

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ОЦЕНКИ ВНУТРЕННЕЙ ИНДУКТИВНОСТИ В ТОКАМАКАХ

© 2023 г. В. Д. Пустовитов<sup>a,b,\*</sup>

<sup>a</sup> Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”, Москва, Россия

<sup>b</sup> Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, Россия

\*e-mail: Pustovitov\_VD@nrcki.ru

Поступила в редакцию 19.12.2022 г.

После доработки 24.03.2023 г.

Принята к публикации 25.03.2023 г.

Предметом исследования является формула, предложенная М. Ferrara и др. [Nucl. Fusion **48**, 065002 (2008)] в качестве верхней границы значения внутренней индуктивности  $\ell_i$  в токамаках. Эта формула постулировалась как пригодная в предположении, что тороидальная плотность тока в плазме не меняет знака. Здесь показано, что последнее условие позволяет получить  $\ell_i$  выше упомянутой “верхней границы”. Это явно демонстрируется легко интегрируемыми распределениями тока и результатом, превышающим упомянутый предел на 30% для плазмы с круглым поперечным сечением. Приведен также контрпример для вытянутой плазмы. Анализ показывает, что электромагнитный подход, основанный только на сравнении различных распределений тока по сечению плазмы, недостаточен для оценки  $\ell_i$ , так как результат должен зависеть еще и от давления плазмы.

**Ключевые слова:** токамак, равновесие плазмы, распределение тока в плазме, внутренняя индуктивность

**DOI:** 10.31857/S0367292122601564, **EDN:** WXYRYH

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] было предложено приближенное неравенство

$$\ell_i \leq \left[ \frac{1}{2} + \ln \frac{q_b}{q_0} \right] \frac{2K}{1+K^2} \quad (1)$$

для внутренней индуктивности  $\ell_i$  плазмы токамака. Здесь  $q_0$  и  $q_b$ , соответственно, запас устойчивости на оси и на краю плазмы, а  $K$  – вытянутость плазмы (отношение вертикальной и горизонтальной осей ее поперечного сечения). Величина  $\ell_i$  определена ниже уравнениями (4) – для простейшей геометрии – и (30) для общей геометрии токамака. Запас устойчивости  $q$  задается, соответственно, формулами (6) и (46).

Формула (1) была построена в два этапа.

Во-первых, использовалось соотношение

$$\ell_i = \frac{1}{2} + 2 \ln \frac{b}{a_h}, \quad (2)$$

которое легко получается для цилиндрической плазмы круглого сечения ( $K = 1$ ) со ступенчатым профилем плотности тока  $j_\zeta$  [2–5]. Последнее означает однородность  $j_\zeta$  в пределах некоторого

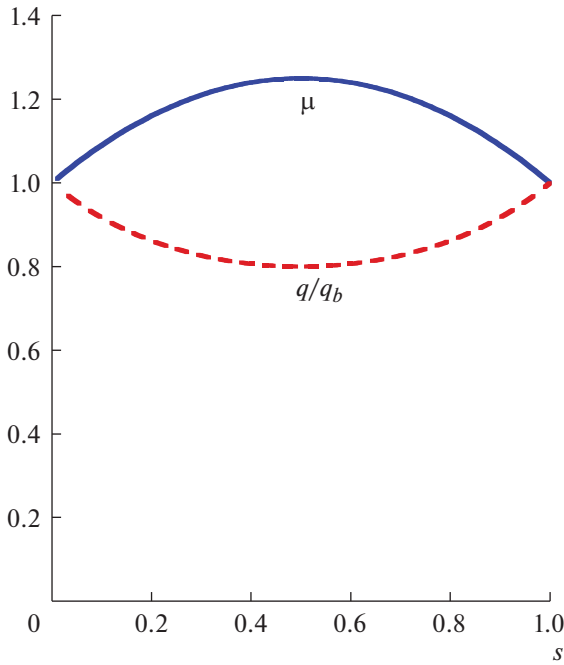
радиуса  $\rho < a_h$  и отсутствие тока вне этой области, вплоть до номинального края плазмы при  $\rho = b$  (его малый радиус). В такой конфигурации должно выполняться соотношение

$$\frac{b^2}{a_h^2} = \frac{q_b}{q_0}, \quad (3)$$

что объясняет присутствие  $q$  в (1).

Во-вторых, переход от (2) к (1) был сделан в [1] путем введения зависящего от  $K$  “корректирующего множителя”. Он просто был вставлен без теоретического обоснования.

