

ГЕТЕРОКЛИНИЧЕСКИЕ ЦИКЛЫ В ПРИРОДНЫХ СИСТЕМАХ

© 2020 г. О. М. Подвигина*

Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН, г. Москва, Россия

**E-mail: olgap@mitp.ru*

Поступила в редакцию 25.04.2019 г.

После доработки 17.06.2019 г.

Принята к публикации 24.06.2019 г.

Гетероклинический цикл – это инвариантное множество динамической системы, состоящее из стационарных состояний (или подмножеств более общего вида) и гетероклинических траекторий. При наличии гетероклинического цикла поведение системы характеризуется перемежаемостью: траектория долгое время находится вблизи стационарных состояний, а переходы между состояниями происходят существенно быстрее. Эффект перемежаемости наблюдается в различных природных явлениях, например, течениях в атмосфере Земли, изменении климата на больших интервалах времени, эволюции биологических видов, распространении эпидемий, поведении магнитного поля Земли и многих других. В этой статье рассмотрены примеры таких природных систем и отвечающие им математические модели, в которых присутствуют гетероклинические циклы.

Ключевые слова: динамические системы, гетероклинические циклы, магнитное поле Земли, конвекция Рэлея–Бенара, динамика популяций.

DOI: 10.31857/S0002333720010111

1. ВВЕДЕНИЕ

Уже более полувека теория динамических систем широко используется для исследования природных объектов, процессов или явлений. Под динамической системой понимают совокупность пространства состояний и закона, описывающего изменение состояния во времени. Вводя математическую модель, где состояние описывается набором координат $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, а закон изменения оператором $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, в случае непрерывной зависимости от времени динамическая система имеет вид $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t)$. Часто оператор f не зависит от времени и гладко зависит от \mathbf{x} :

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \quad f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad f \in C^k. \quad (1)$$

Таким образом, исследование особенностей систем из различных областей – физики, механики, биологии, экологии, астрономии, экономики и других – сводится к исследованию свойств решений (1).

Характер поведения решений (1) существенно зависит от того, каковы инвариантные множества этой системы, и насколько они (асимптотически) устойчивы. Примеры инвариантных множеств – стационарные состояния, периодические орбиты, торы, хаотические инвариантные множества (наиболее известны хаотические аттракторы, важную роль также играет переходный хаос), а также гомоклинические и гетероклинические циклы и гетероклинические сети.

Гетероклинический цикл представляет собой стационарные состояния $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ (или более сложные инвариантные множества), соединенные траекториями $[\xi_j \rightarrow \xi_{j+1}]$, $1 \leq j \leq m-1$, и $[\xi_m \rightarrow \xi_1]$. В системах общего положения гетероклинические циклы отсутствуют, поскольку гетероклинические траектории, соединяющие седловые стационарные состояния, неустойчивы относительно произвольных малых возмущений правой части (1). (Отметим, что интерес представляют именно системы общего положения, поскольку природные системы обычно таковы.) Однако, если рассматривать только некоторые ограниченные классы динамических систем, то гетероклинические циклы могут оказаться структурно устойчивы относительно возмущений, принадлежащих к данному классу, например, из-за существования инвариантных подпространств динамической системы.¹ Такие ограничения могут возникнуть из-за естественных симметрий природных объектов или структуры уравнений.

¹ Пусть гетероклиническая траектория $[\xi_j \rightarrow \xi_{j+1}]$ принадлежит инвариантному подпространству P_j , ξ_{j+1} устойчиво внутри P_j , и к нему притягивается часть неустойчивого многообразия ξ_j , лежащая в P_j . При малых возмущениях правой части (1), сохраняющих инвариантность P_j , ξ_{j+1} , остается устойчивым стационарным состоянием, к которому притягиваются траектории, выходящие из ξ_j .

Часто инвариантные пространства представляют собой координатные гиперплоскости, в частности, это имеет место при моделировании биологических процессов, где равенство координаты нулю отвечает отсутствию данного вида. Таким образом, в специальных системах гетероклинические циклы могут наблюдаться.

Для траекторий вблизи гетероклинического цикла характерна т.н. перемежаемость: длительные интервалы времени, на которых поведение системы меняется незначительно, проводимые траекторией вблизи стационарного состояния (или другого инвариантного множества) ξ_j , чередуются с относительно быстрыми переходами от одного квазипостоянного режима к другому. При этом смена режимов циклическая, т.е., они сменяются в определенном порядке: $\dots \rightarrow \xi_1 \rightarrow \xi_2 \rightarrow \dots \rightarrow \xi_m \rightarrow \xi_1 \rightarrow \dots$

В литературе известно большое количество гетероклинических циклов, встречающихся в самых различных системах. Например, в работах [James, 1989; Crommelin, 2002; 2003; 2004] исследованы долго существующие характерные повторяющиеся атмосферные структуры, наблюдаемые в Северной Атлантике и Арктике, сопровождающиеся быстрыми переходами от одной структуры к другой. По данным наблюдений в северном полушарии в 1948–2000 гг. в этих работах были построены т.н. эмпирические собственные функции, которые затем использовались для создания математической модели. Было показано, что в этой модели существует гетероклинический цикл, в котором имеют место переходы между состояниями, аналогичными наблюдаемым.

Исследование изменений климата Земли на временах порядка сотен тысяч лет показало наличие длительных интервалов времени, на которых средние температуры и крупномасштабное распределение температур на Земле меняется мало, и относительно коротких интервалов, в течение которых и происходит изменение климата. В северном полушарии похолодания предшествовали краткие потепления (так называемые осцилляции Дансгора–Эшгера); период между такими событиями кратен 1470 годам. В работах [Cimatoribus, 2012; Crucifix, 2012] была рассмотрена гипотеза, что это поведение связано с наличием гетероклинического цикла, и показано существование такого цикла в предложенных моделях земного климата.

