ФИЗИКА ЗЕМЛИ, 2023, № 5, с. 96–100

УДК 550.837.3

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ИНТЕГРАЛА, РОДСТВЕННОГО ИНТЕГРАЛУ ФОКА, ВОЗНИКАЮЩЕГО ПРИ РАСЧЕТАХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ ДИПОЛЬНЫХ ИСТОЧНИКОВ НА ГРАНИЦЕ ДВУХ ПОЛУПРОСТРАНСТВ

С. С. Кеворкянц*, **

Центр геоэлектромагнитных исследований института физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН (ЦГЭМИ ИФЗ РАН), г. Троицк, Россия

**E-mail: gemri@igemi.troitsk.ru*

***E-mail: sourens@mail.ru*

Поступила в редакцию 21.05.2022 г.
После доработки 15.11.2022 г.
Принята к публикации 18.11.2022 г.

Интеграл Фока (ИФ), названный по имени автора, получившего его аналитическое выражение в цилиндрических функциях, был им введен для теоретического анализа электромагнитного поля магнитных диполей на границе однородного проводящего (немагнитного) полупространства. Подробные аналитические представления интегралов, в которых выражены все компоненты полей вертикального и горизонтального магнитных диполей, были изложены в работе [Вешев и др., 1971]. Получение аналитических выражений похожих интегралов, представляющих компоненты полей электрических диполей в аналогичной модели требует рассмотрения помимо ИФ другого, родственного ему интеграла, условно названного ИФ1, аналитическое выражение которого до настоящего времени известно не было. Восполнение данного пробела и явилось целью настоящей работы, в которой предложен оригинальный способ получения аналитического представления ИФ1, путем задания и решения линейного неоднородного дифференциального уравнения 1-го порядка с соответствующим граничным условием, которому ИФ1 удовлетворяет. Полученный результат позволит упростить процесс моделирования полей в однородном полупространстве и улучшить качество интерпретации данных электромагнитных методов за счет более точных и надежных оценок нормального поля в подобных моделях вмещающей среды.

Ключевые слова: интеграл Фока, функции Бесселя, Ханкеля, неоднородное дифференциальное уравнение, единственность решения.

DOI: 10.31857/S0002333723050058, **EDN:** VZKTKY

ВВЕДЕНИЕ

Применение интеграла Фока (ИФ) как удобного инструмента для аналитического расчета электромагнитного поля магнитного диполя вблизи границы однородного проводящего полупространства было впервые предложено В.А. Фоком в работе [Fock, 1933], где и было получено его аналитическое выражение[1], имеющее следующий вид:

$$\mathsf{F}_0(r) = \int\limits_0^\infty J_0(\lambda r)\left(\frac{\eta_1-\eta_0}{\eta_1+\eta_0}\right)^\nu \frac{\lambda d\lambda}{\eta_0\eta_1} = I_\nu\left(\frac{\bar{k}_1-\bar{k}_0}{2}r\right)K_\nu^{(1)}\left(\frac{\bar{k}_1+\bar{k}_0}{2}r\right) = \frac{i\pi}{2}J_\nu\left(\frac{k_1-k_0}{2}r\right)H_\nu^{(1)}\left(\frac{k_1+k_0}{2}r\right); \quad \nu > -\frac{3}{4},\ \ \bar{k}_{1,0} = -ik_{1,0}, \tag{1}$$

где: $r \geq 0$ – расстояние вдоль границы полупространств между источником и точкой наблюдения; $J_\nu(\xi)$, $H_\nu^{(1)}(\xi)$ – функции Бесселя и Ханкеля первого рода порядка ν от комплексного аргумента ξ ($\mathrm{Re}\,\xi \geq \mathrm{Im}\,\xi \geq 0$); $I_\nu(\zeta)$, $K_\nu(\zeta)$ – модифицированные функции Бесселя первого и третьего рода

[1] Выше и далее под аналитическим представлением интеграла предполагается его выражение через элементарные и специальные функции или их суммы, а также представление в виде бесконечных абсолютно сходящихся рядов.

