \\ j_k(z, t = 0) &= 0, \quad \pi_k(z, t = 0) = 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Данная постановка задачи близка к постановке принятой в численном моделировании лавины электронов в гелии методом МК [4], что позволяет выполнять прямое сравнение результатов.

На рис. 1 представлены нормированные на единицу энергетические и пространственные распределения электронов в лавине в моменты времени  $t = 0.034$  нс ( $E/N = 500$  Тд) и  $t = 0.021$  нс ( $E/N = 1000$  Тд), рассчитанные по полной и упрощенной многогрупповой модели (МГМ), а также методом МК [4]. Видно, что наблюдается очень хорошее согласие между собой пространственных распределений, полученных по полной МГМ и методом МК. Для случая  $E/N = 500$  Тд пространственное распределение, рассчитанное по упрощенной МГМ, заметно отличается от них, но для  $E/N = 1000$  Тд результаты упрощенной МГМ уже близки к результатам МК-расчета. Также отметим, что для случая  $E/N = 1000$  Тд вычисленное по полной МГМ значение коэффициента ионизации  $k_{\text{ион}}$  равно  $1.46 \times 10^{-14}$  м<sup>3</sup>/с, что очень близко к значению из МК-расчета  $1.45 \times 10^{-14}$  м<sup>3</sup>/с. Для случая  $E/N = 500$  Тд относительная разница в значениях коэффициента не превышает 6%:  $k_{\text{ион}} = 8.82 \times 10^{-15}$  м<sup>3</sup>/с – МК,  $k_{\text{ион}} = 9.32 \times 10^{-15}$  м<sup>3</sup>/с – полная МГМ. В области энергий электрона 1–100 эВ энергетические распределения, рассчитанные по упрощенной МГМ, существенно отличаются от полученных в МК-расчетах, в то время как распределения, вычисленные по полной МГМ ближе к результатам МК-расчетов, но в области малых энергий также наблюдается заметная разница. Значения средней энергии электронов, полученные по полной МГМ равны 433 и 112 эВ, для  $E/N = 1000$  Тд и 500 Тд, результаты МК-расчетов: 468 и 136 эВ. На рис. 1 также показана зависимость среднего косинуса угла между вектором импульса электрона и вектором  $\mathbf{e}$  от энергии электрона. Можно видеть, что значения среднего косинуса, вычисленные по упрощенной МГМ, заметно отличаются от результатов МК-расчетов и расчетов по полной МГМ, особенно в области низких энергий, этим и объясняются плохие результаты упрощенной МГМ.

## 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исходя из кинетического уравнения, получена система одномерных многогрупповых уравнений для трех первых моментов функции распределения электронов (ФРЭ). Система включает уравнения баланса концентрации электронов, плотности потока и плотности потока импульса электронов. Система предназначена для расчета

кинетики электронов в области энергий электрона  $\epsilon \gg \epsilon_{\text{ион}}$ . Для демонстрации точности полученной системы групповых уравнений для моментов ФРЭ выполнено численное моделирование развития лавины электронов в гелии в однородном электрическом поле с напряженностью 500 и 1000 Тд. Рассчитанные пространственные распределения электронов вдоль оси симметрии лавины, а также энергетические распределения хорошо согласуются с результатами расчетов методом Монте-Карло (МК). Полученная система может быть использована при построении гибридных моделей расчета транспорта электронов в газовых разрядах. В данных моделях транспорт электронов в области  $\epsilon \gg \epsilon_{\text{ион}}$  рассчитывается из представленной многогрупповой модели (МГМ), а в области меньших энергий из диффузионно-дрейфового уравнения или системы групповых уравнений, полученных в области малых энергий в рамках приближения Лоренца [17].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hagelaar G.J. M. and Pitchford L.C. // Plasma Sources Sci. Technol. 2005. V. 14. P. 722.
2. Biagi S.F. 2011. Fortran code Magboltz version 8.97 <http://consult.cern.ch/writeup/magboltz/>.
3. Голант В.Е., Жилинский А.П., Сахаров И.Е. Основы физики плазмы. М.: Атомиздат, 1977.
4. Бочков Е.И., Бабич Л.П. // Физика плазмы. 2022. Т. 48. № 3. С. 276.
5. Sommerer T.J., Hitchon W.N.G., Lawler J.E. // Physical Review A. 1989. V. 39. № 12. P. 6356.
6. Surendra M., Graves D.B., Jellum G.M. // Physical Review A. 1990. V. 41. № 2. P. 1112.
7. Hitchon W.N.G., Parker G.J., and Lawler J.E. // IEEE Trans. Plasma Science. 1993. V. 21. № 2. P. 228.
8. Bogaerts A., Gijbels R., Goedheer W.J. // Anal. Chem. 1996. V. 68. P. 2296.
9. Wichaidit C., Hitchon W.N.G. // J. Computational Physics. 2005. V. 203. P. 650.
10. Бабич Л.П., Кудрявцева М.Л. // ЖЭТФ. 2007. Т. 131. № 5. С. 808.
11. Бабич Л.П., Бочков Е.И. // ЖЭТФ. 2011. Т. 139. № 3. С. 568.
12. Бочков Е.И. // ЖЭТФ. 2022. Т. 162. № 2 (8). С. 267.
13. Бочков Е.И. // Физика плазмы. 2022. Т. 48. № 5. С. 463.
14. Бабич Л.П. // ЖЭТФ. 2004. Т. 125. № 4. С. 808.
15. Holstein T. // Physical Review. 1946. V. 70. № 5, 6. P. 367.
16. Бочков Е.И., Бабич Л.П., Куцык И.М. // Физика плазмы. 2021 Т. 47. № 10. С. 935.
17. Бабич Л.П., Куцык И.М. // ТВТ. 1995. Т. 33. № 2. С. 191.