

УДК 537.612

## СТРУКТУРА ОБЛАСТЕЙ ВЫСЫПАНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ ВЫСОКОЙ ЭНЕРГИИ, ИНЖЕКТИРУЕМЫХ ТОЧЕЧНЫМ ИСТОЧНИКОМ В ГЕОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ, ПРЕДСТАВЛЕННОЕ ПЕРВЫМИ ГАРМОНИКАМИ РЯДА ГАУССА

© 2020 г. Е. К. Колесников<sup>1, \*</sup>, Г. Н. Ключников<sup>2, \*\*</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет,  
г. Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup>Петербургский институт ядерной физики им. Б.П. Константинова  
Национального исследовательского центра "Курчатовский институт" (ПИЯФ),  
г. Гатчина, Россия

\*e-mail: e.kolesnikov@spbu.ru

\*\*e-mail: g.klyushnikov@spbu.ru

Поступила в редакцию 16.09.2019 г.

После доработки 20.09.2019 г.

Принята к публикации 23.01.2020 г.

Построены области “высыпания” на Землю высокоэнергетических электронов, инжектируемых в ОКП из точечного источника на геостационарной орбите. Геомагнитное поле моделируется суперпозицией первых четырех сферических гармоник ряда Гаусса. Проведено сравнение указанных областей с областями высыпания, построенными ранее для дипольной модели геомагнитного поля. Рассмотрен вопрос о возможном влиянии на конфигурацию областей высыпания поля, создаваемого магнитосферными токами.

DOI: 10.31857/S0016794020030098

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы в связи с проблемой радиационного загрязнения ближнего космоса заряженными частицами высоких энергий техногенного происхождения большое значение приобрели задачи динамики в геомагнитном поле заряженных частиц высокой энергии, инжектируемых в околоземное космическое пространство (ОКП) на конечном расстоянии от Земли. Источниками указанных частиц, могут являться, в частности, вторичные частицы высоких энергий, генерируемые в материале активных и пассивных орбитальных объектов частицами первичного космического излучения. Потенциальными внутренними источниками частиц высокой энергии являются и космические ускорители высоких энергий, концепции которых разрабатывались как в нашей стране [Панасюк, 1995], так и за рубежом [Varley et al., 1990].

В настоящей работе продолжены исследования конфигурации “областей высыпания” на поверхность Земли электронов высоких энергий, инжектируемых в околоземное космическое пространство (ОКП) точечным источником, начатые в работе [Колесников, 2002]. В отличие от работы [Колесников, 2002], в которой для описания движения электронов в ОКП использовалась про-

стейшая дипольная модель геомагнитного поля, в настоящей работе при построении областей высыпания геомагнитное поле моделируется первыми четырьмя гармониками ряда Гаусса.

### 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

Рассмотрим точечный источник высокоэнергетических электронов, положение которого задается геоцентрическим расстоянием  $r$ , дополнением до широты  $\theta$  и долготой  $\phi$  в сферической системе координат с началом в центре Земли и полярной осью, совпадающей с географической осью Земли. Как и в [Колесников, 2002], будем определять направления инъекции  $\mathbf{j}$ , для которых соответствующая траектория электрона пересекает поверхность Земли, а также “области высыпания”, образованные точками пересечения указанных траекторий электронов с поверхностью Земли. Высотой плотных слоев атмосферы, где становится существенным взаимодействие высокоэнергетических электронов с ядрами атомов атмосферы, будем пренебрегать.

**Таблица 1.** Значения коэффициентов  $g_n^m$  и  $h_n^m$

$n$	$m$	$g_n^m, 10^{-4}$ Гс	$h_n^m, 10^{-4}$ Гс
1	0	-2944.2	0
	1	-150.1	479.7
2	0	-244.5	0
	1	301.3	-284.6
	2	167.7	-64.2
3	0	135.1	0
	1	-235.2	-11.5
	2	122.6	24.5
	3	58.2	-53.8
4	0	90.8	0
	1	81.4	28.3
	2	12.0	-18.9
	3	-33.5	18.1
	4	7.0	-33.0

Для решения поставленной задачи нам потребуются уравнение динамики одиночного электрона в магнитном поле Земли. Запишем это уравнение в виде

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{e}{m_0 \gamma c} \mathbf{v} \times \nabla V, \tag{1}$$

где  $V$  – скалярный потенциал геомагнитного поля,  $\mathbf{v}$  – скорость электрона,  $m_0$  и  $e$  – соответственно масса покоя и заряд электрона,  $\gamma = \sqrt{1 - v^2/c^2}$  – лоренц-фактор,  $c$  – скорость света.