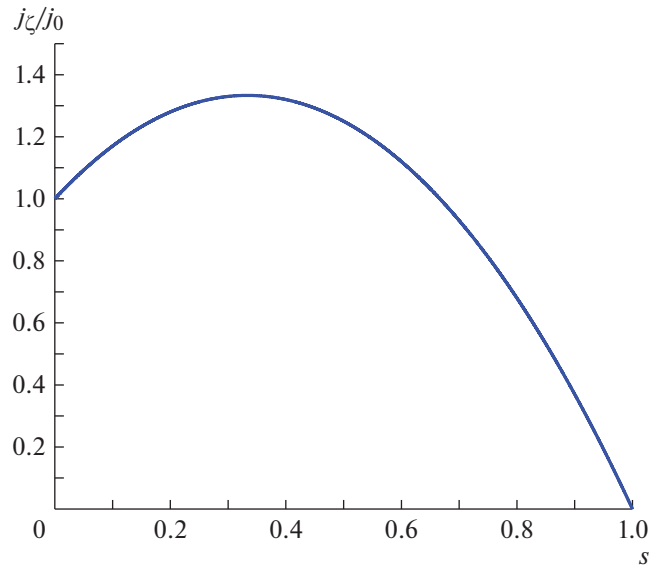
Появление неравенства в (1) объяснялось тем, что “ступенчатый профиль обладает тем свойством, что он соответствует максимально возможному  $\ell_i$  при заданных  $q_b$  и  $q_0$ , где  $q_0$  – запас устойчивости в центре плазмы. Это верно в предположении, что тороидальная плотность тока не меняет знака” [1]. В такой строгой формулировке это можно назвать теоремой ВП (о верхнем пределе) для индуктивности, хотя приведенных выше уравнений и аргументов недостаточно для ее формального доказательства. Однако они покрывают все, что предложено в [1] в поддержку неравенства (1).



**Рис. 1.** Верхняя (сплошная) кривая – нормализованное вращательное преобразование  $\mu$ , предписанное формулой (17) с  $k = 1$ , а нижняя кривая – соответствующее  $q/q_b$ .

Упомянутый Ступенчатый профиль – это математическая абстракция, которая должна отличаться от распределений  $j_z$  в реальных экспериментах, а модель, в рамках которой получено (1), предельно проста. Неудивительно, что во многих случаях значения  $\ell_i$ , полученные для плазмы в токамаке Alcator C-Mod с помощью EFIT реконструкции с 52 потоковыми петлями и датчиками полоидального поля и показанные на рисунках 1–4 в [1], заметно отличаются от предписанных формулой (1). Тем не менее, их поведение в целом (“тренды базы данных”) было оценено [1] как разумно согласующееся с (1). Это было частью обсуждения в обоснование экстраполяции выводов на масштаб токамака ИТЭР. На этом уровне приложений естественно возникает вопрос о точности формулы (1).

В [1] она была уверенно описана фразой “найден верхний предел значения внутренней индуктивности на основе аналитических приближений и подтвержден анализом большой базы данных разрядов Alcator C-Mod.” Эта цитата звучит как описание универсально применимого соотношения, но при ближайшем рассмотрении обнаруживаются некоторые странные особенности неравенства (1). Начнем с того, что оно дает  $\ell_i \leq 0$  при  $q_0 = 1.65q_b$ , хотя в этом случае по определе-



**Рис. 2.** Плотность тока, предписанная формулой (18) с  $k = 1$ .

нию (в той же самой цилиндрической модели) величина

$$\ell_i \equiv \int_0^1 \frac{B_\theta^2}{B_J^2} ds \quad (4)$$

должна быть положительной. Здесь  $B_\theta$  – полоидальное магнитное поле,  $B_J \equiv B_\theta(b)$  – его значение на краю плазмы, а

$$s \equiv \rho^2/b^2 \quad (5)$$

– нормированная площадь перпендикулярного сечения магнитной поверхности с малым радиусом  $\rho$ . Ясно, что  $\ell_i = 0$ , если  $B_\theta = 0$  всюду в плазме, т.е. при скинированном токе. Случай с  $q_0 = 1.65q_b$  разительно далек от этого.

Когда это замечено, становится ясно, что, в остром противоречии с (4), неравенство (1) предсказывает  $\ell_i < 0$  при  $q_0 > 1.65q_b$ . При гораздо больших отношениях  $q_0/q_b$ , как получается на токамаках в разрядах с полыми профилями тока и обращенным широм [6–14],  $\ell_i$  в (1) становится глубоко отрицательной. Важно, что единственное условие ВП-теоремы [1] “тороидальная плотность тока не меняет знака” в таких разрядах заведомо выполняется.

Экстравагантное предсказание  $\ell_i < 0$  уже могло бы быть достаточным основанием для пересмотра вопроса, но это не единственная мотивация. Уточнение необходимо еще и потому, что при внимательном рассмотрении можно найти случаи с  $\ell_i$  выше “верхнего предела” в конфигурациях даже с плоскими профилями  $q$  (что долж-

но идеально соответствовать модели в [1]) при  $K \neq 1$ . Например,  $\ell_i \approx 0.5$  независимо от  $K$  было получено аналитически в [15] для равновесия Соловьева. Вычисленное точное значение оказалось равным 0.484 при  $K = \sqrt{2.5}$ . Оба значения противоречат выводу  $\ell_i \leq 0.45$  из уравнения (1) для этого случая. Другим примером является формула  $\ell_i = 1/(1 + K^2)$ , недавно предложенная в [16], – см. там обсуждение после уравнения (3.21). Она также дает большее значение  $\ell_i$ , чем неравенство (1) при  $q_0 = q_b$  и  $K < 1$ . Дополнительная путаница возникает из-за того, что уравнение (2.8) в [16] предсказывает иную зависимость  $\ell_i$  от  $K$ , причем опять же выше уровня неравенства (1).

