

## ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ УДЕЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ ЛОКАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ КУСОЧНО-ПОСТОЯННОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

© 2023 г. В. Н. Кризский<sup>1</sup>, \*, П. Н. Александров<sup>2</sup>, \*\*

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский горный университет, г. Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup>Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, г. Москва, Россия

\*E-mail: [krizskiy\\_vn@pers.spmi.ru](mailto:krizskiy_vn@pers.spmi.ru)

\*\*E-mail: [alexandr@igemi.troitsk.ru](mailto:alexandr@igemi.troitsk.ru)

Поступила в редакцию 29.03.2023 г.

После доработки 03.04.2023 г.

Принята к публикации 05.05.2023 г.

Работа является продолжением исследований авторов по решению обратных задач математической геофизики в линейной постановке. В отличие от предыдущих работ, где решение строилось на основе объемных интегральных уравнений, здесь используются граничные интегральные представления и возникающие граничные интегральные уравнения при решении обратной коэффициентной задачи геоэлектрики по поиску постоянной удельной электрической проводимости локального изотропного включения, находящегося в кусочно-постоянной по электрической проводимости изотропной вмещающей среде.

*Ключевые слова:* обратная коэффициентная задачи геоэлектрики, кусочно-постоянные изотропные среды, граничные интегральные уравнения.

**DOI:** 10.31857/S0002333723060108, **EDN:** FQXPGK

### ВВЕДЕНИЕ

При поиске и разведке месторождений на суше или шельфе морей, для структурного анализа среды, проводимого при мониторинге месторождений в процессе их эксплуатации, применяют геофизические изыскания на основе гравитационных [Балк, Долгаль, 2019; Mingaleva et al., 2022], сейсмических [Sen, 2006; Movchan et al., 2022; Gusev et al., 2020; Дубиня и др., 2022], электромагнитных полей [Ермолин и др., 2019; Мартышко и др., 2013; Шимелевич и др., 2015; 2022]; используют геохимические методы анализа рассеивания радиоактивных элементов, тяжелых металлов и газов [Philp, Crisp, 1982; Chen et al., 2001; Putikov et al., 2020]; а также используют комплексирование различных геофизических методов [Alekseev, 2020; Danilieva et al., 2021; Saunders et al., 2005; Molodtsov et al., 2013; Баюк, 2011]. Интерпретация данных измерений геофизических полей осуществляется в некотором “прогнозном” – заданном по форме и свойствам классе сред с применением математических моделей распространения физических полей в этих средах. Ограничения на класс сред базируются на априорной информации. Основным источником такой информации являются геологические представления об усло-

виях формирования и истории геологического развития изучаемых пород. Для сбора информации на больших по площади исследуемых территориях привлекаются морские, авиационные (в т.ч. БПЛА) измерительные системы [Parson, 2000; Кремчеев, 2019]. Обработка значительного объема измеренных геофизических данных для извлечения геологической информации требует разработки и внедрения цифровых технологий [Samylovskaya и др., 2022], адекватных практике математических моделей [Gospodarikov и др., 2022] и быстрых методов и алгоритмов решения обратных геофизических задач.

Определение внутреннего строения Земли по данным измерений геофизических полей – основная задача геофизики. С математической точки зрения, она относится к классу обратных некорректных задач, представляющих сложность в силу возможного несуществования, неединственности или неустойчивости решения [Li, 1996; Tarantola, 2005; Lukyanenko, Yagola, 2016; Scales et al., 2001; Sen, 2006; Кабанихин, Исаков, 2007; Richter, 2021]. Широко используемым на практике классическим способом решения обратных некорректных задач является вариационный метод А.Н. Тихонова поиска экстремума регуляризирующего функционала [Тихонов, Арсе-

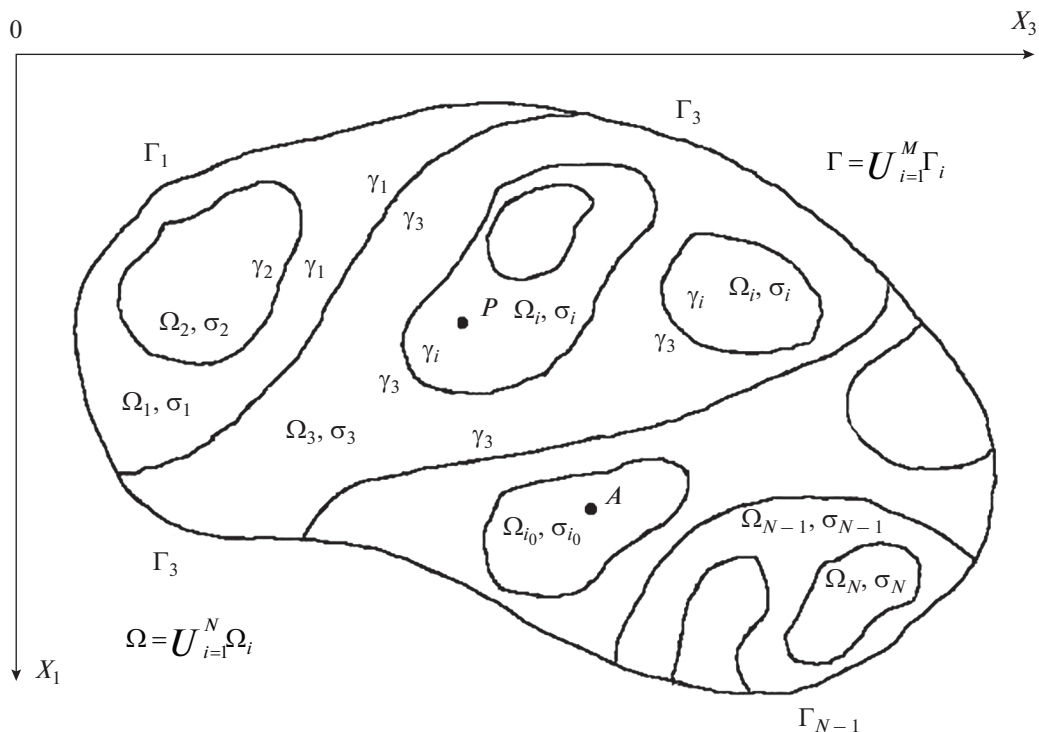


Рис. 1. Кусочно-постоянная изотропная среда в  $R^3$ .

нин, 1979; Ягола и др., 2017]. В настоящее время также применяются и неэкстремальные методы решения обратных задач [Романов, 1980; Юрко, 2001; Ахтямов, 2009; Губатенко, 2011; Veilina, Klibanov, 2012; Александров, 2022].

В геофизике решение обратной задачи для нахождения аномалиеобразующего объекта по измеренным данным искусственно- или естественно-возбуждаемого физического поля [Nguyen, 2012] можно разбить на два этапа: 1й этап – определение местоположения и границ включения [Монахов, 2014]; и 2й этап – определение физических свойств пород его составляющих.

В настоящей работе полагается, что в среде искусственно возбуждается геофизическое поле постоянного электрического тока, и первый из этих двух этапов реализован, т.е. местоположение и границы аномалиеобразующего локального включения найдены. Будем рассматривать этап определения удельной электрической проводимости грунта его заполняющего.