Представим потенциал геомагнитного поля  $V$  в виде ряда Гаусса:

$$V = R_E \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R_E}{r}\right)^{n+1} \times \sum_{m=0}^n (g_n^m \cos m\varphi + h_n^m \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta), \tag{2}$$

где  $R_E$  – радиус Земли,  $g_n^m$  и  $h_n^m$  – коэффициенты, определяемые по данным магнитных измерений, значения которых для эпохи 1965 г. [Акасофу, Чепмен, 1974] приведены в табл. 1,

$$P_n^m(\cos \theta) = \begin{cases} \left[ \frac{2(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2} P_{n,m}(\cos \theta), & 1 \leq m \leq n, \\ P_{n,m}(\cos \theta), & m = 0 \end{cases}$$

– многочлены Шмидта.

Многочлены Шмидта  $P_n^m$  выражаются, в свою очередь, через присоединенные многочлены Лежандра  $P_{n,m}$  (см. табл. 2):

$$P_{n,m}(z) = (1-z^2)^{m/2} \frac{d^m}{dz^m} \left( \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2-1)^n \right).$$

Система (1) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{e}{m_0 \gamma c} \mathbf{v} \times \nabla V. \end{cases} \tag{3}$$

Из (2) следуют выражения для компонент вектора  $\mathbf{B} = -\nabla V$ :

$$\begin{aligned} B_r &= -R_E \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R_E}{r}\right)^{n+2} \times \\ &\times \sum_{m=0}^n (g_n^m \cos m\varphi + h_n^m \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta), \\ B_\theta &= -R_E \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R_E}{r}\right)^{n+2} \times \\ &\times \sum_{m=0}^n (g_n^m \cos m\varphi + h_n^m \sin m\varphi) \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta}, \\ B_\varphi &= R_E \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R_E}{r}\right)^{n+2} \times \\ &\times \sum_{m=0}^n (mg_n^m \sin m\varphi - mh_n^m \cos m\varphi) \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta}. \end{aligned} \tag{4}$$

Систему (3) удобно представить в следующем удобном для численного интегрирования виде:

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = v_r, \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{v_\theta}{r}, \\ \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v_\varphi}{r \sin \theta}, \\ \frac{dv_r}{dt} = \frac{e\omega_r}{mc} + \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r}, \\ \frac{dv_\theta}{dt} = \frac{e\omega_\theta}{mc} - \frac{v_r v_\theta}{r} + \frac{v_\varphi^2 \text{ctg} \theta}{r}, \\ \frac{dv_\varphi}{dt} = \frac{e\omega_\varphi}{mc} - \frac{v_r v_\varphi}{r} + \frac{v_\theta v_\varphi \text{ctg} \theta}{r}, \end{cases} \tag{5}$$

где  $\omega_r = v_\theta B_\varphi - v_\varphi B_\theta$ ,  $\omega_\theta = B_r v_\varphi - v_r B_\varphi$ ,  $\omega_\varphi = v_r B_\theta - v_\theta B_r$ .