## 2. КОНТРПРИМЕРЫ К УРАВНЕНИЮ (1) ДЛЯ КРУГЛОЙ ПЛАЗМЫ

Отправной точкой в [1] была цилиндрическая круглая плазма. В этой геометрии

$$q = \frac{\rho}{R_0} \frac{B_0}{B_\theta}, \quad (6)$$

если продольное (тороидальное) поле  $B_\zeta$  считать постоянным и равным  $B_0$  во всей плазме. Здесь  $\rho$  – радиус, отсчитываемый от главной оси в поперечном сечении,  $\theta$  – полоидальный угол,  $\zeta$  – обозначает тороидальный угол или в данном случае его эквивалент, а  $2\pi R_0$  – полная длина системы.

Поскольку

$$B_\theta = \frac{\mu_0 J}{2\pi\rho}, \quad (7)$$

мы получим

$$\frac{B_\theta}{B_J} = \frac{J}{J_{pl}} \frac{b}{\rho}, \quad (8)$$

где

$$J \equiv 2\pi \int_0^\rho j_\zeta \rho d\rho \quad (9)$$

– продольный ток через трубку радиуса  $\rho$ , а  $J_{pl} \equiv J(b)$  – полный ток в плазме. Тогда

$$q = q_b \frac{\rho^2}{b^2} \frac{J_{pl}}{J}. \quad (10)$$

С определениями (5) и

$$\mu \equiv \frac{q_b}{q}, \quad (11)$$

что представляет собой нормированное вращательное преобразование, уравнение (10) эквивалентно равенству:

$$J = J_{pl} s \mu. \quad (12)$$

Также в этих обозначениях

$$\frac{B_\theta^2}{B_J^2} = s \mu^2, \quad (13)$$

что является следствием (5), (8) и (12). В итоге (4) дает

$$\ell_i - \frac{1}{2} = \int_0^1 (\mu^2 - 1) s ds, \quad (14)$$

где правая часть зависит только от  $\mu(s)$  (или от профиля  $q$ ).

Это компактное равенство следует анализировать при основном условии  $j_\zeta \geq 0$  ВП теоремы [1]. В нашей задаче

$$j_\zeta = \frac{1}{2\pi\rho} \frac{dJ}{d\rho} = \frac{J_{pl}}{\pi b^2} \frac{d}{ds}(s\mu), \quad (15)$$

поэтому это ограничение сводится к

$$\frac{d}{ds}(s\mu) \geq 0, \quad (16)$$

если считать, что  $J_{pl} > 0$ .

Уравнение (14) показывает, что  $\ell_i = 1/2$ , когда  $\mu = 1$  во всей плазме, что соответствует  $j_\zeta = \text{const}$ . Это в точности конкретная реализация (с  $a_h = b$ ) “ступенчатого” профиля, и в таком случае  $\ell_i = 1/2$  совпадает с верхней границей в (1).

Ограничение  $\ell_i \leq 0.5$  в (1) требует  $q_0 = q_b$ , но при таком задании  $q$  лишь в двух точках уравнение (14) допускает  $\ell_i > 0.5$ , если  $\mu$  достигает значений выше единицы при промежуточных  $s$ . Рассмотрим для определенности профиль

$$\mu = 1 + ks(1 - s) \quad (17)$$

с постоянным  $k$ . Тогда  $\mu(0) = \mu(b) = 1$  (или  $q_0 = q_b$ ),

$$j_\zeta = j_0 [1 + k(2s - 3s^2)] \quad (18)$$

так что  $j_\zeta \geq 0$ , если  $0 \leq k \leq 1$ , и мы получим из уравнения (14)

$$\ell_i = \frac{1}{2} + \frac{k}{6} \left(1 + \frac{k}{10}\right). \quad (19)$$

Слагаемое с  $k$  может увеличить  $\ell_i$  на 30% выше  $\ell_i = 1/2$ , ожидаемого из (2) при  $a_h = b$  или из (1) при  $K = 1$  и  $q_0 = q_b$ .

Этот пример можно проиллюстрировать рис. 1, на котором показаны как  $\mu(s)$  (верхняя кривая), так и  $q/q_b$  при  $k = 1$ . На рис. 2 приведена соответствующая плотность тока, заданная равенством (18).

Полагая  $k = k(s)$  в (17), мы охватим все семейство профилей  $\mu$ , подходящих для сравнения с

$\mu(s) = 1$ . Естественно, такая  $k(s)$  должна быть конечной на концах интервала  $[0, 1]$ , чтобы сохранить принятое в данном случае ограничение  $\mu(0) = \mu(b) = 1$ . Большие отклонения  $\mu$  и  $j_\zeta/j_0$  от единицы на рис. 1 и 2 в сочетании с результирующим большим  $(\ell_i - 1/2) > 0$  оставляют достаточную свободу для альтернативного выбора  $k$  в пределах, налагаемых (16), и обеспечивающего  $\ell_i > 1/2$ .