В качестве способа решения рассматривается способ решения обратных задач в линейной постановке, изложенный в работе [Александров, Кризский, 2022], но, в отличие от последнего, использующий граничные интегральные представления решения и граничные интегральные уравнения.

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Рассмотрим случай кусочно-постоянного изотропного пространства (рис. 1).

Пусть кусочно-изотропная область  $\Omega$  с внешней границей  $\Gamma$  состоит из подобластей  $\Omega_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , заполненных однородными проводящими поле грунтами с постоянными удельными электропроводностями  $\sigma_i$ . Обозначим через  $S_i$  границу области  $\Omega_i$ .  $S_i = \gamma_i \cup \Gamma_i$ , где  $\Gamma_i$  – внешняя часть границы, и  $\gamma_i = S_i \setminus \Gamma_i$  – внутренняя часть границы. Если область  $\Omega_i$  не имеет контакта с внешней границей  $\Gamma$ , то  $\Gamma_i = \emptyset$  и  $S_i \equiv \gamma_i$ . Математическая модель распределения потенциала  $U(P)$ ,  $P(x, y, z)$  поля постоянного электрического тока имеет вид:

$$\operatorname{div}(\sigma_i \nabla U_i(P)) = -f_i(P), \quad P \in \Omega_i, \quad i = \overline{1, N}; \quad (1)$$

$$U_i(P) - U_j(P)|_{\gamma_i \cap \gamma_j} = 0,$$

$$(\sigma_i \nabla U_i(P), \mathbf{n}) - (\sigma_j \nabla U_j(P), \mathbf{n})|_{\gamma_i \cap \gamma_j} = 0, \quad (2)$$

$$i = \overline{1, N}, \quad j \in J_i = \{j | j = \overline{1, i-1}; \gamma_i \cap \gamma_j \neq \emptyset\};$$

$$\alpha_i(P)(\sigma_i \nabla U_i(P), \mathbf{n}) - \beta_i(P)U_i(P)|_{P \in \Gamma_i} = \psi_i(P), \quad (3)$$

$$|\alpha_i(P)| + |\beta_i(P)| \neq 0, \quad i = i_1, i_2, \dots, i_k, \quad k \leq N;$$

$$U_m(P) \rightarrow 0, \quad P \rightarrow \infty, \quad m = m_1, m_2, \dots, m_n, \quad n \leq N. \quad (4)$$

Здесь:  $f_i(P)$  – функция интенсивности источников/стоков поля, расположенных в подобласти  $\Omega_i$ ;  $J_i$  – множество номеров подобластей  $\Omega_j$ , граничащих с подобластью  $\Omega_i$  и имеющих меньшие номера, чем  $i$ ;  $i_1, i_2, \dots, i_k$  – номера подобластей  $\Omega_i$ , участки границ которых являются частью внешней границы  $\Gamma$  области  $\Omega$ ;  $m_1, m_2, \dots, m_N$  – номера подобластей с участками границ, уходящими в бесконечность;  $\mathbf{n}$  – вектор внешней нормали к границе области.

Без ограничения общности рассуждений будем предполагать, что анализируемое локальное включение – это включение  $\Omega_N$  с известной границей  $S_N$  заполнено грунтом с неизвестной удельной электропроводностью  $\sigma_N$ . Границы и удельные электропроводности остальных подобластей  $\Omega_i, i = \overline{1, N-1}$  среды  $\Omega$  известны. Обозначим через  $\Omega_{vm}$  одну из подобластей  $\Omega_i, i = \overline{1, N-1}$ , в которую входит локальное включение  $\Omega_N$ . Удельная электропроводность грунта в подобласти  $\Omega_{vm} - \sigma_{vm}$ .

Интегральное представление решения задачи (1)–(4) может быть выписано [Кризский, 2009]:

$$\begin{aligned} U(P) = & \int_{S_N} U(Q) ((\sigma_{vm} - \sigma_N) \bar{\nabla} G(P, Q), \mathbf{n}_Q) d\gamma_{N_Q} + \\ & + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} f_i(Q) G(P, Q) d\Omega_{iQ} + \\ & + \sum_{\Pi} \int_{\Gamma_{\Pi}} \frac{\Psi_{\Pi}(Q)}{\alpha_{\Pi}(Q)} G^1(P, Q) d\Gamma_{\Pi Q} + \\ & + \sum_{l_2} \int_{\Gamma_{l_2}} \frac{\Psi_{l_2}(Q)}{\beta_{l_2}(Q)} (\sigma_{l_2} \bar{\nabla} G^1(P, Q), \mathbf{n}) d\Gamma_{l_2 Q}, \end{aligned} \quad (5)$$

где:  $\mathbf{n}_Q$  – вектор внешней нормали в точке  $Q$  на границе  $S_N$ ;  $\Pi$  – множество номеров участков внешней границы  $\Gamma$ , на которых заданы условия второго или третьего рода при  $\alpha_{\Pi}(P) \neq 0$ , а  $l_2$  – множество номеров участков внешней границы  $\Gamma$ , на которых заданы условия первого рода (при  $\alpha_{l_2}(P) = 0, \beta_{l_2}(P) \neq 0$ );  $G(P, Q)$  – функция Грина пространства, вмещающего локальное включение  $\Omega_N$  – функция, описывающая поле точечного источника единичной интенсивности, находящемся в произвольной точке  $Q(x_q, y_q, z_q)$ , в области с числом кусочно-изотропных подобластей  $N_1 = N - 1$ . Функция Грина удовлетворяет следующей задаче:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\sigma_i \bar{\nabla} G_i(P, Q)) = & -\delta(P - Q), \\ P(x, y, z) \in & \Omega_i, \quad i = \overline{1, N}; \end{aligned} \quad (6)$$

$$G_i(P, Q) - G_j(P, Q) \Big|_{\gamma_i \cap \gamma_j} = 0,$$

$$(\sigma_i \bar{\nabla} G_i(P, Q), \mathbf{n}) - (\sigma_j \bar{\nabla} G_j(P, Q), \mathbf{n}) \Big|_{\gamma_i \cap \gamma_j} = 0, \quad (7)$$

$$i = \overline{1, N_1}, \quad j \in J_i;$$

$$\alpha_i(P) (\sigma_i \bar{\nabla} G_i(P, Q), \mathbf{n}) - \beta_i(P) G_i(P, Q) \Big|_{P \in \Gamma_i} = 0, \quad (8)$$

$$|\alpha_i(P)| + |\beta_i(P)| \neq 0, \quad i = i_1, i_2, \dots, i_{k_1}, \quad k_1 \leq k \leq N_1;$$

$$G_m(P, Q) \rightarrow 0, \quad P \rightarrow \infty,$$

$$m = m_1, m_2, \dots, m_n, \quad n_1 \leq n \leq N_1, \quad (9)$$

где  $\Pi$  – номера участков внешней границы  $\Gamma$ , на которых заданы условия второго или третьего рода при  $\alpha_{\Pi}(P) \neq 0$ , а  $l_2$  – номера участков внешней границы  $\Gamma$ , на которых заданы условия первого рода (при  $\alpha_{l_2}(P) = 0, \beta_{l_2}(P) \neq 0$ ).