от комплексного аргумента $\zeta = -i\xi$; $\eta_0 = \sqrt{\lambda^2 - k_0^2}$, $\eta_1 = \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}$, $\operatorname{Re}\eta_{0,1} \geq 0$; $k_0 = \sqrt{i\omega\mu_0\breve{\sigma}_0}$ и $k_1 = \sqrt{i\omega\mu_0\breve{\sigma}_1}$ ($0 < \operatorname{Im} k_{0,1} < \operatorname{Re} k_{0,1}$) – комплексные волновые числа двух полупространств, которые условимся называть, соответственно, верхним (индекс “0”) и нижним (индекс “1”); μ_0 – магнитная постоянная; $\breve{\sigma}_0 = \sigma_0 - i\omega\varepsilon_0$, $\breve{\sigma}_1 = \sigma_1 - i\omega\varepsilon_1$ – в общем, комплексные, а σ_0, σ_1 – реальные удельные электропроводности[2]; ε_0, ε_1 – диэлектрические проницаемости, соответственно, верхнего и нижнего полупространств. Произвольная скалярная составляющая V электромагнитного поля в двух полупространствах при гармоническом режиме возбуждения с круговой частотой колебаний ω и зависимостью от времени t по закону $\exp(-i\omega t)$ в точках отсутствия сторонних токов удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца:

$$\Delta V + k_{0,1}^2 V = 0,$$

где Δ – оператор Лапласа.

С помощью интеграла (1) для вышеописанной геоэлектрической модели (контакт двух полупространств) были получены по методу Фока [Fock, 1933; Бурсиан, 1972] аналитические выражения для некоторых компонент поля вертикального и горизонтального магнитных диполей, детально описанные в работах ленинградской школы геофизиков [Вешев и др., 1971; Бурсиан, 1972]. Получение аналогичных результатов для всех компонент векторов электромагнитного поля магнитных и электрических диполей в той же модели требовало введения дополнительно к ИФ несколько иного, родственного ему, интеграла, имеющего следующий вид:

$$\mathbf{F}_1(r,\nu) = \int_0^\infty J_1(\lambda r)\left(\frac{\eta_1 - \eta_0}{\eta_1 + \eta_0}\right)^\nu \frac{d\lambda}{\eta_0\eta_1} \qquad (2)$$
$$(\nu = n, n + 1/2;\ n = 0,1,2,\ldots),$$

(его, для краткости, условимся далее называть ИФ1), для которого в существующей литературе по данной тематике отсутствуют как аналитическое представление, так и способы его определения.

К настоящему времени разработан целый ряд алгоритмов быстрого преобразования Ханкеля для расчетов полей дипольных источников (электрических и магнитных) как на поверхности, так и в любой точке слоистого полупространства с плоскопараллельными границами раздела. Тем не менее, интерес к модели проводящего полупространства сохраняется. С точки зрения математического моделирования эту область весьма часто можно рассматривать как проводящее “квазиоднородное” полупространство, содержащее разного рода неоднородности, выявление, локализация и учет которых являются целью исследований. Но поскольку получение аналитических выражений для компонент электромагнитных полей по методу Фока удобней было бы выполнять при наличии аналитического представления ИФ1, т.е. (2), то определение последнего представляет собой вполне актуальную самостоятельную задачу, решению которой и посвящена настоящая работа.

[2] Условие отсутствия проводимости у верхнего полупространства не является обязательным.

ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ.

В качестве, одного из возможных путей к решению поставленной задачи, то есть получению аналитического выражения функции $\mathbf{F}_1(r,\nu)$, ниже рассматривается подход, который заключается в выводе и затем решении неоднородного дифференциального уравнения первого порядка с соответствующим граничным условием, которому должна удовлетворять правая часть интегрального выражения (2).