С

$$\mu^2 = 1 + \delta, \tag{20}$$

символически представляющим пробную функцию при указанных граничных условиях, мы получим из (14)

$$\ell_i - \frac{1}{2} = \int_0^1 \delta s ds = - \int_0^1 \frac{s^2}{2} \delta'(s) ds, \tag{21}$$

где штрих означает производную. Положительная правая часть снова даст  $\ell_i$  выше “верхнего предела”. При  $\delta(0) = \delta(1) = 0$  это легко получается с  $\delta' > 0$  (и, соответственно,  $\mu' > 0$ ) в центральной части при малых  $s$ , и отрицательной  $\delta'$  в периферийной области. Именно такое поведение показано на рис. 1. Эту идею легко проиллюстрировать, взяв

$$\delta = \begin{cases} s & \text{at } s \leq 0.5 \\ 1 - s & \text{at } s \geq 0.5 \end{cases}. \tag{22}$$

С таким  $\delta$  уравнение (21) дает  $\ell_i = 5/8$ , что на 25% превышает “верхний предел”.

Эти опровержения теоремы ВП можно рассматривать как введение в более общий случай с  $q_0 \neq q_b$ . Тогда в качестве основы для сравнения следует использовать ступенчатый профиль с  $j_\zeta = 0$  на краю плазмы, как в [1].

Если  $j_\zeta = 0$  при  $a_h < \rho \leq b$ , то из (15) с принятыми нормировками получим

$$\mu = \frac{1}{s} \tag{23}$$

при  $s \geq s_h \equiv a_h^2/b^2$ . Соответственно,

$$\int_{s_h}^1 (\mu^2 - 1) s ds = \int_{s_h}^1 \left( \frac{1}{s^2} - 1 \right) s ds = - \ln s_h - \frac{1 - s_h^2}{2}, \tag{24}$$

что является частью интеграла в (14). С  $\mu_h \equiv \mu(s_h)$  последний член в (24) можно представить как

$$(\mu_h^2 - 1) \int_0^{s_h} s ds = \frac{1 - s_h^2}{2}, \tag{25}$$

так как  $\mu_h s_h = 1$ , см. (23). Следовательно, в этом случае

$$\int_0^1 (\mu^2 - 1) s ds = \int_0^{s_h} (\mu^2 - \mu_h^2) s ds - \ln s_h, \tag{26}$$

и (14) можно представить в виде

$$\ell_i - \left[ \frac{1}{2} + \ln \frac{q_b}{q_0} \right] = \int_0^1 (\hat{\mu}^2 - 1) y dy - \ln \frac{q_h}{q_0}, \tag{27}$$

где  $\hat{\mu} \equiv \mu/\mu_h = q_h/q$  и  $y \equiv s/s_h$ . Здесь учтено, что, согласно (11) и (23),  $q = q_b s$  при  $s_h \leq s \leq 1$ .

Это можно использовать при любом  $q_0/q_b$ . Конфигурации с  $q_0 > 1.65 q_b$  не интересны для нашего обсуждения (1) из-за его нефизического предсказания  $\ell_i < 0$  в этом диапазоне. При  $q_0 = q_b$  нарушение теоремы ВП было продемонстрировано с  $\mu$  в виде (17). Рассмотрим теперь профили с  $q_0 < q_b$ .

Теореме ВП можно было бы доверять, если правая часть (27) всегда была бы отрицательной или нулевой. Чтобы сделать ее положительной, мы можем взять  $\hat{\mu}$  таким же, что и  $\mu$  в (17), но теперь как функцию  $y$  вместо  $s$ . Эта  $\mu$  была введена так, чтобы сделать  $q_h = q_0$ , что обнуляет последнее слагаемое в (27), и мы снова получим  $\ell_i$  больше, чем допускается неравенством (1). Отметим, что  $s_h = q_0/q_b$  с таким  $\hat{\mu}$ .

В [1] уравнение (1) предполагалось математически точным для круглой плазмы. Здесь мы продемонстрировали его нарушение именно в этом случае, при  $K = 1$ . Доказано, что уравнение (1) фактически не дает верхнего предела для  $\ell_i$ , по крайней мере, когда  $K = 1$ .

### 3. КОНТРИМЕР К ВЫРАЖЕНИЮ (1) ДЛЯ ВЫТЯНУТОЙ ПЛАЗМЫ

Возникает вопрос, может ли зависящий от формы плазмы множитель каким-то образом улучшить это соотношение для интересующих нас конфигураций с  $K > 1$ .

Хорошо известно (и было явно указано в [17–19]), что  $\ell_i = 0.5$  для круглой плазмы с однородной плотностью тока. Покажем, что то же самое справедливо и для вытянутой плазмы.

Рассмотрим семейство магнитных поверхностей  $a = \text{const}$ , описываемое формулой

$$\rho^2 (1 + \epsilon_K \cos 2\theta) = \frac{2K^2}{K^2 + 1} a^2. \tag{28}$$

Здесь  $a$  – горизонтальная полуось (“малый радиус”, вдоль линии  $\theta = 0$ ),  $b$  – ее значение на грани-

це плазмы,  $K$  – вытянутость, т.е. отношение вертикальной и горизонтальной осей эллипса (28), а

$$\varepsilon_K \equiv \frac{K^2 - 1}{K^2 + 1}. \quad (29)$$

При однородном  $j_\zeta$  равновесное решение в приближении большого аспектного отношения дает  $K = \text{const}$  в плазме [20–31]. Именно этот случай анализируется ниже.