Неизвестные в (5) граничные (на  $S_N$ ) значения потенциала тока находятся из интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$\begin{aligned} U(P) - \int_{S_N} U(Q) ((\sigma_{vm} - \sigma_N) \bar{\nabla} G(P, Q), \mathbf{n}_Q) d\gamma_{N_Q} = \\ = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} f_i(Q) G(P, Q) d\Omega_{iQ} + \\ + \sum_{\Pi} \int_{\Gamma_{\Pi}} \frac{\Psi_{\Pi}(Q)}{\alpha_{\Pi}(Q)} G^1(P, Q) d\Gamma_{\Pi Q} + \\ + \sum_{l_2} \int_{\Gamma_{l_2}} \frac{\Psi_{l_2}(Q)}{\beta_{l_2}(Q)} (\sigma_{l_2} \bar{\nabla} G^1(P, Q), \mathbf{n}) d\Gamma_{l_2 Q}, \end{aligned} \quad (10)$$

$P, Q \in S_N.$

Если граничные условия на внешних границах однородны, и источники поля (в количестве  $N_a$  штук) точечные, расположены в точках  $A_k \in \Omega$ ,  $k = 1, 2, \dots, N_a$  и имеют интенсивности  $I_k$  ампер, а измерительные датчики тока (в количестве  $N_d$  штук) находятся в точках  $D_1, D_2, \dots, D_{N_d} \in \Omega$ , то интегральное представление (5) и интегральное уравнение (10) преобразуются к виду:

$$\begin{aligned} U(D_i) = \Delta\sigma \int_{S_N} \frac{\partial G(D_i, Q)}{\partial n_Q} U(Q) dS_Q + \\ + \sum_{k=1}^{N_a} I_k G(D_i, A_k), \quad i = 1, 2, \dots, N_d, \end{aligned} \quad (11)$$

$$U(P) - \Delta\sigma \int_{S_N} \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n_Q} U(Q) dS_Q = \sum_{k=1}^{N_a} I_k G(P, A_k), \quad (12)$$

$P, Q \in S_N,$

где  $\Delta\sigma = \sigma_{vm} - \sigma_N$  – избыточная электропроводность включения.

Не уменьшая общности рассматриваемых сред, описываемых формулами (5) и (10), в дальнейшем будем рассматривать случай среды, соответствующий формулам (11)–(12).

Разобьем поверхность включения  $S_N$  на элементарные сегменты  $\Delta S_j (j = 1, 2, \dots, N_v)$ , применим в (11), (12) для вычисления интегралов кубатурные формулы:

$$\int_{S_N} \frac{\partial G(D_i, Q)}{\partial n_Q} U(Q) dS_Q = \sum_{j=1}^{N_v} C_j \frac{\partial G(D_i, Q_j)}{\partial n_{Q_j}} U(Q_j) + H_1, \quad D_i \in \Omega_0,$$

$$\int_{S_N} \frac{\partial G(P_i, Q)}{\partial n_Q} U(Q) dS_Q = \sum_{j=1}^{N_v} C_j \frac{\partial G(P_i, Q_j)}{\partial n_{Q_j}} U(Q_j) + H_2, \quad P_i, Q_j \in S_n, \quad i, j = 1, 2, \dots, N_v,$$

где  $i = 1, 2, \dots, N_d$ ;  $Q_j \in S_n$ ;  $C_j$  – кубатурные коэффициенты,  $j = 1, 2, \dots, N_v$ ,  $H_1$  и  $H_2$  – остаточные члены кубатурных формул. Считая остаточные члены достаточно малыми величинами, представим равенство (11) в виде:

$$U_i = \Delta\sigma \sum_{j=1}^{N_v} g_{ij} U_j + U_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, N_d, \quad (13)$$

где  $g_{ij} = C_j \frac{\partial G(D_i, Q_j)}{\partial n_{Q_j}}$ ,  $U_i = U(D_i)$ ,  $U_j = U(Q_j)$ ,

$U_{i0} = \sum_{k=1}^{N_a} I_k G(D_i, A_k)$ , а уравнение (12) – в виде

$$U_i - \Delta\sigma \sum_{j=1}^{N_v} g_{ij} U_j = U_{i0}, \quad P_i, Q_j \in S_n, \quad i, j = 1, 2, \dots, N_v, \quad (14)$$

где  $g_{ij} = C_j \frac{\partial G(P_i, Q_j)}{\partial n_{Q_j}}$ ,  $U_i = U(P_i)$ ,  $U_j = U(Q_j)$ ,

$U_{i0} = \sum_{k=1}^{N_a} I_k G(P_i, A_k)$ .

В (13) и (14) перейдем к матричному виду. Для равенства (13) получим:

$$\overline{U}_d = \Delta\sigma \widetilde{\mathbf{g}}_{dv} \overline{U}_v + \overline{U}_{d0}, \quad (15)$$

где  $\overline{U}_d = \begin{pmatrix} U(D_1) \\ U(D_2) \\ \vdots \\ U(D_{N_d}) \end{pmatrix}$ ;

$$\widetilde{\mathbf{g}}_{dv} = \begin{bmatrix} C_1 \frac{\partial G(D_1, Q_1)}{\partial n_{Q_1}} & \dots & C_{N_v} \frac{\partial G(D_1, Q_{N_v})}{\partial n_{Q_{N_v}}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_1 \frac{\partial G(D_{N_d}, Q_1)}{\partial n_{Q_1}} & \dots & C_{N_v} \frac{\partial G(D_{N_d}, Q_{N_v})}{\partial n_{Q_{N_v}}} \end{bmatrix};$$

$$\overline{U}_v = \begin{pmatrix} U(Q_1) \\ U(Q_2) \\ \vdots \\ U(Q_{N_v}) \end{pmatrix}; \quad \overline{U}_{d0} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{N_a} I_k G(D_1, A_k) \\ \sum_{k=1}^{N_a} I_k G(D_2, A_k) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{N_a} I_k G(D_{N_d}, A_k) \end{pmatrix}.$$

Матричный вид уравнения (14):

$$(E - \Delta\sigma \widetilde{\mathbf{g}}_{vv}) \overline{U}_v = \overline{U}_{v0}, \quad (16)$$

где  $E$  – единичная матрица;

$$\widetilde{\mathbf{g}}_{vv} = \begin{bmatrix} C_1 \frac{\partial G(P_1, Q_1)}{\partial n_{Q_1}} & \dots & C_{N_v} \frac{\partial G(P_1, Q_{N_v})}{\partial n_{Q_{N_v}}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_1 \frac{\partial G(P_{N_v}, Q_1)}{\partial n_{Q_1}} & \dots & C_{N_v} \frac{\partial G(P_{N_v}, Q_{N_v})}{\partial n_{Q_{N_v}}} \end{bmatrix};$$

$$\overline{U}_v = \begin{pmatrix} U(P_1) \\ U(P_2) \\ \vdots \\ U(P_{N_v}) \end{pmatrix}; \quad \overline{U}_{v0} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{N_a} I_k G(P_1, A_k) \\ \sum_{k=1}^{N_a} I_k G(P_2, A_k) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{N_a} I_k G(P_{N_v}, A_k) \end{pmatrix}.$$

Вектор  $\overline{U}_v$  значений потенциала на границе включения  $S_N$ , согласно равенству (16), может быть найден через обратную матрицу:

$$\overline{U}_v = (E - \Delta\sigma \widetilde{\mathbf{g}}_{vv})^{-1} \overline{U}_{v0}. \quad (17)$$