Положим  $B_0 = M/R_E^3$  ( $M = \sqrt{(g_1^0)^2 + (g_1^1)^2 + (h_1^1)^2} R_E^3$  – модуль магнитного момента Земли). Перейдем в (5) к безразмерным переменным

$$\begin{aligned} b_r &= \frac{B_r}{B_0}, \quad b_\theta = \frac{B_\theta}{B_0}, \quad b_\varphi = \frac{B_\varphi}{B_0}, \quad u_r = \frac{v_r}{c}, \\ u_\theta &= \frac{v_\theta}{c}, \quad u_\varphi = \frac{v_\varphi}{c}, \quad \rho = \frac{r}{R_E}, \quad \tau = \frac{ct}{R_E}. \end{aligned} \tag{6}$$

В переменных (6) система (5) принимает вид

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{d\tau} = u_r, \\ \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{u_\theta}{\rho}, \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{u_\varphi}{\rho \sin \theta}, \\ \frac{du_r}{d\tau} = K\Omega_r + \frac{u_\theta^2 + u_\varphi^2}{\rho}, \\ \frac{du_\theta}{d\tau} = K\Omega_\theta - \frac{u_r u_\theta}{\rho} + \frac{u_\varphi^2 \operatorname{ctg} \theta}{\rho}, \\ \frac{du_\varphi}{d\tau} = K\Omega_\varphi - \frac{u_r u_\varphi}{\rho} + \frac{u_\theta u_\varphi \operatorname{ctg} \theta}{\rho}. \end{cases} \quad (7)$$

где  $\Omega_r = u_\theta b_\varphi - u_\varphi b_\theta$ ,  $\Omega_\theta = u_\varphi b_r - u_r b_\varphi$ ,  $\Omega_\varphi = u_r b_\theta - u_\theta b_r$ ,  $K = \operatorname{sign}(e) C_{st} / R_E^2$  – безразмерный коэффициент,  $C_{st} = \sqrt{\frac{eM}{mvc}} = 1.11 \times 10^8 / E_k$  см-штермеровская единица длины,  $E_k$  – кинетическая энергия электрона в ГэВ.

Пусть электроны, инжектируемые в околоземное космическое пространство из точечного источника, имеют фиксированное значение кинетической энергии  $E_k$ . Направление инжекции  $\mathbf{j}$  задается углом  $i$  с направлением местной вертикали и углом  $q$  между проекцией  $\mathbf{j}$  на плоскость местного горизонта и местным азимутальным направлением. Выбор углов  $i$  и  $q$  осуществляется случайным образом в серии из 100 000 испытаний с равномерным законом распределения в заданных промежутках  $[i_{\min}, i_{\max}]$ ,  $[q_{\min}, q_{\max}]$ . Для каждого варианта выборки начальных значений углов  $i$  и  $q$  производится численное интегрирование уравнений движения (7) разностным методом Рунге-Кутты-Мерсона четвертого порядка с автоматическим выбором длины шага. Расчет траектории проводится до тех пор, пока не оказывается выполненным одно из следующих условий:

1) траектория электрона пересекает сферу радиусом  $R_E$  в точке с географическими координатами  $\theta$  и  $\varphi$ , генерируя на поверхности Земли соответствующую точку области высыпания;

2) полная длина расчетного отрезка траектории превышает установленное предельное значение  $L_{\max} = 20R_E$ ; 3) электрон удаляется на геоцентрическое расстояние, превышающее критическое значение  $r^* = 10R_E$ , с достижением которого дальнейшее движение электрона сопровождается неограниченным монотонным ростом его радиальной координаты.

