

## ФРАКТАЛЬНАЯ СЕЙСМИЧНОСТЬ И СЕЙСМИЧЕСКИЙ РИСК

© 2020 г. Г. М. Молчан\*

*Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН, г. Москва, Россия*

*\*E-mail: molchan@mitp.ru*

Поступила в редакцию 25.04.2019 г.

После доработки 17.06.2019 г.

Принята к публикации 24.06.2019 г.

Недавно предприняты попытки учета фрактальных свойств сейсмичности при картировании долговременной интенсивности землетрясений. В работе затронуты теоретические аспекты фрактальности и дается критический анализ ее приложений к задачам сейсмического риска.

*Ключевые слова:* сейсмический риск, повторяемость землетрясений, мультифрактальность, статистическая сейсмология.

**DOI:** 10.31857/S000233372001007X

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Долговременная интенсивность сейсмических событий является базовой характеристикой сейсмичности в задачах сейсморайонирования и сейсмического риска. В ее основе лежит закон повторяемости Гутенберга–Рихтера:

$$\lg \lambda(\Delta, M) = a - b(M - M_0), \quad (1)$$

$$M_- \leq M \leq M_+.$$

Здесь  $\lambda(\Delta, M)$  интенсивность или среднее число событий в единицу времени, имеющих магнитуду  $\geq M$  в области  $\Delta$ .

Не существует единой методологии картирования параметров  $(a, b)$  с учетом диапазона магнитуд  $\Delta M = (M_-, M_+)$ . Однако в общих чертах, традиционный подход опирается на сейсмо тектоническое зонирование территории, выбор подходящих зон с постоянными значениями каждого из указанных параметров и их последующее статистическое оценивание (см., например, [Молчан, Подаецкая, 1973; Молчан и др., 1996]). В силу дефицита статистики разрушительных землетрясений дискуссионными могут быть как сами элементы зонирования, так и выбор магнитудных диапазонов.

В этой связи интересна серия публикаций [Кособоков, Некрасова, 2004; Некрасова, Кособоков, 2006; 2009; Nekrasova et al., 2011; Nekrasova et al., 2015; Кособоков, Соловьев, 2018], где обращается внимание на важность учета “фрактальной природы землетрясений”. Рассматривая проблему сейсмического риска для мегаполисов мира, авторы заключают, что недооценка фрактальности в распределении сейсмичности заметно снижает рис-

ки. “Общий уровень занижения повторяемости слишком велик, чтобы не учитываться при расчетах сейсмического риска и потерь, так необходимых для принятия мер по предупреждению бедствия и его последствий” [Некрасова, Кособоков, 2006].

Альтернативный подход авторы видят в “Общем законе подобия для землетрясений” (ОЗПЗ), который предсказывает интенсивность событий магнитуды  $\geq M$  в области  $\Delta_L$  размера  $L$ ,  $\Delta_L \subset \Delta_{L_0}$ , согласно формуле:

$$\lambda(\Delta_L, M) = A \times 10^{-B(M-M_0)} (L/L_0)^C. \quad (2)$$

$$l_0 \leq L \leq L_0.$$

Здесь:  $\Delta_{L_0}$  – область, в центре которой расположена целевая область  $\Delta_L$ ;  $A$  – ожидаемое число событий  $\geq M_0$  в год в  $\Delta_{L_0}$ ;  $C$  – фрактальная размерность эпицентров событий  $\geq M$  в  $\Delta_{L_0}$ .

В сейсмологической литературе соотношение (2) впервые появилось в работе [Кейлис-Борок и др., 1989] как пример подобия сейсмичности.

Ниже, в разделе 2, мы описываем метод ОЗПЗ и его применение к задачам сейсмического риска. Чтобы снять противоречия, в разделе 3 соотношение (2) трактуется как нормировка в законах сейсмичности Бака. Далее, в разделе 4, на базе точных понятий фрактальности и мультифрактальности обсуждается оптимальный выбор параметра  $C$ . Чтобы упростить чтение, разделы 3 и 4 снабжены итоговыми заключениями.

## 2. МОДЕЛИ СЕЙСМИЧНОСТИ: ТРАДИЦИОННЫЕ И ОЗПЗ

Для сравнения напомним одну из моделей сейсмичности, основанную на традиционном законе повторяемости [Молчан и др., 1996; Molchan et al., 1997]. В этой модели закон (1) представлен кусочно-линейным соотношением по пространству и магнитуде. При фиксированном диапазоне магнитуд  $\Delta M$ , параметр активности  $a$  более детален по пространству, чем параметр  $b$ . Иначе говоря, область с постоянным значением  $b$  ( $b$ -зона) разбита на подобласти с постоянными значениями  $a$ . Линейный размер  $b$ -зоны существенно больше максимального размера очага из диапазона магнитуд  $\Delta M$ . Чем больше сила землетрясений, тем больше размеры  $b$ -зоны. Это обусловлено необходимостью исключить возможные артефакты в виде “характеристических” событий [Wesnousky, 1994] и тем самым расширить область применимости модели (1).