Для реализации предлагаемого подхода выпишем известное линейное дифференциальное соотношение [Бейтмен, Эрдейи, 1974]:

$$\frac{d}{dz}\left[z^\nu J_\nu(z)\right] = z^\nu J_{\nu-1}(z),$$

в котором далее положим $\nu = 1$ и $z = \lambda r$, где λ будем считать константой, после чего данное соотношение запишется в следующем виде:

$$\frac{dJ_1(\lambda r)}{dr} + \frac{1}{r}J_1(\lambda r) = J_0(\lambda r)\lambda.$$

Умножив обе стороны последнего выражения на сомножители при функции Бесселя в подынтегральном выражении правой части соотношения (2) и проинтегрировав результат по параметру λ от 0 до ∞, получим линейное неоднородное дифференциальное уравнение 1-го порядка с переменным коэффициентом и граничное условие для функции $\mathbf{F}_1(r,\nu)$:

$$\frac{d\mathbf{F}_1(r,\nu)}{dr} + \frac{1}{r}\mathbf{F}_1(r,\nu) = \mathbf{F}_0(r,\nu), \quad \mathbf{F}_1(0,\nu) = 0, \qquad (3)$$

где $\mathbf{F}_0(r,\nu)$ – известная функция, представляющая правую часть выражения (1), то есть ИФ ν-го порядка. Граничное условие для данного дифференциального уравнения следует из очевидного равенства нулю интеграла (2) ввиду равенства нулю $J_1(\lambda r)$ при $r = 0$.

Получение решения задачи (3) в аналитическом виде и даст нам аналитическое представление ИФ2.

Стандартное решение уравнений типа (3) по методу вариации постоянных (см., например, [Эльсгольц, 2008]) в данном случае может быть представлено в следующем виде:

$$\mathrm{F}_1(r;\nu) = \mathrm{F}_1^p(r;\nu) + \mathbf{c}_\nu/r, \qquad (4)$$

где первое слагаемое в правой части данного выражения — частное решение неоднородного уравнения (3), имеющее вид:

$$\mathbf{F}_1^p(r,\nu) = \frac{1}{r}\int r\mathbf{F}_0(r,\nu)dr = \\ = \frac{i\pi}{2r}\int rJ_\nu\left(\frac{k_1-k_0}{2}r\right)H_\nu^{(1)}\left(\frac{k_1+k_0}{2}r\right)dr, \quad (5)$$

а второе слагаемое — общее решение однородного уравнения, то есть уравнения вида (3), в котором правая часть тождественна нулю; $\mathbf{c}_\nu$ — некоторая константа, от выбора которой зависит выполнение граничного условия задачи (3). Как видно из правой части (4), общее решение однородного уравнения в точке $r = 0$ обращается в бесконечность, в то время как полное решение данной задачи согласно граничному условию в данной точке должно быть равно нулю. Отсюда следует, что граничное условие может быть удовлетворено в том случае, если для ее частного решения $\mathbf{F}_1^p(r;\nu)$ в окрестности точки $r = 0$ может быть получено представление в виде суммы некоторой функции, гладко стремящейся к 0 при $r \to 0$, и члена C_ν/r, где C_ν — определенная константа. Тогда, подобрав для общего решения в правой части выражения (4) значение констант $\mathbf{c}_\nu = -C_\nu$, из нее можно исключить член, содержащий множитель r^{-1}, и получить, таким образом, выражение $\mathbf{F}_1(r,\nu)$, удовлетворяющее граничному условию задачи (3).

Неопределенный интеграл в правой части выражения (5), как выясняется, является табличным, поскольку для любых двух констант a, b и цилиндрических функций $\mathcal{B}_\nu(ax)$ и $\mathcal{Z}_\nu(bx)$ 1–3-го рода, порядка ν известны соотношения следующего вида [Бейтмен, Эрдейи, 1974]:

$$\int x\mathcal{B}_\nu(ax)\mathcal{Z}_\nu(bx)dx = \\ = \begin{cases} \dfrac{ax\mathcal{B}_{\nu-1}(ax)\mathcal{Z}_\nu(bx) - bx\mathcal{B}_\nu(ax)\mathcal{Z}_{\nu-1}(bx)}{b^2-a^2}, \\ -\dfrac{ax\mathcal{B}_{\nu+1}(ax)\mathcal{Z}_\nu(bx) - bx\mathcal{B}_\nu(ax)\mathcal{Z}_{\nu+1}(bx)}{b^2-a^2}, \end{cases} \quad (6)$$