Подставив вектор (17) в формулу (15), будем иметь

$$\overline{U}_d = \Delta\sigma \widetilde{\mathbf{g}}_{dv} (E - \Delta\sigma \widetilde{\mathbf{g}}_{vv})^{-1} \overline{U}_{v0} + \overline{U}_{d0}.$$

Преобразуя последовательно последнее выражение, получим:

$$\overline{U}_d - \overline{U}_{d0} = \widetilde{\mathbf{g}}_{dv} \left( \frac{1}{\Delta\sigma} E - \widetilde{\mathbf{g}}_{vv} \right)^{-1} \overline{U}_{v0};$$

$$\widetilde{\mathbf{g}}_{dv}^T (\overline{U}_d - \overline{U}_{d0}) = \widetilde{\mathbf{g}}_{dv}^T \widetilde{\mathbf{g}}_{dv} \left( \frac{1}{\Delta\sigma} E - \widetilde{\mathbf{g}}_{vv} \right)^{-1} \overline{U}_{v0};$$

$$\left( \widetilde{\mathbf{g}}_{dv}^T \widetilde{\mathbf{g}}_{dv} \right)^{-1} \widetilde{\mathbf{g}}_{dv}^T (\overline{U}_d - \overline{U}_{d0}) = \left( \frac{1}{\Delta\sigma} E - \widetilde{\mathbf{g}}_{vv} \right)^{-1} \overline{U}_{v0}.$$

Обозначим вектор, стоящий в левой части последнего равенства через  $\overline{a}$ :

$$\overline{a} = \left( \widetilde{\mathbf{g}}_{dv}^T \widetilde{\mathbf{g}}_{dv} \right)^{-1} \widetilde{\mathbf{g}}_{dv}^T (\overline{U}_d - \overline{U}_{d0}). \quad (18)$$

В формуле (18) вектор разности  $\overline{U}_d - \overline{U}_{d0}$  – есть вектор значений аномального потенциала, полученный на системе измерительных датчиков.

Продолжим преобразования:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \left( \frac{1}{\Delta\sigma} E - \widetilde{\mathbf{g}}_{vv} \right)^{-1} \overline{U}_{v0}; \\ \left( \frac{1}{\Delta\sigma} E - \widetilde{\mathbf{g}}_{vv} \right) \vec{a} &= \overline{U}_{v0}; \\ \frac{1}{\Delta\sigma} \vec{a} - \widetilde{\mathbf{g}}_{vv} \vec{a} &= \overline{U}_{v0}; \\ \vec{a} &= \Delta\sigma \left( \overline{U}_{v0} + \widetilde{\mathbf{g}}_{vv} \vec{a} \right). \end{aligned}$$

Обозначив вектор, стоящий в последнем равенстве в круглых скобках, через  $\vec{b}$ ,

$$\vec{b} = \overline{U}_{v0} + \widetilde{\mathbf{g}}_{vv} \vec{a}, \quad (19)$$

окончательно получим

$$\vec{a} = \Delta\sigma \cdot \vec{b}. \quad (20)$$

Из (20) следует, что векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  – коллинеарны, и равенство (20) представимо покомпонентно:  $a_j = \Delta\sigma b_j, j = 1, 2, \dots, N_v$ .

Откуда

$$\Delta\sigma = a_j / b_j, \quad j = 1, 2, \dots, N_v. \quad (21)$$

Из (21) следует, что искомый коэффициент избыточной электропроводности  $\Delta\sigma = \sigma_{vm} - \sigma_N$  может быть найден как отношение ненулевых компонент векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , или, для большей достоверности результата, – как среднее арифметическое таких отношений

$$\Delta\sigma = \frac{1}{N_v^0} \sum_{\substack{j=1 \\ a_j \neq 0, b_j \neq 0}}^{N_v} \frac{a_j}{b_j}. \quad (22)$$

Здесь  $N_v^0$  – количество ненулевых компонент.

Определение  $\Delta\sigma$  в (20) можно осуществить и через длины векторов по формуле

$$\Delta\sigma = \pm |\vec{a}| / |\vec{b}|. \quad (23)$$

Знак “плюс” используется в случае, когда удельная электропроводность включения меньше удельной электропроводности вмещающей под-области ( $\sigma_N < \sigma_{vm}$ ), а знак “минус” – в противоположном случае. Какой из этих случаев имеет место – определяется по качественному поведению аномального поля над включением.

Для решения обратной задачи определения искомого удельного электрического сопротивления локального включения остается из равенства  $\Delta\sigma = \sigma_{vm} - \sigma_N$  вычислить  $\sigma_1$ :

$$\sigma_N = \sigma_{vm} - \Delta\sigma. \quad (24)$$

Анализ полученных выше формул позволяет заметить:

1) для нахождения  $\sigma_N$  достаточно одного источника поля ( $N_a = 1$ );

2) в формуле (18), если количество приемников тока  $N_d$  совпадает с числом сегментов разбиения поверхности локального включения  $N_v$  ( $N_d = N_v$ ), то вычисление вектора  $\vec{a}$  может вестись по формуле  $\vec{a} = \widetilde{\mathbf{g}}_{dv}^{-1} (\overline{U}_d - \overline{U}_{d0})$ ;

3) для вычисления обратных матриц для матриц  $\widetilde{\mathbf{g}}_{dv}^T \widetilde{\mathbf{g}}_{dv}$  или  $\widetilde{\mathbf{g}}_{dv}$  необходимо, чтобы последние были невырожденными, что влечет выбор такой системы наблюдения, описываемой точечными датчиками  $D_1, D_2, \dots, D_{N_d}$ , и такого разбиения поверхности  $S$  на элементарные сегменты  $\Delta S_j (j = 1, 2, \dots, N_v)$ , чтобы строки (столбцы) матриц были линейно независимыми. Рост количества разбиений ( $N_v$ ) поверхности будет уменьшать расстояние между узлами кубатурной формулы  $Q_j, j = 1, 2, \dots, N_v$ , “сближая” строки матриц (делая их “более зависимыми”), и, тем самым, будет увеличивать число обусловленности матриц, что будет операцией вычисления вектора  $\vec{a}$  делать неустойчивой к присутствующим погрешностям измерений поля в датчиках (к вектору  $\overline{U}_d$ ), и, следовательно, будет приводить к неустойчивости в определении значений удельной электропроводности включения  $\sigma_N$ ;

4) все формулы остаются верными, если локальное однородное изотропное включение целиком находится в любой другой кусочно-постоянной изотропной вмещающей среде (например, в горизонтально слоистой) в ее сегменте с удельной электрической проводимостью  $\sigma_{vm}$ . В этом случае для вычислений следует использовать формулы для соответствующей функции Грина  $G(P, Q)$  и градиента функции Грина  $\nabla_Q G(P, Q)$  вмещающей среды.

В итоге, можно сформулировать следующий вычислительный **алгоритм**:

1. Задать:

– вмещающее включение кусочно-однородное пространство, описав его границы и удельные электрические проводимости составляющих его сегментов;

– локальное включение  $\Omega_N$ , описав его границу  $S_N$  (например, параметрически или сплайном);

– координаты источников электрического поля – точек  $A_1, A_2, \dots, A_{N_a}$  и интенсивности стекаемых с них токов  $I_1, I_2, \dots, I_{N_a}$ ;

– координаты измерительных датчиков электрического поля  $D_1, D_2, \dots, D_{N_d}$  и вектор  $\overline{U}_d = (U(D_1) \ U(D_2) \ \dots \ U(D_{N_d}))^T$  измеренных значений потенциала электрического тока в  $N_d$  датчиках /размерности  $N_d/$ .