В результате возникает многомасштабное представление закона (1) с параметрами  $(a, b, \Delta M)_i$  для подходящих пространственных зон. Поясним его на примере. Для описания потенциально разрушительных землетрясений ( $M > 3.8$ ) Италии в работах [Молчан и др., 1996; Molchan et al., 1997] были использованы два магнитудных уровня:  $\Delta_1 M = 3.5-5$  и  $\Delta_2 M = 5-7$ . Параметр  $a$  первого уровня постоянен на элементах сейсмотектонической регионализации ( $a$ -зоны), с типичными размерами: 40-130 км в длину и 20-30 км в ширину. Измельчению этих участков препятствовала статистика землетрясений. Зоны с постоянным значением  $b$  составлены из  $a$ -зон так, чтобы  $b$ -зоны были согласованы по размерам с магнитудными диапазонами  $\Delta_i M$  и при этом объединяли сейсмически связанные элементы исходной регионализации, т.е. были едины с точки зрения тектоники в соответствующем масштабе. Таких  $b$ -зон 1-го уровня оказалось 10, а зон второго уровня 3. Детализация  $a$ -параметра в  $b$ -зонах второго уровня связана с нетривиальной проблемой пространственной локализации сильных землетрясений. Из-за скудности статистики решение этого вопроса неединственно и может зависеть от конкретных приложений при получении верхних/нижних оценок риска.

Для сравнения с ОЗПЗ важны следующие элементы описанной модели: 1) неформальный подход к пространственному картированию параметров закона повторяемости и 2) дифференцированный по магнитуде и пространству учет условий, сохраняющих подобие в повторяемости событий. Препятствия подобию подробно анализировались в работе [Ven-Zion, 2008].

В приведенном примере главный вклад в число параметров модели вносят элементы исходной

сейсмотектонической регионализации, а с учетом статистики землетрясений,  $a$ -зоны первого уровня ( $\Delta_1 M = 3.5-5$ ).

### 2.1. Методология ОЗПЗ

Параметры  $(A, B, C)$  соотношения (2) картируются в узлах  $\{s\}$  стандартной решетки с шагом  $l_0$ . Каждая тройка параметров в узле определяется сейсмичностью в ячейке  $L_0 \times L_0$  с центром  $s$ . С этой целью ячейка  $L_0 \times L_0$  покрывается стандартной сеткой с шагом  $2^k l_0$ , где  $k = 0, 1, \dots$  масштабный уровень сетки. Для каждой ячейки допустимого уровня  $k$ ,  $\Delta^{(k)} \subset L_0 \times L_0$  определяется число событий магнитуды  $\geq M$  за период  $T$ ,  $n(\Delta^{(k)} | M, T)$ . Величины  $n(\Delta^{(k)} | M, T)/T$  рассматриваются как оценки  $\lambda(\Delta_L, M)$  с  $L = 2^k l_0$  в соотношении (2). По ансамблю таких оценок для всех допустимых уровней  $k = 0, 1, \dots$  определяются параметры  $(A, B, C)$ . Для надежности оценок используются вращения исходной сетки с последующим осреднением параметров. Стандартно рекомендуются 4 двоичных уровня с  $l_0 = (1/4)^0 \approx 28$  км и  $L_0 = 2^0 \approx 222$  км; исходные значения размеров указаны в градусах земного меридиана [Некрасова, Кособоков, 2006].

Как видим, минимальные размеры областей, используемых в описанных подходах, сопоставимы:  $l_0 \approx 30$  км. Поэтому трудности оценивания интенсивности событий на указанном масштабе одинаковы. В традиционных подходах они преодолеваются путем возможного укрупнения исходных элементов регионализации с опорой на сейсмотектонику. В методе ОЗПЗ, где минимальные ячейки задаются формальной решеткой, используется гипотеза подобия в виде соотношении (2). Чтобы оценить интенсивность событий в  $l_0 \times l_0$ , как мы видим, ячейка погружается в ансамбль одинаковых по размеру ячеек из  $L_0 \times L_0$ , к ним добавляются подобно укрупненные ячейки со статистикой событий из той же области. Такое увеличение данных призвано повысить надежность оценивания интенсивности событий в  $l_0 \times l_0$  на базе модели (2). Эти ожидания вполне оправданы, если гипотеза подобия (2) верна, а исходная ячейка является *типичной* в ансамбле минимальных ячеек из  $L_0 \times L_0$ .

Чтобы пояснить выделенный термин, приведем пример. Пусть сейсмичность концентрируется на узком разломе, удаленном от исходного узла “ $s$ ” на расстоянии  $> l_0$ . Тогда исходная ячейка  $l_0 \times l_0$  не может быть типичной в масштабе  $l_0$ , хотя это никак не влияет на оценку параметров  $A, B, C$ . Действительно, параметры  $A$  и  $B$  не зависят от

геометрии эпицентров, а параметр  $C$  должен отражать размерность разлома, с которым ячейка  $l_0 \times l_0$  не пересекается. В результате сейсмическая интенсивность в нетипичной ячейке окажется завышенной при использовании ОЗПЗ.

Как правило, конкретизация нетипичных ячеек неочевидна. Однако их присутствие проявляется в целом. Действительно, роль минимальных по размеру ячеек в оценивании параметров ОЗПЗ в узле совершенно одинакова. Параметры  $A, B, C$  авторы связывают с центром области  $L_0 \times L_0$  только из осторожности, считая фрактальные свойства сейсмичности неоднородными по пространству. Поэтому в теоретическом анализе оценку интенсивности для центральной ячейки  $l_0 \times l_0$  логично распространить на все остальные. И тогда интенсивность событий  $\geq M_0$  в  $L_0 \times L_0$  можно получить, суммируя оценки (2), т.е.  $A(l_0/L_0)^C$ , по всем минимальным ячейкам. Поскольку число ячеек равно  $(L_0/l_0)^2$ , а дробная размерность  $C$  не превосходит размерности пространства,  $C \leq d = 2$ , получим:

$$A = A(l_0/L_0)^C \times (L_0/l_0)^2 = A(L_0/l_0)^{2-C} \geq A. \quad (3)$$

Это соотношение непротиворечиво, если только  $C = d = 2$ . Иначе говоря, при  $C < 2$  среди минимальных ячеек всегда существуют нетипичные ячейки. Их наличие позволяет избежать противоречия в (3).