Ряд работ посвящен моделированию движения блоков, относительно перемещение которых определяется трением на поверхностях контактов. В работе [Crucifix, 2017] рассмотрена тонкая эластичная плита под воздействием горизонтальной силы, движущаяся с трением по плоской горизонтальной поверхности. Поведение системы описывалось нелинейным волновым уравнением для деформации плиты. Исполь-

зованный закон трения (spinodal rate-and-state) позволил в рамках одной механической модели рассматривать процессы, протекающие в существенно разных масштабах времени, и построить единую теорию процессов подготовки и протекающих наблюдаемых землетрясений, объясняющую, например, большое разнообразие длительностей землетрясений и их частотных спектров, что не представлялось возможным сделать ранее с использованием закона трения Кулона. Интересно, что в полученной двухпараметрической диаграмме состояний системы найдена область существования гетероклинических циклов. Наличие гетероклинических циклов между состояниями, характеризующимися медленными скоростями относительного движения (например, запертый разлом) и быстрыми (сейсмические волны) может объяснить, почему разлом, неактивный в течение долгого времени, может “оживать”. Гетероклинические циклы были также найдены в более простых моделях движения блоков [Hogan, 1992; Bossolini, 2017].

Известно, что многие турбулентные течения демонстрируют перемежаемость как во времени, так и в пространстве. Это верно как для течений, переходных к турбулентным, так и, в некоторых случаях, для развитой турбулентности. Объяснение этих явлений посредством гетероклинических циклов предложено в работах [Holmes, 1993; Busse, 1999]. В экспериментальных исследованиях горения пропана на плоской пористой горелке наблюдалась циклическая сменяемость структур, характеризующихся количеством и расположением очагов горения [Stone, 1996]. В гамильтоновых системах, например, в задачах небесной механики, существование гетероклинических и гомоклинических (частные случаи гетероклинических, отвечающие $m = 1$) циклов связано с законами сохранения [Koon, 2000; Красильников, 1993; 2018; Krasil'nikov, 2015]. Гетероклинические циклы и связанная с ними перемежаемость были также найдены в магнитогидродинамике [Berhanu, 2007], гидродинамике [Nore, 2005], биологии, в частности, динамике популяций и эпидемиологии [May, 1975; Hofbauer, 1988; Keeling, 2001; Szolnoki, 2014; Пых, 2017], космологии [Billyard, 2000; Coley, 2003], теории игр [Hofbauer, 1988; Hauert, 2002; Aguiar, 2010], экономике [Agliari, 2011] и нейродинамике [Afraimovich, 2004; Nowotny, 2007; Михайлов, 2013]. Отметим, что приведенные здесь ссылки – это только примеры статей, где обнаружены гетероклинические циклы в системах, относящихся к перечисленным областям знаний.

Необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости некоторых классов гетероклинических циклов в пространствах небольшой размерности были получены в работах [Krupa, 1995; 2004; Podvigina, 2012; 2013]. Часто гете-

роклинические циклы, не являющиеся асимптотически устойчивыми, имеют область притяжения положительной меры, и поэтому могут наблюдаться в расчетах и экспериментах. Различные типы устойчивости инвариантных множеств динамических систем, более слабых, чем асимптотическая, предложены в работах [Podvigina, 2011; 2012; 2013], где также приведены примеры гетероклинических циклов, устойчивых в таком смысле.

Пусть динамическая система зависит от параметра, при некоторой критической величине которого существует гетероклинический цикл. Тогда при близких величинах параметра в системе может присутствовать периодическая орбита, ответвляющаяся от этого гетероклинического цикла, также характеризующаяся перемежаемостью. Например, в бифуркации Шильникова вблизи структурно неустойчивого гомоклинического цикла в зависимости от седловой величины возникает или периодическая орбита, или хаотический аттрактор [Шильников, 2009]. Перемежаемость, порождаемая структурно неустойчивыми гетероклиническими циклами, была найдена в работах [Podvigina, 2007; Chertovskih, 2010].

Отметим, что перемежаемость необязательно связана с гетероклиническими циклами. При наличии в системе инвариантных многообразий траектории могут долго находиться вблизи этих многообразий и долго вдали от них (т.н. on-off intermittency и in-out intermittency) [Platt, 1993; Ashwin, 1999; Chertovskih, 2015; 2017]. Также перемежаемость может возникать из-за наличия в системе быстрых и медленных переменных [Grasman, 1987; Szmolyan, 2004].

Ниже мы рассмотрим подробнее несколько систем, где присутствуют гетероклинические циклы. Мы начнем с простых математических систем в \mathbb{R}^3 , далее рассмотрим модели инверсий магнитного поля Земли, неустойчивость Купперса–Лортца в конвекции Рэлея–Бенара и сменяемость видов в моделях динамики популяций.

2. ПРОСТЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ: ГЕТЕРОКЛИНИЧЕСКИЕ ЦИКЛЫ В \mathbb{R}^3

Рассмотрим динамическую систему в \mathbb{R}^3 :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 \left(\lambda_1 + \sum_{1 \leq j \leq 3} a_{1j} x_j^2 \right), \\ \dot{x}_2 &= x_2 \left(\lambda_2 + \sum_{1 \leq j \leq 3} a_{2j} x_j^2 \right), \\ \dot{x}_3 &= x_3 \left(\lambda_3 + \sum_{1 \leq j \leq 3} a_{3j} x_j^2 \right). \end{aligned} \tag{2}$$