2. Осуществить разбиение поверхности локального включения  $S_N$  на сегменты  $\Delta S_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N_v$ ;  $N_v \leq N_d$ ) и выбрать кубатурную формулу.

3. Вычислить матрицы  $\widetilde{\mathbf{g}}_{dv}$  /размерности  $N_d \times N_v$ /,  $\widetilde{\mathbf{g}}_{vv}$  /размерности  $N_v \times N_v$  /и векторы  $\overline{U}_{d0}$  /размерности  $N_d$  /,  $\overline{U}_{v0}$  /размерности  $N_v$  /.

4. При  $N_d = N_v$ , вычислить вектор  $\vec{a}$  /размерности  $N_v$  / по формуле  $\vec{a} = \widetilde{\mathbf{g}}_{dv}^{-1} (\overline{U}_d - \overline{U}_{d0})$ , иначе – по формуле  $\vec{a} = \left( \widetilde{\mathbf{g}}_{dv}^{-1} \widetilde{\mathbf{g}}_{dv} \right)^{-1} \widetilde{\mathbf{g}}_{dv}^{-1} (\overline{U}_d - \overline{U}_{d0})$ .

5. Вычислить вектор:  $\vec{b} = \overline{U}_{v0} + \widetilde{\mathbf{g}}_{vv} \vec{a}$  /размерности  $N_v$  /.

6. Вычислить  $\Delta\sigma$  по формуле  $\Delta\sigma = \frac{1}{N_v^0} \sum_{j=1}^{N_v} \frac{a_j}{a_j \neq 0, b_j \neq 0} b_j$  или  $\Delta\sigma = \pm |\vec{a}|/|\vec{b}|$ .

7. Вычислить удельную электропроводность включения:  $\sigma_N = \sigma_{vm} - \Delta\sigma$ .

### ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Алгоритм вычислений, представленный выше, реализован программно.

Рассмотрим простой случай – случай однородного вмещающего полупространства  $\Omega_1$  с удельной электропроводностью грунта  $\sigma_1 = 0.01$  (См/м). Пусть локальное включение  $\Omega_2$  имеет форму шара радиуса  $R_{sp}$  (м), которое заполнено грунтом удельной электропроводности  $\sigma_2$  (См/м). Введем декартову систему координат с началом на плоской “дневной” поверхности, осью  $Oz$ , ортогонально направленной в глубь земли и проходящей через центр шара. Координаты центра шара –  $O_{sp}(0, 0, Z_{sp})$  (м). Поверхность шара опишем параметрически через азимутальный и зенитный углы. В экспериментах ниже, если это не оговорено особо,  $R_{sp} = 10$  (м),  $Z_{sp} = 28$  (м).

Функция Грина однородного изотропного полупространства известна –  $G(P, Q) = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \times \left( \frac{1}{R(P, Q)} + \frac{1}{R(P, Q^*)} \right)$ , где  $R(P, Q)$  – расстояние между точками  $P$  и  $Q$ ,  $Q^*$  – точка, симметричная точке  $Q$  относительно плоской границы “дневной” поверхности  $z = 0$ .

Разместим точечные источники постоянной электрического тока интенсивности  $I = 1$  (А) в точках  $A_1(150, 7, 0)$ ,  $A_2(-60, -60, 0)$ ,  $A_3(-150, -7, 0)$ ,  $A_4(60, 60, 0)$  (м). Здесь  $N_d = 4$ . Измерительные

датчики потенциала электрического тока будем задавать в узлах сеточной области на “дневной” поверхности равномерным делением отрезков изменения  $x$ - и  $y$ -координат  $[-12.5, 21.0]$  и  $[-12.5, 21.0]$  соответственно) на  $N_x$  и  $N_y$  частей.

Тогда  $N_d^x = N_x + 1$  и  $N_d^y = N_y + 1$  – есть количество формируемых узлов сетки по оси  $x$  и по оси  $y$ , и общее количество датчиков  $N_d$  будет равно  $N_d = N_d^x \times N_d^y$ .

Вид сверху на описанное расположение объектов представлен на рис. 2 (значения отметок и шкалы осей указаны в метрах).

Поверхность включения разбивалась на  $N_v = N_v^1 \times N_v^2$  сегментов, где  $N_v^1$  – количество делений отрезка изменения первого параметра (азимутального угла) в параметрическом описании поверхности, а  $N_v^2$  – количество делений отрезка изменения второго параметра (зенитного угла). В качестве формулы интегрирования использована кубатурная формула метода ячеек с вычислением функции в середине прямоугольника вариации параметров.

В табл. 1 представлены результаты вычислительного эксперимента, полученные при вариации числа разбиений поверхности шара  $N_v = N_v^1 \times N_v^2$ . В данном эксперименте: количество измерительных датчиков  $N_d = N_d^x \times N_d^y = 5 \times 5$  шт.; величина шума в “измеренном” потенциале – 0%; удельная электропроводность шара, при которой определялось решение прямой задачи  $\sigma_2 = 0.12345$  См/м; глубина залегания центра шара  $Z_{sp} = 28$  м. В столбце 3 показаны значения  $\Delta\sigma$ , вычисленные на шаге 6 алгоритма через длины векторов  $\Delta\sigma = \pm |\vec{a}|/|\vec{b}|$ , а в столбце 4 – приближенно вычисленное значение удельной электропроводности включения  $\sigma_2$  – как решение обратной задачи (см. шаг 7 алгоритма). По столбцам 5 и 6 таблицы видно, наблюдается всплеск абсолютной и относительной погрешностей результата вычислений в случае, если число сегментов разбиения поверхности шара  $N_v^1 \times N_v^2$  превышает количество датчиков  $N_d^x \times N_d^y$ . В этом случае матрица  $\widetilde{\mathbf{g}}_{dv} \widetilde{\mathbf{g}}_{dv}^{-1}$ , обращение которой требуется при вычислениях вектора  $\vec{a}$  (п. 4 Алгоритма), становится плохо обусловленной – ее число обусловленности, посчитанное с применением евклидовой нормы матриц, резко возрастает. Видно, что число обусловленности матрицы  $\widetilde{\mathbf{g}}_{dv}$ , которая используется при вычислении вектора  $\vec{a}$ , в случае  $N_d = N_v = 5 \times 5$ , меньше, чем у матрицы  $\widetilde{\mathbf{g}}_{dv}^{-1} \widetilde{\mathbf{g}}_{dv}$ , что с точки зрения устойчивости вычислений – лучше. Два этих