Приведенное рассуждение вскрывает существенное отличие моделей (1) и (2). Выше мы негласно воспользовались свойством аддитивности, которым обязана обладать мера сейсмической интенсивности  $\lambda(\Delta, M)$ . Это означает, что для любых непересекающихся подмножеств  $\Delta_i$  имеет место равенство:

$$\lambda(\cup \Delta_i, M) = \sum_i \lambda(\Delta_i, M). \quad (4)$$

Соотношение (2) как модель меры интенсивности событий должна обладать указанным свойством, однако в силу параметризации оно не выполняется. Исключение могут составлять случаи целочисленных значений параметра  $C$ : 1, 2 или 3. Доказательство этого факта аналогично (3), надо только правильно учесть размерность пространства, т.е. размерность  $d = 2$  заменить на  $d = 1$  или 3. При любых  $C$  свойство аддитивности модели ОЗПЗ остается в силе только для ячеек стандартной сетки с шагом  $L_0$ , поскольку для них (2) совпадает с обычным законом повторяемости.

Потеря свойства аддитивности в модели (2) заметно снижает ее область применимости. Пока все известные нам примеры приложений связаны с оценками сейсмического риска городов. Приве-

дем один из них из работы [Кособоков, Соловьев, 2018]:

“оценивая повторяемость землетрясений в Петропавловске-Камчатском с площадью  $S_{ПК} = 400 \text{ км}^2$ , где  $A = 0.12$ ,  $B = 0.86$ ,  $C = 1.26$  по данным сейсмичности на всей Камчатке с площадью  $S_{Кам} = 270000 \text{ км}^2$ , получим, что недооценка повторяемости землетрясений в черте города при нормировании на площадь может составить (величину):

$$v = (S_{Кам}/S_{ПК}) / (S_{Кам}/S_{ПК})^{C/2} = 675^{0.37} > 11 \text{ раз}”. \quad (5)$$

Расчеты требуют пояснения. Будем придерживаться объявленного стандарта и рассмотрим ячейки  $L_0 \times L_0$  размера в  $1^\circ$  земного меридиана с площадью  $S_0 = 111.2^2 \text{ км}^2$ . Для модели с равномерным распределением эпицентров в ячейке  $L_0 \times L_0$  получим интенсивность событий  $\geq M_0$  на площади  $S_{ПК}$ :  $\lambda_0 = A(S_{ПК}/S_0)$ . Аналогичная оценка согласно (2) должна быть  $\lambda = A(S_{ПК}/S_0)^{C/2}$ . Параметры  $A$  совпадают, поскольку они фиксируют интенсивность событий  $\geq M_0$  в ячейке  $L_0 \times L_0$ . Отсюда имеем  $\lambda = A(\sqrt{S_{ПК}/S_0})^C = 3.56$  вместо 11.1 или 7.6 из другой работы авторов [Некрасова, Кособоков, 2009].

Оценка  $v = 11.1$  основана на сравнении модели ОЗПЗ с нулевой гипотезой о равномерности распределения сейсмичности на всей территории Камчатки. Без уточнения территории гипотеза выглядит крайне сомнительной, поскольку уже вблизи ПК (в направлении З-В) картированный параметр активности меняется в десятки раз [Гусев и др., 1980]. Поэтому оценки эффективности ОЗПЗ,  $v$ , заслуживают доверия, если только: 1) сейсмичность на территории изучаемого объекта ПК типична для всей территории, на которой определялись параметры ОЗПЗ, и 2) гипотеза о *равномерной* плотности эпицентров на изучаемой территории имеет под собой веские основания. Иначе говоря, корректное сравнение методов должно учитывать реальные альтернативы, связанные с сейсморайонированием. Они намного богаче предположения о равномерном распределении сейсмичности даже в областях стандартного размера  $1^\circ \times 1^\circ$ .

Опыт оценки риска для городов Мира с миллионным и более населением в сейсмоопасных зонах представлен в работе [Кейлис-Борок и др., 1984]. Несмотря на грубость данных 80-х гг., прогноз 8-ми балльных сотрясений городов, основанный на традиционных подходах, вполне оправдал себя для периодов авторского мониторинга в 10 и 20 лет. Речь идет об однородных по численности больших группах городов. В этих условиях веро-

ятностный закон больших чисел обеспечивает устойчивость оценок сейсмического риска.

### 3. ОЗПЗ КАК НОРМИРОВКА

Потеря свойства аддитивности в модели (2) означает, что мера сейсмической интенсивности устроена сложнее. Чтобы скорректировать модель, обратимся к истории вопроса.

Термин “Общий закон подобия для землетрясений” впервые появился в работе Бака [Bak et al., 2002] как *Unified Scaling Law for Earthquake* (USLE), однако с другой смысловой нагрузкой соотношения (2). Чтобы уточнить исходное понятие, рассмотрим сейсмическую зону  $G$  и покроем ее регулярной сеткой с шагом  $L$ . Пусть  $\xi(L \times L)$  некоторая статистика сейсмических событий  $\geq M$  в ячейке  $L \times L$  за время  $\Delta T$ . Следуя и обобщая Бака, будем говорить, что сейсмичность обладает свойством USLE, если после подходящей нормировки статистики:  $a_L \xi(L \times L)$ , где  $a_L = f(L, M, \Delta T)$ , ее распределение, усредненное по всем ячейкам  $L \times L$ , не зависит от  $L, M, \Delta T$ . Усредненное распределение можно интерпретировать как распределение нормированной статистики в случайно выбранной ячейке пространства. Возможен и более сильный вариант USLE, когда распределение нормированной статистики одно и то же для всех сейсмоактивных ячеек. Тогда термин *Unified* следует заменить согласно [Corral, 2003] на *Universal*.