Очевидно, координатные оси и координатные плоскости — ее инвариантные пространства. Предположим, что

$$\lambda_i = 1, \quad a_{ii} = -1, \quad i = 1, 2, 3, \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 + a_{12} < 0, \quad \lambda_1 + a_{13} > 0, \quad \lambda_2 + a_{23} < 0, \\ \lambda_2 + a_{21} > 0, \quad \lambda_3 + a_{31} < 0, \quad \lambda_3 + a_{32} > 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Из равенств (3.1) следует существование стационарных состояний $\xi_1 = (\pm 1, 0, 0)$, $\xi_2 = (0, \pm 1, 0)$, $\xi_3 = (0, 0, \pm 1)$, устойчивых вдоль направлений \mathbf{e}_i — единичных векторов вдоль оси x_i . Из неравенств (3.2) следует неустойчивость ξ_i в направлении \mathbf{e}_{i+1} , устойчивость в направлении \mathbf{e}_{i-1} (здесь и далее индексы берутся по модулю 3) и существование гетероклинических траекторий, соединяющих ξ_i и ξ_{i+1} , на координатной плоскости $P_{i,i+1} = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{i+1} \rangle$. (Их существование доказано, например, в работе [Podvigina, 2010].) Этот гетероклинический цикл показан на рис. 1а.

Траектории в окрестности этого цикла проводят много времени вблизи стационарных состояний и быстро переходят от одного состояния к другому. При $t \rightarrow \infty$ траектория притягивается к устойчивому циклу, на что, в частности, указывает удлинение интервалов времени, которые она проводит вблизи стационарных состояний, при увеличении t (рис. 1б). Поскольку природные системы не изолированы, для них характерно наличие шума, что приводит к исчезновению цикла и появлению периодической орбиты большого периода (рис. 1в), которой также присуща перемежаемость.

Рассмотрим другую динамическую систему в \mathbb{R}^3 :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 (\lambda_1 + a_{11} x_1^2) + a_{12} x_2^2 + a_{13} x_3^2, \\ \dot{x}_2 &= x_2 (\lambda_2 + a_{21} x_1), \quad \dot{x}_3 = x_3 (\lambda_3 + a_{31} x_1), \end{aligned} \tag{4}$$

в которой инвариантными являются плоскости $P_2 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ и $P_3 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \rangle$. Если

$$\begin{aligned} \lambda_1 > 0, \quad a_{11} < 0, \quad \lambda_2 - a_2 \lambda_1 (-a_{11})^{-1/2} > 0, \\ \lambda_2 + a_2 \lambda_1 (-a_{11})^{-1/2} < 0, \end{aligned}$$

$$\lambda_3 - a_3 \lambda_1 (-a_{11})^{-1/2} < 0, \quad \lambda_3 + a_3 \lambda_1 (-a_{11})^{-1/2} > 0,$$

то существуют стационарные состояния $\xi_{\pm} = (\pm \lambda_1 (-a_{11})^{-1/2}, 0, 0)$, соединенные гетероклиническими траекториями, принадлежащими инвариантным плоскостям P_2 и P_3 (см. рис. 2а). Характерное временное поведение решений, в том числе при добавлении шума, сходно с поведением решений системы (2), см. рис. 2б, 2в.

3. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ЗЕМЛИ И ЕГО ИНВЕРСИИ

Современное магнитное поле Земли имеет вид диполя, ось которого почти параллельна оси вращения Земли. По результатам палеомагнитных

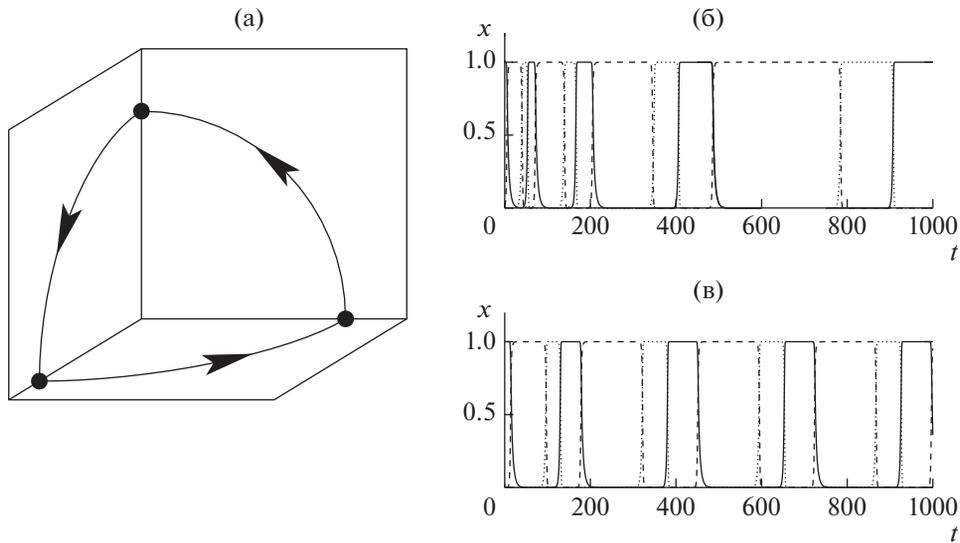


Рис. 1. Гетероклинический цикл в системе (2) (а) и зависимость от времени координат x_1 (сплошная линия), x_2 (пунктир), x_3 (штриховая линия) для траектории, приближающейся к устойчивому гетероклиническому циклу (б). Орбита большого периода (в), возникающая при наложении небольшого шума в правой части системы.