в которых применительно к нашему случаю следует полагать: $\mathcal{B}_\nu$ — функция Бесселя и $\mathcal{Z}_\nu$ — функция Ханкеля первого рода, вещественного порядка ν, $x = r$. Таким образом, в соответствии с соотношением (6) из выражения (5) получаем следующее представление частного решения уравнения (3):

$$\mathbf{F}_1^p(r,\nu) = \\ = \begin{cases} \dfrac{i\pi}{2}\dfrac{aJ_{\nu-1}(ar)H_\nu^{(1)}(br) - bJ_\nu(ar)H_{\nu-1}^{(1)}(br)}{b^2-a^2} \\ -\dfrac{i\pi}{2}\dfrac{aJ_{\nu+1}(ar)H_\nu^{(1)}(br) - bJ_\nu(ar)H_{\nu+1}^{(1)}(br)}{b^2-a^2}. \end{cases} \quad (7)$$

$$\left(a = \frac{k_1-k_0}{2}; b = \frac{k_1+k_0}{2}\right).$$

Комплексные константы k_0, k_1 согласно их определению, данному к выражению (1), обеспечивают выполнение следующих условий для констант a и b:

$$\operatorname{Im} a < \operatorname{Im} b, \quad 0 < \arg a, \quad \arg b < \pi/4, \quad (8)$$

которые вытекают из их определения, приведенного в подстроке к выражению (7).

Очевидно, что соотношение (7) предполагает тождественность первого (верхнего) и второго (нижнего) выражений в его правой части. В этом также легко убедиться, вычтя второе выражение из первого, поскольку, используя далее рекуррентную формулу, связывающую между собой функции Бесселя, равно, как и функции Ханкеля, порядков $\nu - 1$, ν и $\nu + 1$, получим 0 в правой части (7), как и в левой.

Нетрудно также видеть, что оба выражения (7) представляют собой гладкие функции переменной $r > 0$, которые, благодаря неравенствам (8), ограничены по модулю и стремятся к 0 при $r \to \infty$, ввиду асимптотик функций Бесселя и Ханкеля для больших значений модуля аргумента.

В связи с полученным выше полным решением уравнения (3) в виде (4) и частным решением в виде (7) остается один вопрос: может ли быть удовлетворено граничное условие задачи (3), что проверим на интересующем нас множестве индексов $\nu = n, n + 1/2$;

$n = 0, 1, 2,\ldots$ Как нетрудно проверить, для отрицательных значений $(\nu = -1, -1/2)$ данное решение не удовлетворяет граничному условию (3). При $\nu = 0$ оба выражения правой части (7) можно объединить следующим общим соотношением для окрестности точки $r = 0$:

$$\pm aJ_{\mp1}(ar)H_0^{(1)}(br) \mp bJ_0(ar)H_{\mp1}^{(1)}(br) = \\ = \frac{2}{i\pi r} + \frac{2a^2}{i\pi}r\ln\frac{br}{2} + o(r),$$

при котором

$$\mathbf{F}_1^p(r,0) = \frac{1}{b^2-a^2}\frac{1}{r} + \frac{a^2}{b^2-a^2}r\ln\frac{br}{2} + o(r),$$

и, как следствие,

$$\mathbf{c}_{\nu=0} = \mathbf{c}_0 = -\frac{1}{b^2-a^2} = -\frac{(a/b)^0}{b^2-a^2}, \\ \mathbf{F}_1(r;0) = \frac{a^2}{b^2-a^2}r\ln\frac{br}{2} + o(r), \quad (9)$$

так что для полного решения задачи (3) выполняется предельный переход

$$\mathbf{F}_1(r;0) = \frac{a^2}{b^2 - a^2} r \ln\frac{br}{2} + o(r) \to 0 \ (r \to 0).$$