В качестве примера USLE-статистики в работах [Bak et al., 2002; Corral, 2003; 2004] рассмотрен интервал времени  $\tau_L$  между двумя последовательными событиями в ячейке  $L \times L$ . Эта статистика интересна тем, что ее естественная нормировка должна быть пропорциональной интенсивности  $\lambda(\Delta_L, M)$  событий магнитуды  $\geq M$  в  $\Delta_L = L \times L$ , поскольку в условиях стационарности режима среднее значение  $E\lambda(\Delta_L, M)\tau_L = 1$  не зависит от параметров. Учитывая закон повторяемости Гуттенберга–Рихтера по магнитуде и фрактальность распределения по пространству (подробнее см. ниже), в работе [Bak et al., 2002] предложен нормировочный коэффициент для  $\tau_L$  в виде:

$$a_L(\tau_L) = A \times 10^{-B(M-M_0)} L^{d_f}, \quad (6)$$

где  $d_f$  (как и  $C$ ) интерпретируется как фрактальная размерность эпицентров.

Формально правые части (6) и (2) совпадают параметрически, но отличаются по содержанию и целям использования: (6) это нормировка сейсмичности, а (2) ее оценка. Кроме того, исходя из предложенных авторами методов оценивания, фрактальные параметры  $d_f$  и  $C$  оказались разными по типу размерности (см. ниже).

Согласно работам [Bak et al., 2002; Corral, 2003; 2004] нормированное распределение статистики  $\tau_L$  неплохо согласуется с Гамма-распределением, имеющим плотность  $p(x) = cx^{\gamma-1} e^{-x}$ . Это наблюдение относится к полным каталогам, включающим афтершоки. Теоретический анализ показал [Molchan, 2005], что  $\tau_L$  как USLE-статистика реализуется лишь для однородного пуассоновского потока событий, что противоречит реальной сейсмичности и оценке параметра  $\gamma$ , значимо отличной от 1.

“Универсальность распределения” нормированной величины  $\tau_L$  кажущаяся и обязана подводящей визуализации распределений  $a_L \tau_L$ , а именно в log-log шкале [Molchan, Kronrod, 2007]. В такой системе координат хорошо подтверждается согласие хвостов распределений  $a_L \tau_L$ , но скрыто расхождение распределений в области умеренных значений указанных статистик. Поведение распределений  $a_L \tau_L$  в области малых значений имеет степенной характер и обязано закону Омори, а в области больших значений оно экспоненциальное и обязано пуассоновости основных событий. Таким образом, USLE-закон для статистики  $\tau_L$  синтезирует факты, хорошо известные сейсмологам.

Оставаясь в рамках идеологии П. Бака, более естественно искать такую оптимальную нормировку статистики  $\xi(L \times L)$ , при которой распределение  $a_L \xi(L \times L)$  в случайной ячейке  $L \times L$  предельно слабо зависит от параметров  $\Delta T, L, M$  и при этом остается невырожденным.

Термин “предельно слабо” означает выбор такой нормировки, при которой распределения ансамблей  $\{a_L \xi(L \times L)\}$  с разными  $L$  наиболее близки друг к другу в подходящей метрике. Учитывая недостатки представления распределений в работах [Bak et al., 2002; Corral, 2003; 2004], расхождение распределений оценивалось авторами [Molchan, Kronrod, 2005] в метрике Леви [Феллер, 1967]. В этой метрике измеряется наибольший зазор между графиками двух распределений в направлении вектора  $(-1, 1)$ . Метрика Леви наиболее чувствительна к отклонениям распределений в области центральных значений случайных величин.

Термин *невырожденности* предельного распределения означает, что нормированная статистика при  $L \ll 1$  не вырождается в ноль или бесконечность. Особая роль малых масштабов  $L$  связана с тем, что только при  $L \rightarrow 0$  относительно корректно можно говорить о фрактальности.

Проблема оптимальной нормализации была рассмотрена в работах [Molchan, Kronrod, 2005; 2007] для двух статистик  $\tau_L$  и  $n_L$ , где  $n_L$  — число событий  $\geq M$  в случайно выбранной ячейке  $L \times L$  за

время  $\Delta T$ . При невозможности разделить типичные и нетипичные ячейки, анализ долговременной статистики  $n_L$  в случайной ячейке  $L \times L$ , является естественной альтернативой соотношению (2). Чисто теоретический пример сейсмичности, в которой статистика  $n_L$  обладает в точности свойством USLE, предложен в работе [Писаренко, Голубева, 1996].

Поскольку  $En_L = \lambda(\Delta_L, M)\Delta T$ , нормировка статистики  $n_L$  опять связана с интенсивностью событий в  $L \times L$ :

$$a_L(n_L) = [\Delta T A \times 10^{-B(M-M_0)} (L/L_0)^{d_f}]^{-1}. \quad (7)$$

Соотношения (6), (7) определяют только структуру нормировок, но не означают совпадения параметров, относящихся к обоим статистикам  $\tau_L, n_L$ .

Оптимальное значение  $d_f$  может зависеть и от выбора статистики и от того, как мы определим *случайность* или, что то же, вес ячейки  $L \times L$  при осреднении распределений.