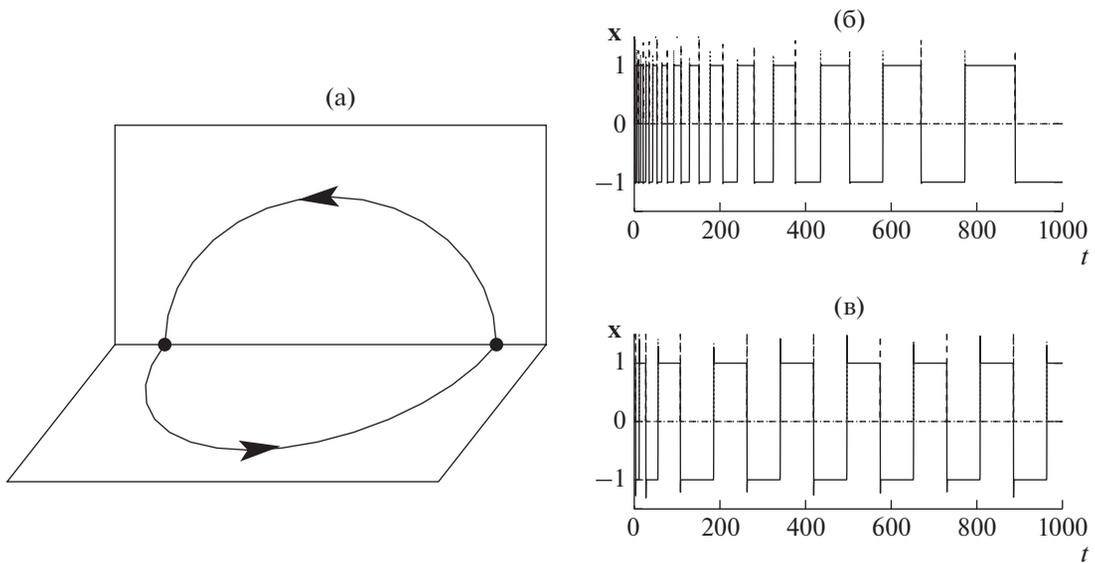


Рис. 2. Гетероклинический цикл в системе (4) (а) и зависимость от времени координат x_1 (сплошная линия), x_2 (пунктир), x_3 (штриховая линия) для траекторий, приближающейся к устойчивому гетероклиническому циклу (б). Орбита большого периода (в), возникающая при наложении небольшого шума в правой части системы.

исследований, геомагнитное поле испытывает инверсии, при которых южный и северный магнитные полюса меняются местами. Продолжительность временных интервалов постоянной полярности составляет от десятков тысяч лет до десятков миллионов лет, а сами инверсии происходят за несколько тысяч лет (а по некоторым данным [Sagnotti, 2014] могут произойти на протяжении одной человеческой жизни). Последняя инверсия произошла около 780 тысяч лет назад [Merril, 1996]. Инвер-

сии магнитного поля также наблюдаются в экспериментах [Berhanu, 2007; Petrelis, 2010].

Согласно современным представлениям, источник магнитного поля Земли — конвективное течение во внешнем ядре. Эту гипотезу подтверждают, например, результаты серии работ [Glatzmaier, 1995; 1997] и приведенные там ссылки, которые численно решали систему уравнений, описывающую конвективные гидромагнитные явления. В этих расчетах удалось воспроизвести ди-

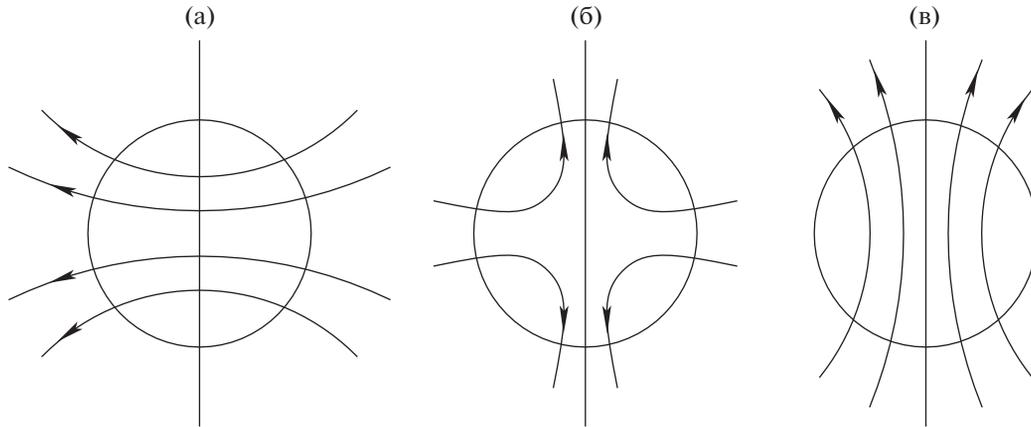


Рис. 3. Три составляющие магнитного поля в работе [Melbourne, 2001]: экваториальный диполь (а), квадрупольное поле (б), аксиальный диполь (в).

польную, в главном, морфологию магнитного поля Земли и его хаотические инверсии.

Инверсии связаны с наличием у оператора магнитной индукции симметрии $\mathbf{V} \rightarrow -\mathbf{V}$: из существования аттрактора с некоторым ненулевым средним \mathbf{V} следует существование симметричного аттрактора. Если при изменении параметров системы такой аттрактор становится неустойчивым, то может возникнуть гетероклиническая траектория, соединяющая два бывших аттрактора. Этот сценарий был предложен в работе [Podvigina, 2003], где инверсии \mathbf{V} найдены в системе, состоящей из уравнения Навье–Стокса с силой Лоренца и уравнения магнитной индукции.