**Таблица 2.** Многочлены Лежандра  $P_{nm}$  и их производные  $P'_{nm}$

$n$	$m$	$P_{nm}(\cos \theta)$	$P'_{nm}(\cos \theta)$
1	0	$\cos \theta$	$-\sin \theta$
1	1	$\sin \theta$	$\cos \theta$
2	0	$\frac{3 \cos 2\theta + 1}{4}$	$-\frac{3 \sin 2\theta}{2}$
2	1	$\frac{3 \sin 2\theta}{2}$	$3 \cos 2\theta$
2	2	$\frac{3(1 - \cos 2\theta)}{2}$	$3 \sin 2\theta$
3	0	$\frac{5 \cos 3\theta + 3 \cos \theta}{8}$	$-\frac{3(5 \sin 3\theta + \sin \theta)}{8}$
3	1	$\frac{3(\sin \theta + 5 \sin 3\theta)}{8}$	$\frac{3(\cos \theta + 15 \cos 3\theta)}{8}$
3	2	$\frac{15(\cos \theta - \cos 3\theta)}{4}$	$\frac{15(3 \sin 3\theta - \sin \theta)}{4}$
3	3	$\frac{15(3 \sin \theta - \sin 3\theta)}{4}$	$\frac{45(\cos \theta - \cos 3\theta)}{4}$
4	0	$\frac{35 \cos 4\theta + 20 \cos 2\theta + 9}{64}$	$-\frac{5(7 \sin 4\theta + 2 \sin 2\theta)}{16}$
4	1	$\frac{5(2 \sin 2\theta + 7 \sin 4\theta)}{16}$	$\frac{5(\cos 2\theta + 7 \cos 4\theta)}{4}$
4	2	$\frac{15(3 + 4 \cos 2\theta - 7 \cos 4\theta)}{16}$	$\frac{15(7 \sin 4\theta - 2 \sin 2\theta)}{4}$
4	3	$\frac{105(2 \sin 2\theta - \sin 4\theta)}{8}$	$\frac{105(\cos 2\theta - \cos 4\theta)}{2}$
4	4	$\frac{105(3 - 4 \cos 2\theta + \cos 4\theta)}{8}$	$\frac{105(2 \sin 2\theta - \sin 4\theta)}{2}$

### 3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

С использованием описанного алгоритма были построены области высыпания на земную поверхность электронов с энергиями 15, 30 и 60 ГэВ в случае нахождения инжектора на геостационарной орбите в точке с нулевой географической широтой и географической долготой  $21^\circ$ . Расчеты проведены для случаев представления геомагнитного поля первой (дипольной) гармоникой и первыми четырьмя гармониками ряда Гаусса. Результаты расчетов представлены на рис. 1–3.

На рисунке 1 показаны области высыпания электронов с энергией  $E_k = 15$  ГэВ для  $n = 1$  (рис. 1а) и  $n = 4$  (рис. 1б). Как видно на рис. 1а, область высыпания для  $n = 1$  представляет собой участок земной поверхности, локализованный в диапазоне широт  $\lambda \in [-49^\circ, 59^\circ]$  и долгот  $\varphi \in [18^\circ, 360^\circ]$ . В случае аппроксимации геомагнитного поля первыми четырьмя гармониками ряда Гаусса

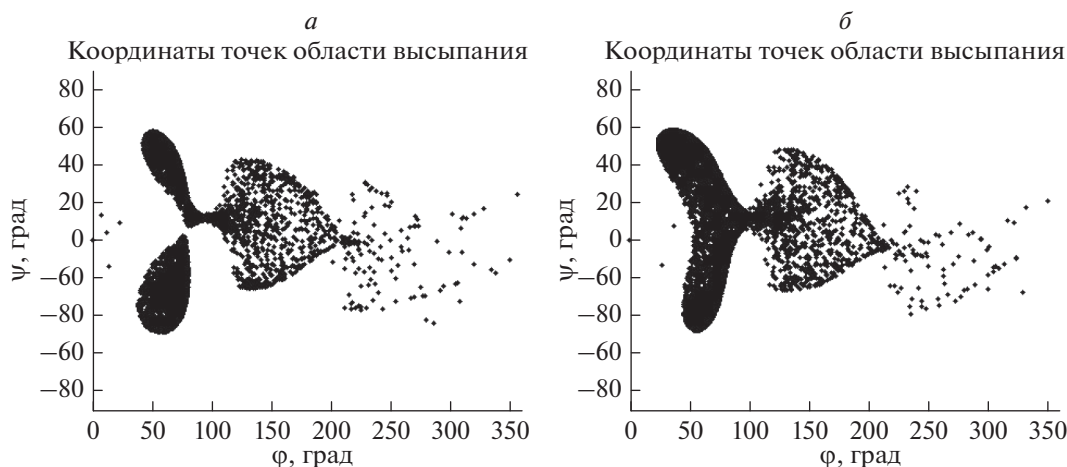


Рис. 1. Области высыпания электронов с энергией 15 ГэВ: (а) – вид областей для  $n = 4$ , (б) – вид областей для  $n = 1$ .