Будем выбирать ячейку  $L \times L$  с вероятностью

$$w_p(L \times L) = \lambda^p(L \times L) / \Lambda_p, \quad (8)$$

где  $\Lambda_p$  определяется условием  $\sum w_p(L \times L) = 1$ . Вариант  $p = 0$  предполагает равновероятными все сейсмогенные ячейки. Этот вариант использовался в работе [Bak et al., 2002]. Вариант  $p = 1$  выглядит наиболее естественно, поскольку вес ячейки пропорционален наблюдаемому числу в ней событий. Большие  $p > 1$  позволяют локализовать с разной степенью разрешения места высокой сейсмической активности.

Для однородной по пространству мультифрактальной меры сейсмичности (точные определения см. ниже) авторы работы [Molchan, Kronrod, 2005] конструктивно описали неоднозначность выбора оптимального параметра  $d_f$  и подтвердили выводы на примере сейсмичности разлома Сан-Андреас. В частности, оптимальная нормировка статистики  $n_L$  для событий  $M > 2$  достигается с  $d_f \approx 1.8$  в случае весового параметра  $p = 0$ , и с  $d_f \approx 1.2$  в случае  $p = 1$ . Указанные эмпирические оценки  $d_f$  заметно разные и обе относятся к диапазону масштабов  $L = 10-100$  км. Авторы работы [Некрасова, Кособоков, 2009], используя  $C \approx 1.2$ , оценили эффект применения метода ОЗПЗ к г. Лос-Анджелес величиной (5):  $\nu = 6.2$ . При оценке Бака  $C \approx 1.8$ , эффект снижается почти вчетверо:  $\nu \approx 1.6$ , что подтверждает важность правильного выбора фрактального параметра.

### 3.1. Вывод

Модель сейсмической интенсивности (2) не обладает свойством аддитивности и поэтому нуждается в коррекции. Рассматривая ОЗПЗ как нормировку статистики  $n_L$  в случайной ячейке, можно заметно ослабить (но не устранить) зависимость ее распределения от масштаба. В результате коррекция соотношения (2) приобретает стохастический вид:

$$\lambda(\Delta_L, M) = A \times 10^{-B(M-M_0)} (L/L_0)^C \xi(\Delta_L), \quad L \ll L_0, \quad (9)$$

где о коэффициентах  $\{\xi(\Delta_L)\}$  известно только то, что распределение каждого  $L$ -ансамбля корректирующих множителей  $\{\xi(\Delta_L)\}$  слабо зависит от масштаба. Здесь ячейки  $\Delta_L$  образуют сетку с шагом  $L$ , а  $L_0$  масштаб области с однородными (см. ниже) фрактальными свойствами меры сейсмичности. Скорректированная модель (9) вместо точечных оценок интенсивности позволяет строить в лучшем случае доверительные интервалы для  $\lambda(\Delta_L, M)$ , что снижает ее практическую ценность.

Модель (9) проверялась на событиях ( $M > 2$ ) разлома Сан-Андреас [Molchan, Kronrod, 2005] и, конечно, нуждается в обосновании в каждом конкретном случае региона и диапазона магнитуд. Нетривиальные примеры распределений  $\{\xi(\Delta_L)\}$  представлены в работе [Molchan, Kronrod, 2005].

Выбор параметра  $C$  не однозначен и требует специального анализа, представленного ниже.

### 4. МУЛЬТИФРАКТАЛЬНОСТЬ И ПАРАМЕТР $C$

Чтобы понять природу параметров  $C, d_f$  в соотношениях (2), (6), необходимы точные определения фрактальности и мультифрактальности. Эти понятия неизбежно связаны с бесконечно малыми пространственными масштабами, недоступными при анализе сейсмичности. Однако другого пути нет, если нужно понять те подводные камни, которые скрыты при формальном использовании этих понятий на макроуровне.

Интенсивность событий магнитуды  $\geq M$  в ячейках  $\Delta$ ,  $\lambda(\Delta, M)$ , определяет при фиксированном значении  $M$  меру  $\mu(\Delta)$  на подмножествах сейсмоактивной зоны. Как чисто математический объект меру  $\mu(\Delta)$  называют *мультифракталом*, если, грубо говоря, ее носитель можно разложить в сумму подмножеств  $S_\alpha$ , таких что в подходящей системе окрестностей  $\Delta_L$ , своей для каждой точки  $g \in S_\alpha$ , мера демонстрирует *сингулярность* типа  $\alpha$ :

$$\lg \mu(\Delta_L) \sim \alpha \lg L, \quad L \ll 1. \quad (10)$$

(Запись  $x \sim y$  означает, что  $x/y \approx 1$  при  $L \ll 1$ ).

Заметим, что гладкая мера на плоскости имеет, как правило, параметр  $\alpha = 2$ .

Набор пар  $(\alpha, f(\alpha))$ , где  $f(\alpha)$  дробная размерность множества  $S_\alpha$ , определяет мультифрактальный спектр меры. В теоретических работах дробная размерность ассоциируется с размерностью Хаусдорфа, а в физических приложениях (менее строгих) с боксовой размерностью. По определению спектр *монофрактала* (или просто фрактала) состоит из одной пары, а спектр *однородного мультифрактала* один и тот же для разных частей носителя меры.

