

УДК 523.94,523.9-1/-8

## ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЕРЕНОСА ЭНЕРГИИ АЛЬВЕНОВСКИХ ВОЛН В АТМОСФЕРЕ СОЛНЦА

© 2020 г. Ю. Т. Цап<sup>1</sup>, \*, А. В. Степанов<sup>2</sup>, \*\*, Ю. Г. Копылова<sup>2</sup>, \*\*\*, О. В. Ханейчук<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Крымская астрофизическая обсерватория РАН, пгт. Научный, Россия

<sup>2</sup>Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН, г. Санкт-Петербург, Россия

<sup>3</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия

\*e-mail: yur\_crao@mail.ru

\*\*e-mail: stepanov@gaoran.ru

\*\*\*e-mail: yul@gaoran.ru

Поступила в редакцию 19.02.2019 г.

После доработки 13.01.2020 г.

Принята к публикации 23.01.2020 г.

В условиях изотермической атмосферы с учетом амплитудно-фазовых соотношений рассмотрены особенности распространения линейных альвеновских волн с периодами 10–200 с из фотосферы в хромосферу Солнца. Установлено, что с увеличением высоты амплитуда возмущения скорости волн растет, а возмущения магнитного поля – падает, тогда как разность фаз между возмущениями стремится к  $\pi/2$ . Так называемые точки поворота не могут адекватно характеризовать поток энергии альвеновских волн. Этот вывод свидетельствует о необходимости пересмотра результатов, следующих из анализа осцилляционных теорем. Показано, что в пренебрежении диссипативными процессами эффективность переноса волновой энергии с ростом частоты альвеновских мод увеличивается.

DOI: 10.31857/S001679402004015X

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время считается, что за высокую температуру короны Солнца могут быть ответственны магнитогиродинамические (МГД) волны, генерируемые в фотосфере Солнца конвективными движениями плазмы [см., например, обзор Sakurai, 2017]. Гипотеза об определяющем вкладе мелкомасштабных процессов вспышечно-го энерговыделения в нагрев корональных петель также остается популярной [Klimchuk, 2015]. Однако этот подход по мере совершенствования наблюдательных возможностей вызывает все больше вопросов [Aschwanden et al., 2018].

Альвеновские волны являются наиболее вероятными МГД-модами, ответственными за нагрев солнечной атмосферы [Srivastava et al., 2017; Soler et al., 2019]. Между тем особенности их распространения хорошо изучены лишь для наиболее простых моделей атмосфер. Например, в случае неизотермической среды требуются довольно сложные численные расчеты [Murawski and Musielak, 2010; Wójcik et al., 2017]. При этом интерпретация результатов и соответственно тестирование программ сталкивается с трудностями. В связи с этим Musielak et al. [2006] разработали аналитический метод, основанный на анализе осцилляци-

онных теорем [Мышкис, 1971; Пушкарь, 2007], благодаря применению которых можно находить так называемые точки поворота (turning points), характеризующие, по мнению авторов, частоту отсечки. Однако такой подход, как станет ясно из дальнейшего изложения, представляется не до конца обоснованным. Это связано как с недостаточно корректной трактовкой осцилляционных теорем, так и со слишком упрощенными представлениями о физической сущности переноса волновой энергии квазипериодическими возмущениями в стратифицированной атмосфере. Обсуждению этих аспектов и посвящена настоящая работа.

### 2. КРИТЕРИЙ КНЕЗЕРА И ПЕРЕНОС ЭНЕРГИИ АЛЬВЕНОВСКИМИ ВОЛНАМИ

Основная идея методики, разработанной Musielak et al. [2006] (см. также Schmitz and Fleck [1998]) заключается в сведении с помощью замены переменных волнового уравнения к частному случаю уравнения Клейна–Гордона и последующим исследованием его свойств на основе так называемых осцилляционных теорем. Прежде чем приступить к изучению особенностей распро-

странения линейных альвеновских волн рассмотрим эти теоремы и их следствия более детально.