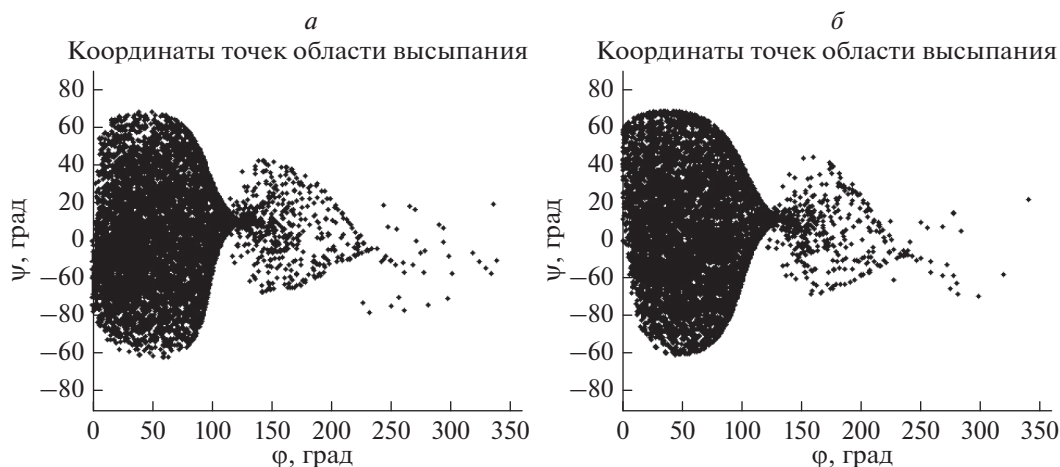


Рис. 2. Области высыпания электронов с энергией 30 ГэВ: (а) – вид областей для  $n = 4$ , (б) – вид областей для  $n = 1$ .

(рис. 1б), области высыпания локализованы в диапазоне широт  $\lambda \in [-53^\circ, 57^\circ]$  и долгот  $\varphi \in [33^\circ, 349^\circ]$ .

На рисунке 2 представлены области высыпания для  $E_k = 30$  ГэВ. Как видно на рис. 2а, при  $n = 1$  для электронов рассматриваемой энергии область высыпания оказывается локализованной в диапазонах широт  $[-61^\circ, 67^\circ]$  и долгот  $[-6^\circ, 350^\circ]$ . При аппроксимации геомагнитного поля первыми четырьмя сферическими гармониками область высыпания локализована в близких диапазонах широт  $[-67^\circ, 79^\circ]$  и долгот  $[-6^\circ, 346^\circ]$  (рис. 2б).

На рисунке 3 представлены области высыпания для  $E_k = 60$  ГэВ. Для  $n = 1$  (рис. 3а) область высыпания локализована в диапазонах широт  $[-72^\circ, 79^\circ]$  и долгот  $[-20^\circ, 203^\circ]$ . В случае же  $n = 4$  область высыпания находится на широтах  $\lambda \in [-67^\circ, 76^\circ]$ , и долготах  $\varphi \in [-20^\circ, 232^\circ]$ .

На рисунках 1–3 видно, что конфигурации областей высыпания электронов при  $n = 1$  и  $n = 4$  качественно являются весьма близкими. Основные отличия указанных областей состоят в следующем. С переходом от случая  $n = 1$  к случаю  $n = 4$  происходит незначительное изменение формы областей высыпания, а также поворот на малый угол против часовой стрелки. При  $n = 4$  в строении областей высыпания прослеживается четко выраженная асимметрия (отделение “верхней” компоненты при  $E_k = 15$  ГэВ, увеличение “нижней” части области при  $E_k = 30$  ГэВ).

Имея ввиду, что на высоте инжекции существенный вклад в геомагнитное поле может давать поле магнитосферных токов, для выяснения влияния этого поля на конфигурацию областей высыпания мы провели расчеты областей высыпания в поле, аппроксимированном эмпирической моделью Цыганенко-87 для эпохи 1965 г. [Цыга-



Рис. 3. Области высыпания электронов с энергией 60 ГэВ: (а) – вид областей для  $n = 4$ , (б) – вид областей для  $n = 1$ .