Спектр однородного мультифрактала содержит точку, у которой сингулярность совпадает с размерностью,  $\alpha_0 = f(\alpha_0)$ . Такая размерность называется *информационной*  $D_1$ , поскольку все точки с указанной сингулярностью образуют множество полной меры:  $\mu(S_{\alpha_0}) = \mu(\cup S_\alpha)$ . Иначе говоря, соотношение (10) имеет место с  $\alpha = D_1$  в подходящей малой окрестности любой точки пространства, *типичной* для меры  $\mu(\cdot)$ . На макромасштабном уровне понятие типичности уже обсуждалось в разделе 2. На микроуровне антиподы типичным точкам мультифрактальной меры многолики и представлены объединением подмножеств  $S_\alpha$  точек с однородной сингулярностью  $\alpha \neq D_1$ . Как и на макроуровне, множества  $S_\alpha$  не известны. Любая сингулярность (10) может быть выявлена, как правило, статистическими методами, но без привязки к конкретной точке пространства.

Конструктивным признаком мультифрактальности меры является приближенно линейное соотношение:

$$\lg \sum \mu^p(L \times L) \sim \tau(p) \lg L, \quad L \ll 1 \quad (11)$$

при малых размерах шага решетки и разных фиксированных  $p$ . Для простоты записи здесь мера нормирована, т.е. имеет полную единичную массу, и потому  $\tau(1) = 0$ . Суммирование в (11) ведется по ячейкам ненулевой  $\mu$ -меры, что на языке сейсмичности соответствует сейсмоактивным ячейкам.

Известно, что в условиях выпуклости кривой  $[-\tau(p)]$ , величины  $\tau(p)$  полностью определяют мультифрактальный спектр меры. В частности, множество сингулярностей типа (10) в регулярной ситуации совпадает с множеством значений  $d\tau(p)/dp := \check{\tau}(p)$ . Приведем точные соотношения для базовых (в приложениях) размерностей: *боксовая* размерность носителя меры  $D_0 = -\tau(0)$ , *информационная* размерность  $D_1 = \check{\tau}(1)$ , *корреляционная* размерность  $D_2 = \tau(2)$  [Hentschel, Procaccia, 1983; Feder, 1988].

И размерности, и сингулярности меры формально объясняют степенную параметризацию в (2), (6).

С одной стороны (10) эквивалентно грубому соотношению  $\mu(\Delta_L) \propto L^\alpha$  для малых масштабов вблизи точек из  $S_\alpha$ . (Символ  $x \propto y$  означает, что  $x/y$  медленно меняется при  $L \rightarrow 0$ ). Любое множество  $S_\alpha$  однородной мультифрактальной меры всюду плотно на ее носителе. Поэтому любая сингулярность меры является претендентом на фрактальный параметр в (2), (6). Среди них определенное преимущество имеет сингулярность  $\alpha = D_1$ , поскольку является типичной для меры.

Рассмотрим размерность  $f(\alpha)$ . Число элементов покрытия произвольного фрактального множества  $S$  растет степенным образом:  $N(L) \propto L^{-d_S}$ , где  $d_S$  есть боксовая размерность  $S$ . Возьмем в качестве  $S$  носитель меры. Тогда в среднем для элементов его покрытия  $\mu(\Delta_L) \propto N(L)^{-1} \propto L^{D_0}$ . Поэтому на роль параметра  $d_f$  в (2), (6) может претендовать размерность  $D_0$ , что и было реализовано в работе [Bak et al., 2002]. Аналогично, полагая  $S = S_\alpha$ , мы получим  $\mu(\Delta_L) \propto L^{d_f}$  с  $d_f = f(\alpha)$ . Обе интерпретации степенного поведения меры согласованы, если  $\alpha = f(\alpha) = D_1$ , т.е. когда  $S$  есть множество типичных точек меры.

Описанные возможности для фрактального параметра в (2), (6) не решают задачу его оптимального выбора, когда речь идет о случайной ячейке  $\Delta_L$ . Согласно работе [Molchan, Kronrod, 2005], если случайность ячейки описывается распределением (8) с параметром  $p \geq 0$ , тогда:

$$d_f^{\text{opt}}(p) = \tau(p+1) - \tau(p). \quad (12)$$

Поскольку  $\tau(1) = 0$ ,  $d_f^{\text{opt}}$  совпадает с боксовой размерностью,  $d_f^{\text{opt}}(0) = D_0$ , при  $p = 0$ , и с корреляционной размерностью,  $d_f^{\text{opt}}(1) = D_2$ , при  $p = 1$ . Указанные выше эмпирические оценки  $d_f^{\text{opt}}$  для разлома Сан-Андреас подтвердили это теоретическое заключение на масштабах 10–100 км.

Выбор случайной ячейки с частотой, пропорциональной числу в ней событий, представляется естественным. Он тесно связан с информационной размерностью. Поэтому теоретическое предсказание  $d_f^{\text{opt}}(1) = D_2$  вместо  $D_1$  на первый взгляд неожиданно. На самом деле соотношение (12) есть результат сбалансированного учета типичных и нетипичных точек в мультифрактальной мере в зависимости от процедуры случайного выбора и поэтому представляет собой своеобразное осреднение размерностей.

В работах [Кособоков, Некрасова, 2004] методика оценивания параметра  $C$  ориентирована на получение корреляционной размерности  $D_2$ . Выбор  $D_2 \neq 2$

означает признание нетипичных ячеек, хотя само соотношение (2) такую возможность исключает.

#### 4.1. Диапазон масштабов

На практике диапазон масштабов  $L$  в соотношениях (2, 6) ограничен от больших и малых значений, т.е.

$$\delta_- < \lg L < \delta_+. \quad (13)$$

Дополнительное требование

$$\delta_+ - \delta_- \approx 1 - 2 \quad (14)$$

типично для обсуждения *нетривиальности подобию* в физической литературе [Malkai et al., 1997]. Если в условиях (14) наблюдаются соотношения (11) и оценки  $\tau(p)$  устойчивы при некоторых заданных  $p$ , тогда можно сказать, что физический объект выглядит как фрактал или мультифрактал ( $\tau(p) \neq cp$ ) в диапазоне масштабов (13).