Модель размерности 4 магнитного поля Земли предложена в работе [Melbourne, 2001]. Предполагалось, что поле скорости представлено течением Кумара–Робертса, которое имеет вид системы вращающихся колонн с осями, параллельными оси вращения Земли, а магнитное поле является суммой мод экваториального диполя, квадрупольного поля и аксиального диполя (см. рис. 3):

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}(t)) = z_1(t)\mathbf{D}_e(\mathbf{r}) + x_2(t)\mathbf{Q}_a(\mathbf{r}) + x_3(t)\mathbf{D}_a(\mathbf{r}),$$

где $z_1(t)$ комплексно, а $x_2(t)$ и $x_3(t)$ действительны. Система уравнений, описывающая взаимодействие этих трех мод, имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_1 (\lambda_1 + i\omega_1 - |z_1|^2 + A_{12}x_2^2 + A_{13}x_3^2) + \\ &+ \epsilon_1 z_1^5 + \epsilon_2 |z_1|^4 + \epsilon_3 z_1 x_2 x_3^3, \\ \dot{x}_2 &= x_2 (\lambda_2 + A_{21}x_1^2 - x_2^2 + A_{23}x_3^2) + \\ &+ \epsilon_1 \text{Re}(z_1^3) x_2^2 + \epsilon_2 x_1^5 + \epsilon_3 x_3^5, \\ \dot{x}_3 &= x_3 (\lambda_3 + A_{31}x_1^2 + A_{32}x_2^2 - x_3^2) + \\ &+ \epsilon_1 \text{Re}(z_1^3) x_2 x_3 + \epsilon_2 x_1^3 x_2 x_3 + \epsilon_3 x_2^5, \end{aligned} \tag{5}$$

где ϵ_i малы по сравнению с другими коэффициентами.

Численные решения этих уравнений для набора параметров, использованного в работе [Melbourne, 2001], показаны на рис. 4. Авторы отмечали, что изменения знака коэффициента x_3 аксиального диполя можно интерпретировать как инверсии магнитного поля. Между инверсиями почти периодическое поведение коэффициента x_3 существенно отличается от характерного поведения дипольной составляющей магнитного поля Земли (которое менее регулярно), что объясняется грубостью предложенной модели.

4. КОНВЕКЦИЯ РЭЛЕЯ–БЕНАРА

Рассмотрим горизонтальный слой жидкости, подогреваемый снизу и вращающийся относительно вертикальной оси \mathbf{e}_z . Поведение жидкости описывается уравнением Навье–Стокса:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + P\Delta \mathbf{v} + PR\theta \mathbf{e}_z - \nabla p + P\tau \mathbf{v} \times \mathbf{e}_z,$$

условием несжимаемости и уравнением теплопроводности.

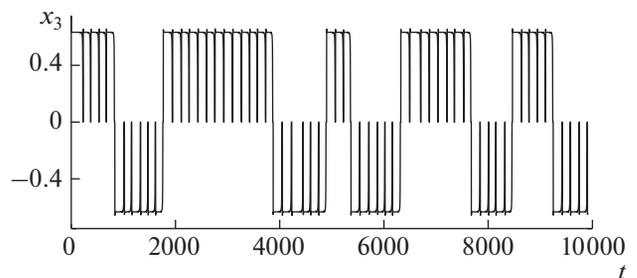


Рис. 4. Зависимость от времени координаты x_3 , отвечающей аксиальному диполю, в решении системы (5) для набора параметров, использованного в работе [Melbourne, 2001].

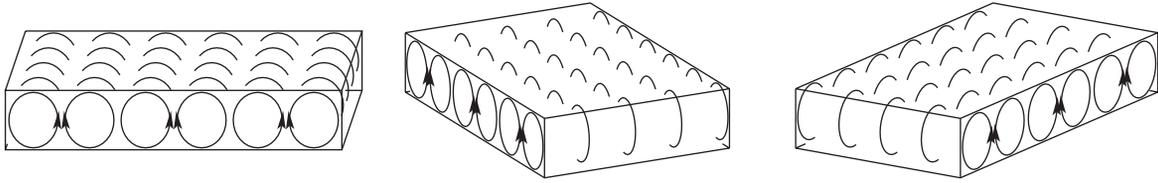


Рис. 5. Конвективные валы, появляющиеся при установлении конвекции Рэлея–Бенара, последовательно повернутые на угол $2\pi/3$.

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla)\theta + v_z + \Delta \theta. \quad (6)$$

Здесь: \mathbf{v} – скорость потока; θ – разность между температурой и ее линейным профилем, устанавливаемым в слое в состоянии покоя. На горизонтальных границах предполагается фиксированная температура и отсутствие напряжений (свободная граница):

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_y}{\partial z} = v_z = 0. \quad \theta = 0 \quad (z = 0, 1). \quad (7)$$

Поведение системы зависит от чисел Рэлея, пропорционального разности температур на границах, Тейлора $Ta = \tau^2$, где τ пропорционально скорости вращения, и Прандтля P , характеризующего свойства жидкости.

При малых числах Рэлея жидкость неподвижна. С увеличением числа Рэлея в системе, в зависимости от соотношения между числами Тейлора и Прандтля, возникает монотонная или колебательная неустойчивость [Chandrasekhar, 1961; Podvigina, 2009]. Если число Прандтля достаточно велико, а число Тейлора не превосходит некоторую критическую величину, то неустойчивость монотонная, а возникающее течение имеет вид валов: оно двумерно, т.е. скорость зависит только от двух координат [Гершуни, 1972] (см. рис. 5).

При $Ta = 0$ и малой надкритичности конвективные валы устойчивы. С увеличением числа Тейлора, при $Ta > Ta_c$ (где Ta_c зависит от числа Прандтля) возникающие конвективные валы неустойчивы относительно таких же валов, повернутых относительно вертикальной оси на некоторый угол (т.н. неустойчивость Кюпперса–Лортца [Küppers, 1969]). В пределе $P \rightarrow \infty$ в слое со свободными границами эта неустойчивость имеет место при $Ta > 2285$, когда угол между двумя течениями вида валов (возмущаемым и возмущением) равен приблизительно $\pi/3$.