ненко и др., 1987], учитывающей вклад в геомагнитное поле поля внешних источников для различных значений глобального планетарного индекса геомагнитной активности  $K_p$ . Результаты расчетов показали, что даже при максимальном значении геомагнитного индекса  $K_p = 5$  учет поля внешних источников в рассматриваемой задаче не оказывает существенного влияния на конфигурацию областей высыпания электронов с рассматриваемыми высокими значениями энергии 15–60 ГэВ. Физическое объяснение этому явлению состоит в том, что на больших расстояниях от Земли (порядка радиуса геостационарной орбиты), на которых существенным является вклад в геомагнитное поле поля внешних источников, полное геомагнитное поле является слабым и практически не оказывает влияния на траектории инжектируемых электронов высокой энергии. На этих расстояниях, как показывают данные численного моделирования, траектории являются практически прямолинейными. Заметное воздействие геомагнитного поля на траектории начинается с расстояний, значительно меньших радиуса геостационарной орбиты (порядка 2–3 радиусов Земли), на которых основной вклад в геомагнитное поле дает поле внутренних источников.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Установлено, что конфигурации областей высыпания на поверхность Земли электронов высокой энергии, инжектируемых в геомагнитное поле из точечного источника, расположенного на геостационарной орбите, для дипольной модели геомагнитного поля и для геомагнитного поля, представленного суммой первых четырех сферических гармоник ряда Гаусса, являются близкими. Эффект высших гармоник проявляется в опреде-

ленном изменении формы областей высыпания, а также в усилении их асимметрии относительно экватора, связанном, в частности, с их поворотом на малый угол против часовой стрелки. Кроме того, переход от дипольной модели геомагнитного поля к его аппроксимации первыми гармониками ряда Гаусса приводит к определенному изменению диапазонов широт и долгот, в которых локализованы области высыпания.

С использованием эмпирической модели геомагнитного поля Цыганенко-87 [Цыганенко и др., 1987], учитывающей вклад в геомагнитное поле поля внешних источников, показано, что поле внешних источников в рассматриваемой задаче не оказывает существенного влияния на конфигурацию областей высыпания электронов с рассматриваемыми высокими значениями энергии 15–60 ГэВ.

#### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-01-00657, а также при технической поддержке Ресурсного Центра “Вычислительный центр СПбГУ”.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- *Акасофу С.И., Чепмен С.* Солнечно-земная физика. Ч. 1. М.: Мир, 382 с. 1974.
- *Колесников Е.К.* Структура областей высыпания электронов высокой энергии, инжектируемых в дипольное магнитное поле Земли точечным источником // Геомагнетизм и аэронавигация. Т. 42. № 5. С. 624–630. 2002.
- *Колесников Е.К.* Влияние авроральных потоков электронов на динамику техногенных микрочастиц в полярной ионосфере // Геомагнетизм и аэронавигация. Т. 41. № 2. С. 238–242. 2001.

- *Панасюк В.С.* Ускорители заряженных частиц из “трюль-проекта” – возможные инструменты для космических исследований // Космич. исслед. Т. 33. № 5. С. 468–473. 1995.
- *Сергеев В.А., Цыганенко Н.А.* Магнитосфера Земли. М.: Наука. 174 с. 1980.
- *Цыганенко Н.А., Усманов А.В., Папиташвили В.О. и др.* Пакет программ для расчётов геомагнитного поля и связанных с ним координатных систем. М.: Межведомственный Геофизический Комитет при Президиуме АН СССР. 58 с. 1987.
- *Lemaitre G., Vallatra M.S.* On Compton’s latitude effect of cosmic radiation // Phys. Rev. V. 43. № 2. P. 87–91. 1933.
- *Stormer C.* The Polar Aurora. London-New-York: Oxford University press. 437 p. 1955.
- *Vallatra M.S.* On the allowed cone of cosmic radiation // Phys. Rev. V. 50. № 6. P. 493–504. 1936.
- *Varley R., Hohlfeld R.G., Sansri G., Lovelace G., Cercignani C.* Particle accelerators in high earth orbit // Nuovo Cim. B. V. 105. № 1. P. 23–29. 1990.