Для некруглой плазмы  $\ell_i$  часто определяется как [15, 32–36]

$$\ell_i \equiv \frac{1}{B_{pa}^2 \Omega_{pl}} \int \mathbf{B}_p^2 d\tau, \quad (30)$$

где  $\mathbf{B}_p$  – полоидальное магнитное поле, связанное с полоидальным магнитным потоком  $\psi(r, z)$  соотношением

$$2\pi \mathbf{B}_p = \nabla \psi \times \nabla \zeta, \quad (31)$$

интегрирование ведется по объему плазмы,  $d\tau$  – элемент этого объема,  $\Omega$  – полный объем плазмы, а

$$B_{pa} = \frac{\mu_0 J_{pl}}{L} \quad (32)$$

с полным тороидальным током в плазме  $J_{pl}$ ,  $L$  – длина контура поперечного сечения границы плазмы. Здесь рассматривается тороидальная плазма,  $(r, \zeta, z)$  – обычные цилиндрические координаты, связанные с главной вертикальной осью,  $\zeta$  – тороидальный угол. Для круглой плазмы с большим аспектным отношением (30) сводится к (4).

Для вычисления (30) используем стандартные соотношения теории равновесия

$$\mu_0 J = -\frac{V'}{\psi'} \langle \mathbf{B}_p^2 \rangle = -\alpha_{22} \psi'. \quad (33)$$

Это прямые следствия уравнений  $\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B}_p / \mu_0$  и (31),  $J$  – ток, текущий внутри тороидальной трубки  $\psi = \text{const}$ ,  $V(a)$  – объем такого тора, штрих означает производную по потоковой метке  $a$  (ниже это будет  $a$ , введенная в (28)),

$$\langle f \rangle \equiv \frac{d}{dV} \int_V f d\tau \quad (34)$$

обозначает усреднение по объему  $dV$  тороидального слоя между соседними магнитными поверхностями. Подробнее см., например, [36, 37], где величина

$$\alpha_{22} \equiv V' \left\langle \left( \frac{\nabla a}{2\pi r} \right)^2 \right\rangle \quad (35)$$

была рассчитана для геометрии, описанной равенством (28):

$$\alpha_{22}^0 \equiv \frac{a}{R_a} \frac{K^2 + 1}{2K}. \quad (36)$$

Верхний индекс 0 указывает на то, что вытянутость постоянна по радиусу ( $K' = 0$ ), а  $R_a \equiv R_0 + \Delta(a)$  представляет собой радиальное положение центра поверхности со смещением  $\Delta(a)$  относительно фиксированной точки  $r = R_0$ .

С (33) и (34) для интеграла в (30) получится

$$\int_{pl} \mathbf{B}_p^2 d\tau = \int_{pl} \langle \mathbf{B}_p^2 \rangle V' da = \mu_0^2 \int_a^b \frac{J^2}{\alpha_{22}} da. \quad (37)$$

Для тока  $J$  через тор с вытянутым сечением  $a = \text{const}$ , описываемым (28) с  $K = \text{const}$  (и, соответственно,  $j_\zeta = \text{const}$ ), имеем

$$J(a) = j_\zeta S_\perp = J_{pl} \frac{a^2}{b^2}, \quad (38)$$

где  $S_\perp = \pi K a^2$  – площадь поперечного сечения.

С помощью этой формулы и  $\alpha_{22} = \alpha_{22}^0$  уравнение (37) сводится к

$$\int_{pl} \mathbf{B}_p^2 d\tau = \frac{(\mu_0 J_{pl})^2 b}{\alpha_{22}^0(b) 4}. \quad (39)$$

Подстановка (32) и (39) в (30) дает

$$\ell_i = \frac{L^2}{\alpha_{22}^0(b) \Omega 4} b. \quad (40)$$

Это чисто геометрическая величина. Объем тора с эллиптическим поперечным сечением, заданным (28), равен

$$V(a) = 2\pi^2 K a^2 R_a. \quad (41)$$

Тогда

$$\Omega \equiv V(b) = L_{SN}^2 R_b \frac{K}{K^2 + 1} = L_{SN}^2 \frac{b}{2\alpha_{22}^0(b)}, \quad (42)$$

где использованы уравнение (36) и определение

$$L_{SN} \equiv 2\pi b \sqrt{\frac{K^2 + 1}{2}}, \quad (43)$$

а  $R_b$  обозначает большой радиус плазменного шнура.

Подстановка (42) в (40) дает

$$\ell_i = \frac{L^2}{2L_{SN}^2} = \frac{1}{2}. \quad (44)$$

На последнем шаге использован тот факт, что

$$L = 2\pi b K \left[ \frac{2E(k)}{\pi} \right] \approx L_{SN}, \quad (45)$$

где  $E$  – полный эллиптический интеграл второго рода, а  $k \equiv \sqrt{1 - 1/K^2}$ . Аппроксимация  $L_{SN}$  для  $L$  была предложена в [38]. При  $K \leq 2$ , представляющем практический интерес, разница между  $L$  и  $L_{SN}$  незначительна.