Для функций $\mathbf{F}_1^p(r,\nu)$ при $\nu = 1/2, 1, 3/2$ и малых r получаются представления:

$$\mathbf{F}_1^p(r;\nu) = \frac{(a/b)^\nu}{b^2 - a^2}\frac{1}{r} + \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\sqrt{a/b}}{2} r^2 + o(r^3) & (\nu = 1/2) \\ \dfrac{a/b}{4} r + o\left(r^3 \ln\dfrac{br}{2}\right) + o(r^3) & (\nu = 1) \\ \dfrac{(a/b)^{3/2}}{6} r^2 + o(r^3) & (\nu = 3/2) \end{array}\right\} (r \to 0), \quad (10)$$

из которых, соответственно, очевидны следующие выражения для $\mathbf{c}_\nu$:

$$\mathbf{c}_{1/2} = -\frac{(a/b)^{1/2}}{b^2 - a^2}, \quad \mathbf{c}_1 = -\frac{a/b}{b^2 - a^2}, \quad \mathbf{c}_{3/2} = -\frac{(a/b)^{3/2}}{b^2 - a^2}.$$

Вообще, используя выражения для функций Бесселя и Ханкеля целого и полуцелого порядков, можно показать, что при целых n и полуцелых $\nu = n + 1/2$ $(n \ge 2)$ индексах для правой части соотношения (7) имеют место, соответственно, выражения:

$$\mathbf{F}_1^p(r;n) = \frac{(a/b)^n}{b^2 - a^2}\frac{1}{r} + o(r),$$
$$\mathbf{F}_1^p(r;n+1/2) = \frac{(a/b)^{n+1/2}}{b^2 - a^2}\frac{1}{r} + o(r^2) \ (r \to +0), \quad (11)$$

причем первый член в правых частях выражений (11) можно получить, используя только нулевые приближения функций Бесселя и Ханкеля первого рода [Справочник, 1979]

$$J_\nu(z) \approx \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \Big/ \Gamma(\nu+1);$$
$$H_\nu^{(1)}(z) \approx \frac{1}{i\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}\Gamma(\nu), \quad \nu \ge 1 \ (z \to 0),$$

из которых затем определить параметр $\mathbf{c}_\nu$ как коэффициент при r^{-1}, взятый с обратным знаком. Таким образом, получаем следующую общую формулу:

$$\mathbf{c}_\nu = -\frac{(a/b)^\nu}{b^2 - a^2}\nu = n, n+1/2; \quad n = 0, 1, 2, \ldots \quad (12)$$

которая, как следует из выражений (9)–(11), обеспечивает выполнение граничного условия задачи (3) при представлении ее решения в виде (4) с учетом условия, наложенного на параметр ν, в выражениях (2) и (12).

Учитывая тождественность верхнего и нижнего выражений в правой части соотношения (7), взяв их сумму и используя известное выражение для первой производной функций Бесселя и Ханкеля порядка ν через те же функции порядков $\nu - 1$ и $\nu + 1$, получим следующее выражение для частного решения:

$$\mathbf{F}_1^p(r,\nu) = \frac{i\pi}{2(b^2 - a^2)} \times \left[\frac{dJ_\nu(ar)}{dr} H_\nu^{(1)}(br) - J_\nu(ar)\frac{dH_\nu^{(1)}(br)}{dr}\right]. \quad (13)$$

Подставляя выражение (13) в (4) и принимая во внимание определение параметров a и b, данное в подстроке к (7), получим окончательное аналитическое представление ИФ1, которое приведем ниже как в обычных функциях Бесселя и Ханкеля первого рода, так и в модифицированных функциях Бесселя первого и третьего рода:

$$\mathbf{F}_1(r,\nu) = \int_0^\infty J_1(\lambda r)\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} - \sqrt{\lambda^2 - k_0^2}}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} + \sqrt{\lambda^2 - k_0^2}}\right)^\nu \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} = \frac{1}{k_0 k_1} \times$$
$$\times \left\{\frac{i\pi}{2}\left[\frac{d J_\nu\left(\frac{k_1 - k_0}{2} r\right)}{dr} H_\nu^{(1)}\left(\frac{k_1 + k_0}{2} r\right) - J_\nu\left(\frac{k_1 - k_0}{2} r\right)\frac{d H_\nu^{(1)}\left(\frac{k_1 + k_0}{2} r\right)}{dr}\right] - \frac{\left(\frac{k_1 - k_0}{k_1 + k_0}\right)^\nu}{r}\right\} =$$
$$= \frac{1}{k_0 k_1}\left[\frac{d I_\nu\left(\frac{\bar{k}_1 - \bar{k}_0}{2} r\right)}{dr} K_\nu\left(\frac{\bar{k}_1 + \bar{k}_0}{2} r\right) - I_\nu\left(\frac{\bar{k}_1 - \bar{k}_0}{2} r\right)\frac{d K_\nu\left(\frac{\bar{k}_1 + \bar{k}_0}{2} r\right)}{dr} - \frac{\left(\frac{\bar{k}_1 - \bar{k}_0}{\bar{k}_1 + \bar{k}_0}\right)^\nu}{r}\right] \quad (14)$$
$$(\nu = n, n+1/2; \quad n = 0,1,2,\ldots; \ \bar{k}_{1,0} = -ik_{1,0}).$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученный результат, то есть выражение (14) вместе с (1), представляют собой основу для получения по методу Фока аналитических выражений для расчетов электромагнитных полей электрических и магнитных диполей на границе раздела двух полупространств. Вывод этих выражений сам по себе представляет отдельную задачу, решение которой вместе с практической реализацией его результатов требуют отдельного рассмотрения в последующих публикациях.

Выражение (14), равно как и метод его получения, может представлять интерес при решении различных прикладных задач вычислительной геофизики. В частности, выражения (1) и (14) могут быть использованы для разработки новых или оценки точности и надежности известных численных алгоритмов быстрого преобразования Ханкеля 0-го и 1-го порядков применительно к моделированию электромагнитных полей дипольных источников в слоистых средах.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках темы: АААА-А17-117060110209-6 (номер госрегистрации).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Бейтмен Т., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука. 1974. 296 с.

Бурсиан В.Р. Теория электромагнитных полей, применяемых в электроразведке. Л.: Недра. 1972. 367 с.

Вешев А.В., Ивочкин В.Г., Игнатьев Г.Ф. Электромагнитное профилирование. Л.: Недра. 1971. 216 с.

Справочник по специальным функциям с формулами, графиками, и математическими таблицами / М. Абрамовиц, И. Стиган (ред.). М.: Наука. 1979. 832 с.

Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения. М. 2008. 320 с.

Fock V. Zur Btrechnung des elektromagnetischen Wechselstromfeldes bei ebener Begrenzung // Ann. Physik. Bd 17. H. 4. 1933.

On an Analytical Representation of an Integral Related to the Fock Integral That Appears in Calculations of the Electromagnetic Fields of Dipole Sources at the Interface between Two Half-Spaces

S. S. Kevorkyants*, **

Geoelectromagnetic Research Centre, Schmidt Institute of Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences, Troitsk, Moscow, 108840 Russia

**e-mail: gemri@igemi.troitsk.ru*

***e-mail: sourens@mail.ru*

Abstract—The Fock integral is called after Fock who introduced it for the theoretical analysis of the electromagnetic field of magnetic dipoles at the boundary of a uniform conducting (nonmagnetic) half-space and obtained its analytical expression in terms of cylindrical functions. Detailed analytical representations of integrals, where all components of the fields of the vertical and horizontal magnetic dipoles are expressed, are reported in [A.V. Veshev et al., 1971]. To obtain analytical expressions for similar integrals representing the components of the fields of electric dipoles in a similar model, it is necessary to consider not only the Fock integral but also another related integral conditionally called the Fock integral 1 whose analytical expression is still unknown. The aims of this work are to derive an inhomogeneous linear first-order differential equation for this integral with the corresponding boundary conditions and to obtain the analytical representation of the Fock integral 1 by solving this equation. The result of this work will allow one to simplify the simulation of fields in a uniform half-space and to improve the interpretation of electromagnetic data due to more accurate and reliable estimates of the normal field in such models of a host medium.

Keywords: Fock integral, Bessel and Hankel functions, inhomogeneous differential equation, uniqueness of the solution