Вблизи возникновения неустойчивости в системах большой (или бесконечной) размерности ее поведение определяется ограничением на центральное многообразие, состоящее из мод неустойчивости. В модели установления конвекции можно использовать три моды неустойчивости,

которые представляют собой течения вида валов, последовательно повернутые в горизонтальной плоскости на угол $\pi/3$ (рис. 5). Уравнения ограничения на центральное многообразие тогда имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 (\mu + Ax_1^2 + B_1x_2^2 + B_2x_3^2), \\ \dot{x}_2 &= x_2 (\mu + Ax_2^2 + B_1x_3^2 + B_2x_1^2), \\ \dot{x}_3 &= x_3 (\mu + Ax_3^2 + B_1x_1^2 + B_2x_2^2), \end{aligned} \quad (8)$$

где x_i – амплитуды валов, а коэффициенты A и B_i зависят от параметров системы, в частности, $B_1 = B_2$ при $\tau = 0$. Отметим сходство этой системы с (2), из которого следует, что при выполнении условий, аналогичных (2), в ней существует гетероклинический цикл, показанный на рис. 1а. Такой цикл наблюдается и в экспериментах: в некоторой области слоя жидкости (горизонтальные размеры которого существенно превышают толщину слоя, что является приближением для бесконечного плоского слоя, рассматриваемого в теории) в экспериментальном аппарате наблюдаются долгоживущие квазипостоянные валы, изредка быстро замещаемые аналогичными валами, повернутыми на угол $\pi/3$ [Aurnou, 2001].

5. МОДЕЛИ ПОПУЛЯЦИОННОЙ ДИНАМИКИ

Система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_i = F_i(\mathbf{x}) = x_i \left(\lambda_i - \sum_{j=1}^n \rho_{ij} x_j \right), \quad (9)$$

$$i = 1, \dots, n, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$$

была предложена А. Лоткой [Lotka, 1910] при рассмотрении кинетики химических реакций, и независимо от него В. Вольтеррой [Volterra, 1926] для описания динамики численности групп, составляющих биологическое сообщество. Для биологических моделей здесь x_i – численность i -й группы сообщества в момент времени t , коэффициенты λ_i и ρ_{ij} характеризуют скорость роста i -й группы в отсутствие других, а коэффициенты ρ_{ij} при $i \neq j$ отражают влияние взаимодействия между группами

на скорость роста. Кроме динамики популяций, системы типа Лотки–Вольтерры возникают в социологии, математической экономике, экологии, при моделировании кинетики химических реакций и активности нейронов, а также в большом числе различных других задач.

При $n = 3$ замена переменных $x_i \rightarrow x_i^2$ переводит систему (9) в (2), откуда следует, что в ней при выполнении (2) также существует гетероклинический цикл, а поведение $x_i(t)$ аналогично показанному на рис. 16. (В присутствии естественного шума траектории системы не притягиваются при $t \rightarrow \infty$ к гетероклиническому циклу, а представляют собой периодическую орбиту большого периода.) При $n > 3$ может наблюдаться сходное поведение, при котором гетероклинический цикл включает более трех стационарных состояний. В работе [Szolnoki, 2014] (см. также приведенные там ссылки) указаны примеры циклической сменяемости нескольких видов (при которой большую часть времени численность всех популяций, кроме какой-то одной, близка к нулю), наблюдаемых в природе и в биологических экспериментах.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Одна из актуальных задач современной науки – прогнозирование критических переходов (также называемых кризисами или катастрофами), происходящих в сложных системах. Причиной таких переходов может быть наличие медленно меняющейся внешней силы, воздействующей на систему, при малом изменении которой траектория переходит с одной ветви аттрактора на другую, или же происходит бифуркация и изменяется фазовый портрет системы [Арнольд, 1990]. В настоящей статье представлено альтернативное объяснение критическим переходам – они могут также иметь место из-за наличия в автономной (т.е. не зависящей от времени) динамической системе гетероклинических циклов. Таким образом, можно ввести понятие *автономных* и *неавтономных* критических переходов; последние зависят от внешних условий.

Пример автономных переходов – инверсии магнитного поля Земли, рассмотренные в разделе 3. Подтверждением этому служит тот факт, что во всех цитируемых работах [Glatzmaier, 1995; 1997; Melbourne, 2001; Podvigina, 2003] быстрое изменение знака дипольной компоненты магнитного поля происходит при неизменных внешних условиях. Дальнейшее развитие теории гетероклинических циклов могло бы дать ответ на некоторые вопросы о поведении магнитного поля, таких как действительно ли сейчас начинается очередная инверсия, как утверждает, например, в работе [Laj, 2015].

Принципиальное различие между автономными и неавтономными переходами можно показать на примере изучения изменений климата. Если глобальные потепления и похолодания – это неавтономные критические переходы, то изучение вкладов различных внешних факторов (таких как изменение солнечной активности, эксцентриситета орбиты Земли или наклона ее оси вращения) поможет оценить степень влияния человеческой активности на климат планеты, а значит, и необходимость ее ограничения. Если же такие переходы автономны, то представляется маловероятным, что деятельность человека оказывает на них какое-либо существенное влияние.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Часть работы выполнена в Университете Порто при поддержке CMUP (Centro de Matemática da Universidade do Porto, UID/MAT/00144/2019), финансируемого FCT (Fundação para a Ciência e a Tecnologia, Португалия) совместно с национальным (MCTES) и Европейским фондами в рамках программы FEDER (Fundo Europeu de Desenvolvimento Regional/European Regional Development Fund) COMPETE 2020 (соглашение о партнерстве PT2020), а также проектами STRIDE [NORTE-01-0145-FEDER-000033], финансируемого FEDER – NORTE 2020, и MAGIC [POCI-01-0145-FEDER-032485], финансируемого FEDER через COMPETE 2020 – POCI.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает благодарность CMUP за гостеприимство во время ее визита в Порто в январе–апреле 2019 г.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Арнольд В.И. Теория катастроф. М.: Наука. 1990. 128 с.
- Братусь А.С., Новожилов А.С., Платонов А.П. Динамические системы и модели в биологии. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2009. 400 с.
- Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука. 1972. 392 с.
- Красильников П.С., Захарова Е.Е. Нерезонансные вращения спутника относительно центра масс в ограниченной задаче N тел // Косм. исслед. 1993. Т. 31. Вып. 6. С. 11–21.
- Красильников П.С., Подвигина О.М. Об эволюции угла наклона оси вращения планеты в нерезонансном случае // Вестник Удмуртского Университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. Вып. 4. С. 549–564.
- Михайлов А.О., Комаров М.А., Осипов Г.В. Последовательная переключательная активность в ансамбле неидентичных систем Пуанкаре // Изв. вузов “ПНД”. 2013. Т. 21. С. 79–91.
- Подвигина О.М. Конвективная устойчивость вращающегося слоя проводящей жидкости во внешнем магнитном поле // Изв. РАН. МЖГ 2009. Т. 4. С. 29–39.