Отметим, что (44) дает  $\ell_i = 1/2$  независимо от вытянутости  $K$ . Это отличается от предсказания (1), но для завершения сравнения необходимо найти  $q_b/q_0$  в рассматриваемом случае.

В токамаке запас устойчивости определяется как [19, 39–43]

$$q = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{B_z}{rB_p} d\ell_p, \quad (46)$$

где интегрирование осуществляется по полой контуре поверхности  $a = \text{const}$ . Согласно (31),  $2\pi r \mathbf{B}_p = \nabla a \times \mathbf{e}_z \psi'$ . Следовательно, (46) сводится к

$$q = -\frac{d\Phi}{d\psi}, \quad (47)$$

где  $\Phi$  – тороидальный магнитный поток. Используя (33), (36) и (38), чтобы выразить  $d\psi$ , и равенство  $\Phi = B_0 S_{\perp}$ , справедливое в низшем приближении ( $S_{\perp} = \pi a^2 K$ ), где малый вклад от плазмы в  $\Phi$  (в крайнем случае 1–2%) не учитывается, из (47) для конфигураций с  $K = \text{const}$  получим

$$q = -\frac{\Phi'}{\psi'} = \frac{5b^2 B_0}{R_0 J_{MA}} \frac{K^2 + 1}{2}, \quad (48)$$

что лишь незначительно отличается от формул (A10) и (A11) для  $q_{95}$  в [44] и от уравнения (4) в [45]. Здесь  $J_{MA}$  и  $J_{pl}$  выражены в мегаамперах.

Уравнение (48) дает  $q$  постоянным по сечению плазмы, что делает  $\ln(q_b/q_0) = 0$ . Тогда  $\ell_i = 1/2$  в уравнении (44) превышает “верхний предел”, получаемый из (1) при  $K \neq 1$ . Напомним, что точное значение, вычисленное для равновесия Соловьева при  $K = \sqrt{2.5}$  и  $\beta_p = 0.682$  в [15] было 0.484, что всего лишь на 3% меньше нашего аналитического результата (44).

#### 4. ОБСУЖДЕНИЕ

Во введении мы упомянули две формулы для  $\ell_i$ , предложенные в [16] для той же конфигурации с  $K = \text{const}$ . Выкладки, приводящие к (44), показывают, что те соотношения в [16] ошибочны. Этот вывод подтверждается также и тем, что они неинвариантны относительно замены  $K \rightarrow 1/K$ , тогда как конфигурации с  $K_1$  и  $K_2$  в цилиндрическом приближении неразличимы, если  $K_1 K_2 = 1$ . Добавим к этому, что выражение  $\ell_i = 1/(1 + K^2)$  из

[16] при вполне умеренном  $K = 1.5$  дает  $\ell_i \approx 0.3$  вместо  $\ell_i = 0.5$ . Столь большое отличие избавляет от необходимости дальнейших обсуждений этой темы.

Представленный выше анализ показывает, что ограничение (1) оказывается неверным как при  $K = 1$ , так и при  $K \neq 1$ . Для вытянутой плазмы оно опровергается в простейшем случае с  $q = \text{const}$ . Для круглой плазмы – конкретными примерами с большим превышением  $\ell_i$  над “верхним пределом”. Существование конфигураций с обратным широм [6–14] и  $j_z \geq 0$  – дополнительный аргумент против (1).

Теоретические сравнения, предложенные в [1], оперировали с профилями  $j_z$ , подчиненными единственному ограничению  $j_z \geq 0$ . Это чисто электромагнитный подход, никак не зависящий от свойств плазмы. Фактически он эквивалентен рассмотрению вначале различных распределений тока в сплошном цилиндрическом проводнике, а после этого в формулу просто добавляется коэффициент, зависящий от формы.

Математически тороидальная поправка действительно может быть незначительной, что подтверждается уравнением (44), полученным с  $\alpha_{22}$ , вычисленным для тора с большим аспектным отношением [36, 37]. Однако в том же приближении уравнения равновесия дают [18, 19, 23, 37, 39, 41, 43]

$$\Delta'(b) = -\frac{b}{R_b} \left( \beta_p + \frac{\ell_i}{2} \right) \quad (49)$$

для радиальной производной  $\Delta'$  смещения Шафранова на границе тороидальной плазмы с  $K = 1$ . Здесь

$$\beta_p \equiv \frac{2\mu_0}{B_{pa}^2 \Omega_{pl}} \int p d\tau \quad (50)$$

описывает вклад от давления плазмы  $p$ .

Вложенные поверхности существуют, когда  $|\Delta'| < 1$ . В токамаке желательно иметь большую  $\beta_p$  и малые  $|\Delta'|$ . Эти неизбежные требования и уравнение (49) подразумевают, что практический предел для  $\ell_i$  должен зависеть от  $\beta_p$ . Такая зависимость не могла появиться в формуле (1), полученной для цилиндра, но из уравнения (49) следует, что она может стать существенной при высоком  $\beta_p$ .