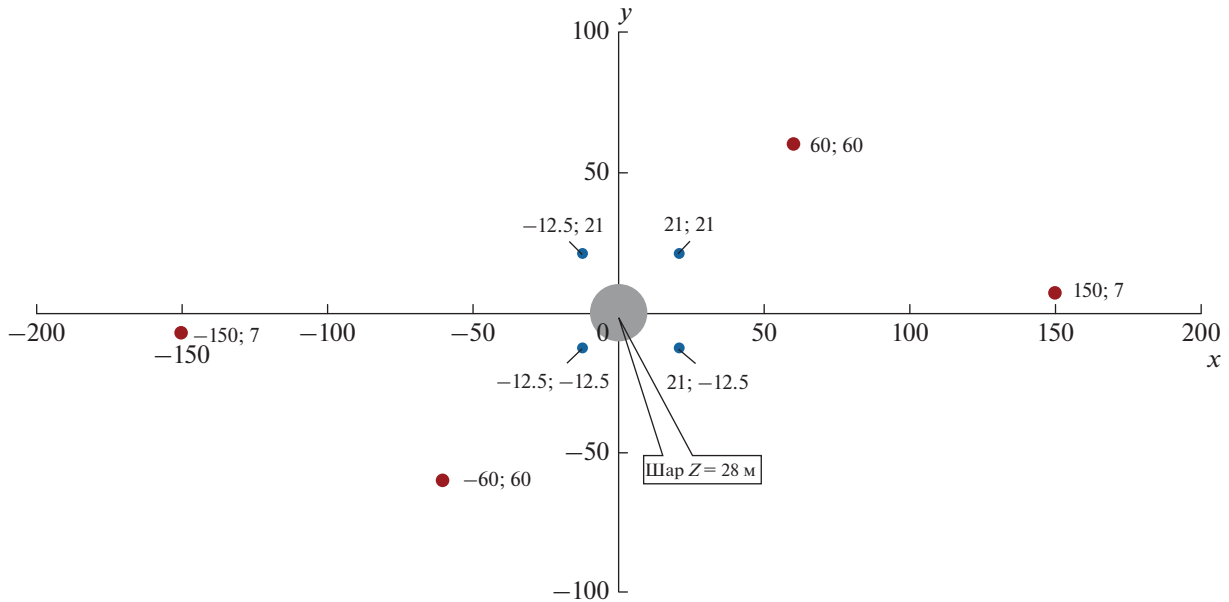


Рис. 2. Вид сверху.

факта дают основания в последующих вычислительных экспериментах брать число сегментов разбиения поверхности включения не более количества измерительных датчиков, а лучше — брать их совпадающими по количеству. Далее в вычислительных экспериментах эти количества брались равными друг другу.

В табл. 2 представлены данные расчетов при величине шума в “измеренном” потенциале — 0%; удельной электропроводности шара  $\sigma_2 = 0.12345$  См/м; глубина залегания центра шара  $Z_{sp} = 28$  м и при  $N_d^x \times N_d^y = N_v^1 \times N_v^2 = 5 \times 5$  шт.

Отметим, что при увеличении глубины залегания центра шара  $Z_{sp}$ , число обусловленности матрицы  $\widetilde{g}_{dv}$  растет. С ростом глубины залегания центра растет и расстояние между точками расчета градиента функции Грина. Это, в свою очередь, уменьшает различие строк матрицы  $\widetilde{g}_{dv}$ , увеличивая ее число обусловленности. Следуя этой

логике, с ростом расстояния между включением и системой измерительных датчиков, неустойчивость алгоритма будет возрастать.

Эксперименты выше показывают значимость выбора системы наблюдения для разрешимости рассматриваемой обратной задачи — с количеством датчиков-приемников, равным числу сегментов дискретизации поверхности в кубатурной формуле и с расположением этих датчиков относительно поверхности включения, обеспечивающим невысокое число обусловленности матрицы  $\widetilde{g}_{dv}$ .

В табл. 3 рассматривается эксперимент, имитирующий неточное определение границы аномалиеобразующего включения на 1-м этапе — этапе определения местоположения и границы включения. Предполагая, что радиус шара был определен неточно, будем решать обратную задачу определения его удельной электропроводности с неточным радиусом  $R_{sp}^{inv}$ . Вариация радиуса шара показана в столбце 1 таблицы.

Таблица 1. Вариация количества сегментов разбиения поверхности шара

Кол-во сегментов $N_v^1 \times N_v^2$ , шт.	Число обусловленности матрицы	$\Delta\sigma$ , См/м	$\tilde{\sigma}_2$ , См/м	$\Delta =  \sigma_2 - \tilde{\sigma}_2 $ , См/м	$\delta = \frac{\Delta}{\sigma_2} \times 100$ , %
1	2	3	4	5	6
3 × 3	2.36E + 05	-0.11345	0.12345	0.00000	0.0
4 × 4	3.29E + 10	-0.11345	0.12345	0.00000	0.0
5 × 5	1.09E + 07	-0.11345	0.12345	0.00000	0.0
6 × 6	9.68E + 18	-0.06283	0.07283	0.05062	41.0
7 × 7	4.32E + 18	-0.17375	0.18375	0.06030	48.8

**Таблица 2.** Вариация глубины залегания центра шара  $Z_{sp}$ 

$Z_{sp}$ , м	Число обусловленности матрицы	$\Delta\sigma$ , См/м	$\tilde{\sigma}_2$ , См/м	$\Delta =  \sigma_2 - \tilde{\sigma}_2 $ , См/м	$\delta = \frac{\Delta}{\sigma_2} \times 100, \%$
1	2	3	4	5	6
27.0	9.28E + 06	-0.11345	0.12345	0.00000	0.0
28.0	1.09E + 07	-0.11345	0.12345	0.00000	0.0
30.0	1.60E + 07	-0.11345	0.12345	0.00000	0.0
40.0	9.33E + 07	-0.11345	0.12345	0.00000	0.0
50.0	3.46E + 08	-0.11345	0.12345	0.00000	0.0

**Таблица 3.** Вариация радиуса шара при решении обратной задачи  $R_{sp}^{inv}$ 

$R_{sp}^{inv}$ , м	Число обусловленности матрицы	$\Delta\sigma$ , См/м	$\tilde{\sigma}_2$ , См/м	$\Delta =  \sigma_2 - \tilde{\sigma}_2 $ , См/м	$\delta = \frac{\Delta}{\sigma_2} \times 100, \%$
1	2	3	4	5	6
9.7	56.94	-0.09706	0.10706	0.01639	13.3
9.8	56.99	-0.10209	0.11209	0.01136	9.2
9.9	57.05	-0.10754	0.11754	0.00591	4.8
10.0	57.13	-0.11345	0.12345	0.00000	0.0
10.1	57.22	-0.11979	0.12979	0.00634	5.1
10.2	57.31	-0.12652	0.13652	0.01307	10.6
10.3	57.42	-0.13305	0.14305	0.01960	15.9

В этом эксперименте: величине шума в “измеренном” потенциале – 0%; исходная удельная электропроводность шара  $\sigma_2 = 0.12345$  См/м; глубина залегания центра шара  $Z_{sp} = 28$  м;  $N_d^x \times N_d^y = N_v^1 \times N_v^2 = 2 \times 2$  шт.; точечный источник тока один ( $N_a = 1$ ), имеет интенсивность  $I = 1$  (А) и расположен в точке  $A_1(10, 7, 0)$  (м). Отметим, что с увеличением радиуса шара возрастает число обусловленности матрицы  $\tilde{g}_{dv}$  (столбец 2), увеличивается найденное удельное электрическое сопротивление шара  $\tilde{\sigma}_2$  (столбец 3). Данные в столбцах 5 и 6 показывают, что с увеличением отклонения радиуса шара  $R_{sp}^{inv}$  от истинного (10.0 м.) растет и величина абсолютной (столбец 5) и относительной (столбец 6) погрешности вычислений.