- Пых Ю.А.* Обобщенные системы Лотки-Вольтерра: теория и приложения. СПб.: СПбГИПСР. 2017. 229 с.
- Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л.* Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2. М.-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Институт компьютерных исследований. 2009. 548 с.
- Afraimovich V.S., Zhigulin V.P., Rabinovich M.I.* On the origin of reproducible sequential activity in neural circuits // *Chaos*. 2004. V. 14. P. 1123–1129.
- Agliari A., Vachadze G.* Homoclinic and heteroclinic bifurcations in an overlapping generations model with credit market imperfection // *Comput. Econ*. 2011. V. 38. P. 241–260.
- Aguiar M.A.D., Castro S.B.S.D.* Chaotic switching in a two-person game // *Physica D*. 2010. V. 239. P. 1598–1609.
- Ashwin P., Cova E., Tavakol R.* Transverse instability for non-normal parameters // *Nonlinearity*. 1999. V. 12. P. 563–577.
- Aurnou J.M., Olson P.L.* Experiments on Rayleigh-Bénard convection, magnetoconvection and rotating magnetoconvection in liquid gallium // *J. Fluid Mech*. 2001. V. 430. P. 283–307.
- Berhanu M. et al.* Magnetic field reversals in an experimental turbulent dynamo // *Europhys. Lett*. 2007. V. 77. P. 59001. (5 pages).
- Billyard A.P., Coley A.A., Lidsey J.E.* Cyclical behavior in early universe cosmologies // *J. Mathematical Physics*. 2000. V. 41. P. 6277–6283.
- Bossolini E., Brons M., Uldall K.* Singular limit analysis of a model for earthquake faulting // *Nonlinearity*. 2017. V. 30. P. 2805–2834.
- Busse F.R., Clever R.M.* Heteroclinic cycles and phase turbulence / Golubitsky M. et al. (eds.), *Pattern Formation in Continuous and Coupled Systems*, Springer Science + Business Media. N.Y. 1999.
- Cimatoribus A.A., Drijfhout S.S., Livina V., van der Schrier G.* Dansgaard-Oeschger events: tipping points in the climate system // *Climate of the past*. 2012. V. 8. P. 4269–4294.
- Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Oxford: Clarendon Press. 1961. 652 p.
- Chertovskih R., Gama S.M.A., Podvigina O., Zheligovsky V.* Dependence of magnetic field generation by thermal convection on the rotation rate: a case study // *Physica D*. 2010. V. 239 P. 1188–1209.
- Chertovskih R., Chimanski E.V., Rempel E.L.* Route to hyperchaos in Rayleigh-Bénard convection // *Europhysics Letters*. 2015. V. 112, 14001. 6 p.
- Chertovskih R., Rempel E.L., Chimanski E.V.* Magnetic field generation by intermittent convection // *Physics Letters A*. 2017. V. 381. P. 3300–3306.
- Coley A.A.* Dynamical systems and cosmology. Springer Netherlands. 2003. 195 p.
- Crommelin D.T.* Homoclinic dynamics: a scenario for atmospheric ultralow-frequency variability // *J. Atmos. Sci*. 2002. V. 59. P. 1533–1549.
- Crommelin D.T.* Regime transitions and heteroclinic connections in a barotropic atmosphere // *J. Atmos. Sci*. 2003. V. 60. P. 229–246.
- Crommelin D.T., Opsteegh J.D., Verhulst F.* A mechanism for atmospheric regime behaviour // *J. Atmos. Sci*. 2004. V. 61. P. 1406–1419.
- Crucifix M.* Oscillators and relaxation phenomena in Pleistocene climate theory // *Phil. Trans. R. Soc. A*. 2012. V. 370. P. 1140–1165.
- James I.N., James P.M.* Ultra-low-frequency variability in a simple atmospheric circulation model // *Nature*. 1989. V. 342. P. 53–55.
- Glatzmaier G.A., Roberts P.H.* A three-dimensional self-consistent computer simulation of a geomagnetic field reversal // *Nature*. 1995. V. 377. P. 203–209.
- Glatzmaier G.A., Roberts P.H.* Simulating the geodynamo // *Contemp. Phys*. 1997. V. 38. P. 269–288.
- Grasman J.* Asymptotic methods for relaxation oscillations and applications. In: *Applied Mathematical Sciences*. V. 63. Springer. N.Y. 1987. 221 p.
- Hauert C., De Monte S., Hofbauer J., Sigmund K.* Replicator dynamics for optional public good games // *J. Theor. Biol*. 2002. V. 218. P. 187–194.
- Hofbauer J., Sigmund K.* The theory of evolution and dynamical systems, Camb. Univ. Press. Cambridge. 1988. 341 p.
- Hogan S.J.* Heteroclinic bifurcations in damped rigid block motion // *Proc. R. Soc. Lond. A*. 1992. V. 439. P. 155–162.
- Holmes P.* Symmetries, heteroclinic cycles and intermittency in fluid flow / Sell G.R. et al. (eds.) *Turbulence in Fluid Flows*. Springer-Verlag. N.Y., Inc. 1993. P. 49–58.
- Küppers G., Lortz D.* Transition from laminar convection to thermal turbulence in a rotating fluid layer // *J. Fluid Mech*. 1969. V. 35. P. 609–620.
- Keeling M.J., Rohani P., Grenfell B.T.* Seasonally forced disease dynamics explored as switching between attractors // *Physica D*. 2001. V. 148. P. 317–335.
- Koon W.S., Lo M.W., Marsden J.E., Ross S.D.* Heteroclinic connections between periodic orbits and resonance transitions in Celestial mechanics // *Chaos*. 2000. V. 10. P. 427–459.
- Krasil'nikov P.* Fast non-resonance rotations of spacecraft in restricted three body problem with magnetic torques // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2015. V. 73. P. 43–50.
- Krupa M., Melbourne I.* Asymptotic stability of heteroclinic cycles in systems with symmetry // *Ergodic Theory and Dynam. Sys*. 1995. V. 15. P. 121–147.
- Krupa M., Melbourne I.* Asymptotic stability of heteroclinic cycles in systems with symmetry II // *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*. 2004. V. 134A. P. 1177–1197.
- Laj C., Kissel C.* An impending geomagnetic transition? Hints from the past // *Frontiers in Earth Science*. 2015. V. 3. P. 6.
- Lotka A.J.* Contribution to the Theory of Periodic Reaction // *J. Phys. Chem*. 1910. V. 14. P. 271–274.
- May R.M., Leonard W.* Nonlinear aspects of competition between three species // *SIAM J. Appl. Math*. 1975. V. 29. P. 243–252.
- Melbourne I., Proctor M.R.E., Rucklidge A.M.* A heteroclinic model of geodynamo reversals and excursions. *Dynamo and Dynamics, a Mathematical Challenge* / eds. Chossat P., Armbruster D. and Oprea I.), Kluwer: Dordrecht. 2001. P. 363–370.
- Merril R.T., McEllhiny M.W., McFadden Ph.L.* The magnetic field of the Earth. Paleomagnetism, the core and the deep mantle. San Diego: Academic Press. 1996. 527 p.
- Nore C., Moisy F., Quartier L.* Experimental observation of near heteroclinic cycles in the von Karman swirling flow // *Phys. Fluids*. 2005. V. 17. 064103. 10 p.