Обычно уравнение (49) считается основой для оценки равновесного предела  $\beta_p$ . Такая интерпретация естественна по двум причинам. Во-первых, высокое давление плазмы является главной целью экспериментов. Во-вторых, при умеренных  $\beta_p$  и разумных  $|\Delta'|$  уравнение (49) позволяет

значительно более высокие  $\ell_i$ , чем достигаются при нормальной работе токамаков. Тем не менее, при  $|\Delta| \rightarrow 1$  и  $\beta_p \rightarrow R_{pl}/b$  это уравнение превращается в весьма существенное ограничение для  $\ell_i$ .

Эти аргументы показывают, что чисто электромагнитный подход с произвольным заданием  $j_z$  и формы магнитных поверхностей (без требования  $\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ ) недостаточен для оценки верхнего предела  $\ell_i$ . Этот факт также подтверждается экспериментальными результатами. Графики зависимости  $\ell_i$  от  $K$ , представленные на рис. 3 и 4 в [1] для равновесной плазмы без срывов в токамаке Alcator C-Mod, демонстрируют существенно более сильную зависимость  $\ell_i$  от  $K$ , чем предписано соотношением (1).

Известно, что  $\ell_i$  естественным образом возникает в так называемых вириальных соотношениях [15, 17–19, 32–36, 38–40, 45], которые дают

$$2(\alpha - 1)\ell_i = S_1 + S_2(1 - R_i/R_0) - 2S_3, \quad (51)$$

что воспроизводит уравнения (18) в [15] или (22) в [32]. Там и в [36] полностью определены значения всех символов, а в [36] входящие в правую часть интегралы  $S_1 - S_3$  вычислены для плазмы с эллиптическими смещенными поверхностями вблизи границы. Кроме этих величин необходимо еще знание интегрального параметра

$$\alpha \equiv 2 \int_{pl} B_z^2 d\tau / \int_{pl} \mathbf{B}_p^2 d\tau. \quad (52)$$

В работах на токамаке JET было установлено, что его вычисление является наиболее трудным моментом в задаче определения  $\ell_i$  [33–35], поэтому до сих пор известны лишь простые оценки для  $\alpha$ , точность которых невысока. Предложенный в [33–35] скейлинг JET для  $\alpha$  в сочетании с аналитическими результатами [36] можно использовать для нахождения ограничения  $\ell_i$  из (51), но это отдельная большая задача. Тем не менее, именно (51) следует считать основой для замены (1).

Автор благодарен экспертам Тематической группы ИТРА по МГД, срывам и управлению за многочисленные полезные обсуждения, а также российским коллегам С.В. Коновалову и Ю.В. Грибову за поддержку.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ferrara M., Hutchinson I.H., Wolfe S.M. // Nucl. Fusion. 2008. V. 48. P. 065002.
2. Freidberg J.P., Graf M., Niemczewski A., Schultz S., Shajii A. Plasma Phys. Controlled Fusion. 1993. V. 35. P. 1641.
3. Elahi A.S., Ghoranneviss M. IEEE Transactions On Plasma Science. 2013. V. 41. P. 334.