В табл. 4 демонстрируется влияние уровня шума в “измеренных” данных. Шумовые помехи рассчитывались по равномерному закону распределения. Эксперимент проведен при следующих значениях параметров: исходная удельная электропроводность шара  $\sigma_2 = 0.12345$  См/м; радиус шара  $R_{sp} = 10$  (м); глубина залегания центра шара  $Z_{sp} = 28$  м;  $N_d^x \times N_d^y = N_v^1 \times N_v^2 = 2 \times 2$  шт.; точечный источник тока интенсивности  $I = 1$  (А) расположен в точке  $A_1(10, 7, 0)$  (м).

В столбцах 3–6 таблицы, в верхней строке, демонстрируются данные, полученные при использовании на шаге 6 алгоритма формулы вычисления  $\Delta\sigma = \frac{1}{N_v^0} \sum_{j=1}^{N_v} \frac{a_j}{a_j \neq 0, b_j \neq 0} b_j$ , а в нижней строке –

при использовании формулы  $\Delta\sigma = \pm |\vec{a}|/|\vec{b}|$ . Видно, что с ростом уровня шума точность определения  $\sigma_2$  падает. Сравнение строк демонстрирует, что применение при расчетах формулы  $\Delta\sigma = \pm |\vec{a}|/|\vec{b}|$  более предпочтительно. Значительные погрешности, возникающие при использовании первой формулы, связаны с делением на имевшиеся близкие к нулю (но не нулевые) значения компонент вектора  $\vec{b}$ . В нижней же строке, для второй формулы, при делении на длину вектора эти погрешности, как правило, отсутствуют (не отвергается все же возможный случай, когда и длина вектора  $\vec{b}$  тоже будет близка к нулю). Отметим, что в табл. 1–табл. 3 вычисления значений избыточной электропроводности  $\Delta\sigma$  были произведены на основе формулы  $\Delta\sigma = \pm |\vec{a}|/|\vec{b}|$ .

## ВЫВОДЫ

Произведенные в работе исследования демонстрируют возможность решения обратной задачи геоэлектрики – задачи определения



**Таблица 4.** Вариация радиуса шара при решении обратной задачи  $R_{sp}^{inv}$

$Shum$ , %	Число обусловленности матрицы	$\Delta\sigma$ , См/м	$\delta_2$ , См/м	$\Delta =  \sigma_2 - \delta_2 $ , См/м	$\delta = \frac{\Delta}{\sigma_2} \times 100$ , %
1	2	3	4	5	6
0.0	57.13	-0.11345	0.12345	0.00000	0.0
		-0.11345	0.12345	0.00000	0.0
1.0		-0.09438	0.10438	0.01907	15.5
		-0.10593	0.11593	0.00752	6.1
5.0		-0.63972	0.64972	0.52627	426.3
		-0.09317	0.10317	0.02028	16.4

удельной электрической проводимости локального включения по известным значениям аномального потенциала электрического поля в точках расположения измерительных датчиков – на основе граничных интегральных уравнений. Для разрешимости задачи (обратимости матриц  $\widetilde{g_{dv}^T}$  и  $\widetilde{g_{dv}}$ ) рекомендуется выбирать систему наблюдения, которая обеспечивала бы линейную независимость строк/столбцов матриц, и, следовательно, невырожденность матриц. Использование матрицы  $\widetilde{g_{dv}}$  предпочтительнее, чем матрицы  $\widetilde{g_{dv}^T}$ , т.к. умножение матрицы  $\widetilde{g_{dv}}$  на ее транспонированную  $\widetilde{g_{dv}^T}$ , в общем случае, делает обращение матрицы произведения  $\widetilde{g_{dv}^T} \widetilde{g_{dv}}$  процедурой менее устойчивой. Использование же матрицы  $\widetilde{g_{dv}}$  (не  $\widetilde{g_{dv}^T}$ ) требует, чтобы число сегментов, на которое разбивается поверхность включения для вычисления поверхностного интеграла путем применения кубатурной формулы, совпадало с количеством измерительных датчиков системы наблюдения.

Результаты вычислительных экспериментов показывают предпочтительность использования для вычисления избыточной электропроводности  $\Delta\sigma$  расчетной формулы через длины векторов –  $\Delta\sigma = \pm |\vec{a}|/|\vec{b}|$ .

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

*Александров П.Н., Кризский В.Н.* Решение линейной коэффициентной обратной задачи геофизики на основе интегральных уравнений // *Физика Земли.* 2022. № 2. С. 136–143. <https://doi.org/10.31857/S0002333722020016>

*Ахтямов А.М.* Теория идентификации краевых условий и ее приложения. М.: Физматлит. 2009. 272 с.

*Балк П.И., Долгаль А. С.* Монтажные методы решения обратных задач как неотъемлемый элемент аддитивных технологий интерпретации гравитационных аномалий // *Геофизический журн.* 2019. Т. 41. № 4. С. 40–47.

*Баюк И.О.* Междисциплинарный подход к определению эффективных физических свойств коллекторов // *Технологии сейсморазведки.* 2011. № 4. С. 75–82.

*Губатенко В.П.* Построение класса переменных электромагнитных полей на основе решения обратной задачи. Материалы всеросс. 5-й школы-семинара имени М.Н. Бердичевского и Л.Л. Ваньяна по электромагнитным зондированиям земли. ЭМЗ 2011. Книга 2. СПб: СПбГУ. 2011. 507 с.

*Дубиня Н.В., Тихоцкий С.А.* О методе решения обратной задачи восстановления напряженно-деформированного состояния массива горных пород по данным о естественной трещиноватости // *Физика Земли.* 2022. № 4. С. 113–134. <https://doi.org/10.31857/S0002333722040020>

*Ермолин Е.Ю., Ингеров О., Янкилевич А.А., Покровская Н.Н.* Особенности сигнала АМТ в мертвом частотном диапазоне на Чукотке (Дальний Восток России) // *Записки Горного института.* 2019. Т. 236. С. 125. <https://doi.org/10.31897/pmi.2019.2.125>

*Кабанихин С.И., Исаков К.Т.* Обратные и некорректные задачи для гиперболических уравнений. Алматы: Казахский нац. педагогический ун-т им. Абая. 2007. 330 с.

*Кремчев Э.А., Данилов А.С., Смирнов Ю.Д.* Состояние метрологического обеспечения систем мониторинга на базе беспилотных воздушных судов // *Записки Горного института.* 2019. Т. 235. С. 96. <https://doi.org/10.31897/pmi.2019.1.96>

*Кризский В.Н.* О способе вычисления физических полей в кусочно-анизотропных средах. Часть I. Стационарные поля // *Вестник БашГУ.* 2009. Т. 14. № 3. С. 726–730.

*Мартышко П.С., Бызов Д.Д., Мартышко М.П.* О решении структурной обратной задачи магниторазведки с учетом размагничивания для модели двухслойной среды // *Докл. РАН.* 2013. Т. 453(5). С. 558–562. <https://doi.org/10.7868/S086956521335017X>

*Монахов С.Ю.* Истокообразная аппроксимация в трехмерных обратных задачах электроразведки // *Недра Поволжья и Прикаспия.* 2014. Вып. 80. С. 35–45.

*Романов В.Г.* Обратные задачи математической физики. М.:Наука. 1980.

*Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука. 1979. 285 с.

*Шимелевич М.И. Родионов Е.А., Оборнев И.Е., Оборнев Е.А.* Нейросетевая 3D-инверсия полевых данных геоэлектрики с расчетом апостериорных оценок // *Физика Земли.* 2022. Т. 68. № 5. С. 3–13. <https://doi.org/10.31857/S0002333722050246>

- Шимелевич М.И., Оборнев Е.А., Оборнев И.Е., Родионов Е.А.* Численные методы оценки достоверности результатов интерпретации данных электромагнитных зондирования // Записки Горного института. 2015. Т. 212. С. 122–129.
- Юрко В.А.* Обратные спектральные задачи и их приложения. Саратов: изд-во Сарат. пед. ин-та. 2001. 499 с.
- Ягола А.Г., Ван Янфей, Степанова И.Э., Тутаренко В.Н.* Обратные задачи и методы их решения. Приложения к геофизике. М.: Лаборатория знаний. 2017. 219 с.
- Alekseev V.I.* Deep structure and geodynamic conditions of granitoid magmatism in the eastern Russia // J. Mining Institute. 2020. V. 243(3). P. 259–265.  
<https://doi.org/10.31897/PMI.2020.3.259>
- Beilina L., Klibanov M.V.* Approximate Global Convergence and Adaptivity for Coefficient Inverse Problems. New York, Dordrecht, Heidelberg, London: Springer. 2012. 407 p.
- Chen S., Ma L., Zhang X., Chen X., Xu. F.* Geochemical methods of identifying oil reservoir, gas reservoir and water layer // Tianranqi Gongye/Natural Gas Industry. 2001. V. 21(6). P. 39–41.
- Danilieva N.A., Daniliev S.M., Bolshakova N.V.* Allocation of a deep-lying brine aquifer in the rocks of a chemogenic section based on the data of geophysical well logging and 2D-seismic exploration // J. Mining Institute. 2021. V. 250(4). P. 501–511.  
<https://doi.org/10.31897/PMI.2021.4.3>
- Gospodarikov A.P., Zatselin M.A., Vykhotsev Y.N., Nguen C.T.* Numerical modeling of seismic wave impact on enclosing rock mass surrounding underground structures // Mining Informational and Analytical Bulletin. 2022. V. 7. P. 116–130.  
[https://doi.org/10.25018/0236\\_1493\\_2022\\_7\\_0\\_115](https://doi.org/10.25018/0236_1493_2022_7_0_115)
- Gusev E.A., Krylov A.A., Urvantsev D.M., Goremykin Y.V., Krinitsky P.I.* Geological structure of the northern part of the kara shelf near the severnaya zemlya archipelago according to recent studies // J. Mining Institute. 2020. V. 245(1). P. 591–598.  
<https://doi.org/10.31897/PMI.2020.5.1>
- Li Y.G., Oldenburg D.W.* 3-D inversion of magnetic data, Geophysics. 1996. № 61. P. 394–408.
- Lukyanenko D.V., Yagola A.G.* Some methods for solving of 3d inverse problem of magnetometry // Eurasian J. Mathematical and Computer Applications. 2016. P. 14–44.
- Mingaleva T., Gorelik G., Egorov A., Gulin V.* Correction of depth-velocity models by gravity prospecting for hard-to-reach areas of the shelf zone // Mining Informational and Analytical Bulletin. 2022. V. (10-1). P. 77–86.  
[https://doi.org/10.25018/0236\\_1493\\_2022\\_101\\_0\\_77](https://doi.org/10.25018/0236_1493_2022_101_0_77)
- Molodtsov D.M., Troyan V.N., Roslov Yu.V., Zerilli A.* Joint inversion of seismic traveltimes and magnetotelluric data with a directed structural constraint // Geophysical Prospecting. 2013. V. 61(6). P. 1218–1228.
- Movchan I.B., Yakovleva A.A., Frid V., Movchan A.B., Shaygallyamova Z.I.* Modelling of seismic assessment for large geological systems // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2022. V. 380(2231).  
<https://doi.org/10.1098/rsta.2021.0393>
- Nguyen H.T., Kreinovich V., Wu B., Xiang G.* (2012). Applications to Geophysics: Inverse Problem. Computing Statistics under Interval and Fuzzy Uncertainty. Studies in Computational Intelligence. V. 393. Berlin, Heidelberg: Springer.  
[https://doi.org/10.1007/978-3-642-24905-1\\_39](https://doi.org/10.1007/978-3-642-24905-1_39)
- Parson L.* Marine Geophysics // Marine Geology. 2000. V. 167(3–4). P. 425.  
[https://doi.org/10.1016/S0025-3227\(00\)00033-5](https://doi.org/10.1016/S0025-3227(00)00033-5)
- Philp P., Crisp P.T.* Surface geochemical methods used for oil and gas prospecting — a review // J. Geochemical Exploration. 1982. V. 17(1). P. 1–34.  
[https://doi.org/10.1016/0375-6742\(82\)90017-6](https://doi.org/10.1016/0375-6742(82)90017-6)
- Putikov O., Kholmyanski M., Ivanov G., Senchina N.* Application of geoelectrochemical method for exploration of petroleum fields on the arctic shelf // Chemie Der Erde. 2020. V. 80(3).  
<https://doi.org/10.1016/j.geoch.2019.02.001>
- Richter M.* Inverse Problems: Basics, Theory and Applications in Geophysics. Birkhäuser Cham. 2021. 273 p.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-030-59317-9>
- Samylovskaya E., Makhovikov A., Lutonin A., Medvedev D., Kudryavtseva R.* Digital technologies in arctic oil and gas resources extraction: Global trends and russian experience // Resources. 2022. V. 11(3).  
<https://doi.org/10.3390/resources11030029>
- Saunders J.H. et al.* Constrained resistivity inversion using seismic data // Geophysical J. International. 2005. V. 160. № 3. P. 785–796.
- Scales J.A., Tenorio L.* Prior information and uncertainty in inverse problems // Geophysics. 2001. V. 66. № 2. P. 389–397.
- Sen M.K.* Seismic Inversion. Society of Petroleum Engineers. 2006. 120 p.
- Tarantola A.* Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation. SIAM. Philadelphia. 2005.

## On Determination of the Electrical Conductivity of a Local Inclusion of Piecewise-Constant Isotropic Medium

V. N. Krizskii<sup>a, \*</sup> and P. N. Aleksandrov<sup>b, \*\*</sup>

<sup>a</sup> St. Petersburg Mining University, St. Petersburg, 199106 Russia

<sup>b</sup> Schmidt Joint Institute of Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences, Moscow, 123242 Russia

\*E-mail: krizskiy\_vn@pers.spmi.ru

\*\*E-mail: alexandr@igemi.troitsk.ru

**Abstract**—This work is a continuation of the authors' research on solving inverse problems of mathematical geophysics in a linear formulation. Unlike previous works, where the solution was built on the basis of volumetric integral equations, boundary integral representations and emerging boundary integral equations are used here to solve the inverse coefficient problem of geoelectrics to find the constant electrical conductivity of a local isotropic inclusion, located in a piecewise-constant electrical conductivity isotropic enclosing medium.

**Keywords:** inverse coefficient problem of geoelectrics, piecewise-constant isotropic media, boundary integral equations