Описанные требования, в частности, устойчивость и условие (14), оказались достаточно жесткими для современных мировых и региональных каталогов, которыми располагали авторы работы [Molchan, Kronrod, 2009]. Анализируя сейсмичность Земли, авторам удалось выделить лишь шесть регионов (Ю. Калифорния,  $M > 2$ ; Камчатка,  $M > 3.5$ ; Новая Зеландия,  $M > 2.5$ ; Центральная Американская дуга,  $M > 4$ ; Коста Рика,  $M > 3.2$ ; Греция,  $M > 3$ ; Гарм,  $M > 1.7$ ), где для отдельных участков было сделано положительное заключение о мультифрактальном проявлении сейсмичности с лог-диапазоном масштабов:  $\delta_+ - \delta_- \in [1, 1.6]$ . К сожалению, строгий анализ фрактальности в сейсмо-статистике (см., например, [Goltz, 1997; Harte, 2001; Molchan, Kronrod, 2009]) пока невелик.

В ОЗПЗ-приложениях, как правило, величина  $\delta_+ - \delta_- \approx \lg 8 = 0.9$ , что меньше 1. В этих условиях оценки  $C$  не всегда надежны. Устойчивость параметра  $C$  достигается осреднением его оценок в ячейках, полученных вращением исходной ячейки  $L_0 \times L_0$  относительно своего центра. Однако операция вращения оправдана лишь в случае статистически изотропной сейсмичности, а это свойство выполнено далеко не всегда, особенно для сильных событий.

#### 4.2. Вывод

В отдельных и пока немногих районах мира меру сейсмической интенсивности слабых событий можно считать мультифрактальной. Для мультифрактальной сейсмичности соотношение (12) определяет оптимальный фрактальный параметр  $C$  в (2). Он обслуживает меру сейсмической интенсивности в случайной ячейке масштаба  $L \ll L_0$ , где  $L_0$  – масштаб мультифрактальной однородности, а

случайность описывается вероятностями (8). Параметр  $C$  совпадает с корреляционной размерностью, если выбор ячейки пропорционален сейсмической активности в этой ячейке.

Соотношения (2), (6) априори предполагают независимость фрактальной размерности от магнитуды, что само по себе неочевидно при сравнении сильных и слабых событий. Кажется правдоподобным, что в таких регионах как Калифорния или Италия сильные события тяготеют к разломам, а слабые рассеяны по пространству. А это должно повышать размерность слабых.

При соблюдении условия (14) надежный анализ фрактальности для крупных событий представляется сомнительным.

### 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы проанализировали метод картирования долговременной интенсивности землетрясений под названием “Обобщенный закон подобия для землетрясений” (ОЗПЗ). В его основе лежит содержательная и до сих пор неиспользованная в приложениях гипотеза о фрактальности меры сейсмической интенсивности. На пути практического применения метода имеются серьезные препятствия: 1) фрактальность/мультифрактальность меры сейсмической интенсивности надежно подтверждена лишь в небольшом числе регионов мира и только для слабых землетрясений. Экстраполяция фрактальных свойств слабой сейсмичности на сильную, что важно при бедности статистики разрушительных землетрясений, нуждается в серьезном обосновании; 2) модель меры интенсивности ОЗПЗ не обладает необходимым свойством аддитивности, что ведет к противоречиям и необоснованному заключению: “Следствием фрактальной природы землетрясений и, в частности, их распределения в пространстве является *обычное занижение* традиционных оценок сейсмической опасности” [Некрасова, Кособоков, 2006]. Поэтому вопрос об использовании фрактальных свойств сейсмичности для задач сейсмического риска остается открытым; 3) не следует преувеличивать роль фрактальности в задачах риска, где главную роль играют сильные события, а обоснование даже их пространственного носителя затруднено. Дело в том, что разрушительный эффект события магнитуды  $M$  проявляется в некоторой пространственной зоне  $G_{J(M)}$  (например,  $J$ -и балльная изосейста). Поэтому риск для точечного объекта  $g_0$  определяется интегрально, т.е. суммарной интенсивностью событий  $M$  в зоне  $G_{J(M)}$  с центром  $g_0$ , [Кейлис-Борок и др., 1984]. В этом случае достаточно иметь сглаженную, а значит, нефрактальную меру сейсмичности плюс

контрольные интегралы сейсмической интенсивности в подходящих областях.

Примеры корректного использования ОЗПЗ связаны с методологией П. Бака, когда соотношение (2) используется как подходящая нормировка сейсмичности на разных масштабах (см. раздел 3). В этом случае действительно возникают нетривиальные, слабо зависящие от масштаба, законы распределения. Но они характеризуют не сейсмичность конкретных ячеек заданного размера, а сейсмичность случайно выбранной из них ячейки. Идея рандомизации пространственной ячейки, несомненно, интересна с точки зрения получения законов подобия в сейсмичности.