4. Asif M. Journal of Modern Physics. 2013. V. 4. P. 579.
5. Noori E., Sadeghi Y., Mehdian H. Phys. Scr. 2015. V. 90. P. 105604.
6. Gormezano C. Plasma Phys. Controlled Fusion. 1999. V. 41. P. B367.
7. ITER Physics Expert Group on Disruptions, Plasma Control, and MHD and ITER Physics Basis Editors, Nucl. Fusion. 1999. V. 39. P. 2251.
8. Hawkes N.C., Stratton B.C., Tala T., Challis C.D., Conway G., DeAngelis R., Giroud C., Hobirk J., Joffrin E., Lomas P., Lotte P., Mailloux J., Mazon D., Rachlew E., Reyes-Cortes S., Solano E., Zastrow K.-D. Phys. Rev. Lett. 2001. V. 87. P. 115001.
9. Fujita T., Oikawa T., Suzuki T., Ide S., Sakamoto Y., Koide Y., Hatae T., Naito O., Isayama A., Hayashi N., Shirai H. Phys. Rev. Lett. 2001. V. 87. P. 245001.
10. Günter S., Gude A., Hobirk J., Maraschek M., Saarelma S., Schade S., Wolf R.C., ASDEX Upgrade Team, Nuclear Fusion. 2001. V. 41. P. 1283.
11. Kamada Y. JT-60 Team, Nuclear Fusion. 2001. V. 41. P. 1311.
12. Chankin A.V., Mukhovatov V.S., Fujita T., Miura Y. Plasma Phys. Controlled Fusion. 2003. V. 45. P. 323.
13. Hammett G.W., Jardin S.C., Stratton B.C. Phys. Plasmas. 2003. V. 10. P. 4048.
14. Hender T.C., Wesley J.C., Bialek J., Bondeson A., Boozer A.H., Buttery R.J., Garofalo A., Goodman T.P., Granetz R.S., Gribov Y., Gruber O., Gryaznevich M., Giruzzi G., Guenter S., Hayashi N. et al. Nucl. Fusion. 2007. V. 47. P. S128.
15. Lao L.L., John H.S., Stambaugh R.D., Pfeiffer W. Nucl. Fusion. 1985. V. 25. P. 1421.
16. Aghbolaghi M.A., Farahani N.D., Davani F.A. Fusion Eng. Des. 2019. V. 143. P. 1.
17. Shafranov V.D. J. Nucl. Energy C. 1963. V. 5. P. 251.
18. Шафранов В.Д. // Вопросы теории плазмы. Вып. 2 / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963. С. 92. [V.D. Shafranov, in *Reviews of Plasma Physics*, edited by M.A. Leontovich (Consultants Bureau, New York, 1966), Vol. 2, p. 103.]
19. Wesson J.A. Tokamaks (Clarendon, Oxford, 2004).
20. Gajewski R. Phys. Fluids. 1972. V. 15. P. 70.
21. Strauss H.R. Phys. Fluids. 1974. V. 17. P. 1040.
22. Papaloizou J.C.B., Rebelo I., Field J.J., Thomas C.L., Haas F.A. Nucl. Fusion. 1977. V. 17. P. 33.
23. Захаров Л.Е., Шафранов В.Д. // Вопросы теории плазмы. Вып. 11 / Под ред. М.А. Леонтовича и Б.Б. Кадомцева. М.: Энергоиздат, 1982. С. 118. [L.E. Zakharov and V.D. Shafranov, in *Reviews of Plasma Physics*, edited by M.A. Leontovich, B.B. Kadomtsev (Consultants Bureau, New York, 1986), Vol. 11, p. 153.]
24. Goedbloed J.P., Zakharov L.E. // Nucl. Fusion. 1980. V. 20. P. 1515.
25. Coelho R., Porcelli F. // Phys. Plasmas. 2003. V. 10. P. 930.
26. Porcelli F., Yolbarsop A. // Phys. Plasmas. 2019. V. 26. P. 054501.
27. Porcelli F., Yolbarsop A., Barberis T., Fitzpatrick R. // J. Phys.: Conf. Ser. 2021. V. 1785. P. 012004.

28. *Yolbarsop A., Porcelli F., Fitzpatrick R.* // Nucl. Fusion. 2021. V. 61. P. 114003.
29. *Barberis T., Porcelli F., Yolbarsop A.* // Nucl. Fusion. 2022. V. 62. P. 064002.
30. *Yolbarsop A., Porcelli F., Liu W., Fitzpatrick R.* // Plasma Phys. Control. Fusion. 2022. V. 64. P. 105002.
31. *Barberis T., Yolbarsop A., Porcelli F.* J. Plasma Phys. 2022. V. 88. P. 905880511.
32. *Bongard M.W., Barr J.L., Fonck R.J., Reusch J.A., Thome K.E.* // Phys. Plasmas. 2016. V. 23. P. 072508.
33. *Barana O., Murari A., Joffrin E., Sartori F.* Contributors to the EFDA-JET work programme, Plasma Phys. Contr. Fusion. 2002. V. 44. P. 2271.
34. *Barana O., Joffrin E., Murari A., Sartori F.* Contributors to the EFDA JET Work program, Fusion Eng. Des. 2003. V. 66–68. P. 697.
35. *Barana O., Murariv A., Sartori F., Joffrin E.* Contributors to the EFDA-JET Workprogramme, Nucl. Fusion. 2004. V. 44. P. 335.
36. *Pustovitov V.D.* // Phys. Plasmas. 2022. V. 29. P. 092507.
37. *Pustovitov V.D.* in *Reviews of Plasma Physics*, edited by B.B. Kadomtsev and V.D. Shafranov (Consultants Bureau, New York, 2000), Vol. 21, pp. 1–201.
38. *Swain D.W., Neilson G.H.* // Nucl. Fusion. 1982. V. 22. P. 1015.
39. *Freidberg J.P.* *Ideal Magnetohydrodynamics* (Plenum, New York, 1987).
40. *Takeda T., Tokuda S.* // J. Comput. Phys. 1991. V. 93. P. 1.
41. *Miyamoto K.* *Fundamentals of Plasma Physics and Controlled Fusion* (Iwanami, Tokyo, 1997).
42. *Пустовитов В.Д.* // *Физика плазмы*. 1998. Т. 24. С. 554. [V.D. Pustovitov, Plasma Phys. Rep. 1998. V. 24. P. 510.]
43. *Goedbloed J.P., Keppens R., Poedts S.* // *Advanced Magnetohydrodynamics with Applications to Laboratory and Astrophysical Plasmas* (Cambridge University Press, Cambridge, 2010).
44. ITER Physics Basis Editors, ITER Physics Expert Group Chairs and Co-Chairs, ITER Joint Central Team and Physics Integration Unit, Nucl. Fusion. 1999. V. 39. P. 2137.
45. *Strait E.J.* Fusion Sci. Technol. 2005. V. 48. P. 864.