- Nowotny T., Rabinovich M.I.* Dynamical origin of independent spiking and bursting activity in neural microcircuits // *Phys. Rev. Lett.* 2007. V. 98. 128106.
- Petrelis F., Fauve S.* Mechanics for magnetic field reversals // *Phil. Trans. R. Soc. A.* 2010. V. 368. P. 1595–1605.
- Platt N., Spiegel E.A., Tresser C.* On-off intermittency: A mechanism for bursting // *Phys. Rev. Lett.* 1993. V. 70. P. 279–282.
- Podvigina O.* A route to magnetic field reversals: an example of an ABC-forced non-linear dynamo // *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics.* 2003. V. 97. P. 149–174.
- Podvigina O.M.* Stability of rolls in rotating magnetoconvection in a layer with no-slip electrically insulating horizontal boundaries // *Phys. Rev. E.* 2010. V. 81. 056322. 20 p.
- Podvigina O.* Stability and bifurcations of heteroclinic cycles of type Z // *Nonlinearity.* 2012. V. 25. P. 1887–1917.
- Podvigina O.* Classification and stability of simple homoclinic cycles in \mathbb{R}^5 // *Nonlinearity.* 2013. V. 26. P. 1501–1528.
- Podvigina O.M., Ashwin P.B.* On local attraction properties and a stability index for heteroclinic connections // *Nonlinearity.* 2011. V. 24. P. 887–929.
- Podvigina O., Ashwin P., Hawker D.* Modelling instability of ABC flow using a mode interaction between steady and Hopf bifurcations with rotational symmetries of the cube // *Physica D.* 2006. V. 215. P. 62–79.
- Putelat T., Dawes J.H.P., Champneys A.R.* A phase-plane analysis of localized frictional waves // *Proc. R. Soc. A.* 2017. V. 473. 20160606. 27 p.
- Sagnotti L., Scardia G., Giaccio B., Liddicoat J.C., Nomade S., Renne P.R., Sprain C.J.* Extremely rapid directional change during Matuyama–Brunhes geomagnetic polarity reversal // *Geophys. J. Int.* 2014. V. 199. P. 1110–1124.
- Stone E., Gorman M., el-Hamdi M., Robbins K.A.* Identification of intermittent ordered patterns as heteroclinic connections // *Phys. Rev. Lett.* 1996. V. 76. P. 2061–2064.
- Szmolyan P., Wechselberger M.* Relaxation oscillations in \mathbb{R}^3 // *J. Differential Equations.* 2004. V. 200. P. 69–104.
- Szolnoki A., Mobilia M., Jiang L.-L., Szczesny B., Rucklidge A.M., Perc M.* Cyclic dominance in evolutionary games: a review // *J. R. Soc. Interface.* 2014. V. 11. 20140735. (20 pages).
- Volterra V.* Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi // *Mem. Acad. Lincei Roma.* 1926. V. 2. P. 31–113.

HETEROCLINIC CYCLES IN NATURE

O. M. Podvigina*

Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

**E-mail: olgap@mitp.ru*

Heteroclinic cycle is an invariant set of a dynamical system, comprised of steady states (or more general invariant subsets) and heteroclinic trajectories. Behaviour of a dynamical system with a heteroclinic cycle is intermittent — a typical trajectory stays for a long time near a steady state, while the transitions between the states elapse much faster. Intermittency is present in various natural phenomena, in particular, Earth's atmospheric circulation, climate variations considered at large time intervals, evolution of species, distribution of diseases, behaviour of the magnetic field of the Earth and many others. In this paper we consider examples of such natural system and respective mathematical models, possessing heteroclinic cycles.

Keywords: dynamical systems, heteroclinic cycles, magnetic field of the Earth, Rayleigh-Benard convection, population dynamics.