### БЛАГОДАРНОСТИ

Мои коллеги В. Писаренко, М. Родкин и Л. Ромашкова ознакомились с предварительной версией статьи. Их неформальные замечания привели к радикальной переработке текста, за что я им искренне благодарен.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Гусев А., Кондратенко А., Потапова О., Федотов С., Шумилина Л. Камчатка и Командорские острова. Сейсмическое районирование территории СССР. М.: Наука. 1980. С. 269–283.
- Кейлис-Борок В., Кронрод Т., Молчан Г. Сейсмический риск крупнейших городов мира (восьмибальные сотрясения). Математическое моделирование и интерпретация геофизических данных / Под ред. Кейлис-Борока В.И. // Вычислительная сейсмология. Вып. 16. М.: Наука. 1984. С. 93–117.
- Кейлис-Борок В., Кособоков В., Мажкенов С. О подобии в пространственном распределении сейсмичности. Теория и алгоритмы интерпретации геофизических данных / Под ред. Кейлис-Борока В.И. // Вычислительная сейсмология. Вып. 22. М.: Наука. 1989. С. 28–41.
- Кособоков В., Некрасова А. Общий закон подобия для землетрясений: глобальная карта параметров. Анализ геодинамических и сейсмических процессов / Под ред. Кейлис-Борока В.И. // Вычислительная сейсмология. Вып. 35. М.: Наука. 2004. С. 160–176.
- Кособоков В., Соловьев А. Распознавание образов в задачах оценки сейсмической опасности // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19. Вып. 4. С. 53–89.
- Молчан Г., Кронрод Т., Дмитриева О., Некрасова А. Многомасштабная модель сейсмичности в задачах сейсмического риска: Италия. Современные проблемы сейсмичности / Под ред. Кейлис-Борока В.И. // Вычислительная сейсмология. Вып. 27. М.: Наука. 1996. С. 193–224.
- Молчан Г., Подаецкая В. Параметры глобальной сейсмичности. Вычислительные и статистические методы интерпретации сейсмических данных / Под ред. Кейлис-Борока В.И. // Вычислительная сейсмология. Вып. 6. М.: Наука. 1973. С. 44–66.
- Некрасова А., Кособоков В. Общий закон подобия для землетрясений: Прибайкалье // Докл. РАН (геофизика). Т. 407. № 5. 2006. С. 679–681.
- Некрасова А., Кособоков В. Общий закон подобия для землетрясений: мегаполисы и городские агломерации. Некоторые проблемы геодинамики / Под ред. Кейлис-Борока В.И. // Вычислительная сейсмология. Вып. 39. М.: “Краснодар”, 2009. С. 265–300.
- Писаренко В., Голубева Т. Использование устойчивых законов в моделях сейсмичности. Современные проблемы сейсмичности и динамики Земли / Под ред. Кейлис-Борока В.И. // Вычислительная сейсмология. Вып. 28. М.: Наука. 1996. С. 153–174.
- Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир. 1967. 752 с.
- Bak P., Christensen K., Danon L., Scanlon T. Unified scaling law for earthquakes // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 88. P. 178501.
- Ben-Zion Y. Collective behavior of earthquakes and faults: continuum-discrete transitions, progressive evolutionary changes and different dynamic regimes // Rev. Geophys. 2008. V. 46. RG4006. P. 1–70.
- Corral A. Local distribution and rate fluctuation in unified scaling law for earthquakes // Phys. Rev. E. 2003. V. 68. 035102(R).
- Corral A. Universal local versus unified global scaling laws in the statistics of seismicity // Physica A. 2004. V. 340. P. 590–597.
- Feder J. Fractals, Plenum Press. New York. 1988. 283p.
- Goltz C. Fractal and Chaotic Properties of Earthquakes, Springer, Berlin. 1997. 182 p.
- Harte D. Multifractals: Theory and Applications, Boca Raton, Chapman & Hall. 2001. 248 p.
- Hentschel H.G.E., Procaccia I. The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors // Physica D. 1983. № 8. P. 435–444.
- Malkai O., Lidar D., Biham O., Avnir D. Scaling range and cutoffs in empirical fractals // Phys. Rev. E. 1997. V. 56. P. 2817–2828.
- Molchan G., Kronrod T. and Panza G. Multi-scale seismicity mode for seismic risk // Bull. of the Seismological Society of America. 1997. V. 87. № 5. P. 1220–1229.
- Molchan G. Interevent time distribution of seismicity: a theoretical approach // Pure. appl. Geophys. 2005. V. 162. P. 1135–1150.
- Molchan G., Kronrod T. On the spatial scaling of seismicity rate // Geophys. J. Int. 2005. V. 162. P. 899–909.
- Molchan G., Kronrod T. Seismic interevent time: a spatial scaling and multifractality // Pure appl. geophys. 2007. V. 164. P. 75–96.
- Molchan G., Kronrod T. The fractal description of seismicity // Geophys. J. Int. 2009. V. 179. № 3. P. 1787–1799.
- Nekrasova A., Kossobokov V., Peresan A., Aoudia A., Panza G. A multiscale application of the unified scaling law for earthquakes in Central Mediterranean area and Alpine region // Pure appl. Geophys. 2011. V. 168. P. 207–327.
- Nekrasova A., Kossobokov V., Parvez I., Tao X. Seismic hazard and risk assessment based on the unified scaling law for earthquakes // Acta Geod. Geophys. 2015. V. 50. P. 21–37.
- Wesnousky S. The Gutenberg-Richter or characteristic earthquake distribution. Which is it? // Bull. Seismol. Soc. Amer. 1994. V. 84. P. 1940–1959.

## FRactal Seismicity and Seismic Risk

**G. M. Molchan\***

*Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics,  
Russian Academy of Science, Moscow, Russia*

*\*E-mail: molchan@mitp.ru*

Recently, attempts have been made to take into account the fractal properties of seismicity when mapping the long-term rate of earthquakes. The paper touches upon the theoretical aspects of fractality and provides a critical analysis of its applications to the problems of seismic risk.

*Keywords:* Seismic risk, recurrence of earthquakes, multi-fractality, statistical seismology.