Из теоремы сравнения [Мышкис, 1971; Пушкар, 2007] вытекает следующее важное следствие. Если функция  $u(x)$  есть решение уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + Q(x)y = 0, \quad (1)$$

причем  $Q(x) < 0$  на интервале  $(a, b)$ , где  $a$  и  $b$  — действительные числа, таком что  $-\infty < a \leq b < +\infty$ , то  $u(x)$  имеет не более одного нуля (решение неосциллирующего типа). Если же  $u(x)$  есть решение уравнения (1) на *полубесконечном* интервале  $[x_0, +\infty)$  и  $Q(x) > a^2 > 0$ , то решение имеет бесконечно много нулей (решение осциллирующего типа).

Требование положительной или отрицательной определенности функции  $Q(x)$  является слишком сильным. Вследствие этого для разделения решений на осциллирующие и неосциллирующие разумнее обратиться к так называемой теореме (критерию) Кнезера [Пушкар, 2007], который формулируется следующим образом. Если в дифференциальном уравнении (1) на *полубесконечном* интервале  $[x_0, +\infty)$  ( $x_0 > 0$ ) коэффициент  $Q(x) < 1/4x^2$  то его решение  $u(x)$  имеет не более одного нуля (не осциллирует). Если  $Q(x) > (1 + \varepsilon)/4x^2$ , где  $\varepsilon > 0$ , то  $u(x)$  содержит бесконечно много нулей (осциллирует).

Критерий Кнезера следует из свойств решения дифференциального уравнения Эйлера

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{C}{4x^2} y = 0,$$

которое имеет периодические решения при  $C > 1$  и соответственно аperiodические при  $C < 1$  [Мышкис, 1971]. Отметим, в общем случае вместо уравнения Эйлера можно использовать любое другое уравнение, которое содержит как осциллирующие, так и неосциллирующие решения.

Musielak et al. [2006] с помощью уравнения (1) и критерия Кнезера, проигнорировав ограничения, накладываемые на  $x$ , сформулировали “теорему” о точках поворота  $x_m$ , удовлетворяющих равенству:  $Q(x_m) = 1/4x_m^2$ . По мнению авторов, точки  $x_m$  позволяют отделить осциллирующие решения от неосциллирующих (монотонных). При этом частоту, соответствующую  $x_m$  на определенной высоте, можно рассматривать как аналог акустической частоты отсечки Лэмба, характеризующей переход от распространяющихся волн к нераспространяющимся. Следовательно, в стратифицированной атмосфере точки поворота будут соответствовать высотам, начиная с которых перенос волновой энергии на заданной ча-

стоте становится малоэффективным (см. также Routh et al. [2007]). Учитывая следствия из теоремы сравнения, Perera et al. [2015] определили также переходные точки  $x_{tr}$  (transition points), описывающие переход от осциллирующих решений уравнения (1) при  $Q(x) > 0$  к монотонным при  $Q(x) < 0$ . По мнению авторов, они также могут быть использованы для характеристики переноса волновой энергии по аналогии с точками поворота.

Изложенный выше подход, на наш взгляд, нельзя считать обоснованным. Дело в том, что критерий Кнезера должен выполняться на *полубесконечных* интервалах  $[x_0, +\infty)$ , поэтому отсутствие нулей в решении  $u(x)$  на *ограниченном* промежутке значений  $x$  совсем не означает, что функция  $u(x)$  будет оставаться монотонной на больших интервалах. Например, функция Бесселя (можно также взять любую гармоническую функцию) первого порядка  $J_1(x)$  лишь при малых значениях положительного аргумента  $x \ll 1$  ведет себя монотонным образом ( $J_1(x) \approx x/2$ ), пересекая ось  $X$  только один раз. Пренебрежение этим важным обстоятельством может приводить к некорректным выводам. Кроме того, метод Musielak et al. [2006] основывается на ошибочном предположении, что только осциллирующие в пространстве решения уравнения (1) способны переносить волновую энергию. Рассмотрим данный вопрос более обстоятельно.

Вектор Умова–Пойнтинга, характеризующий плотность потока энергии  $F$ , можно представить следующим образом

$$\mathbf{F} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}].$$

Откуда с учетом условия “вмороженности” магнитных силовых линий в плазму

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} [\mathbf{V} \times \mathbf{B}],$$

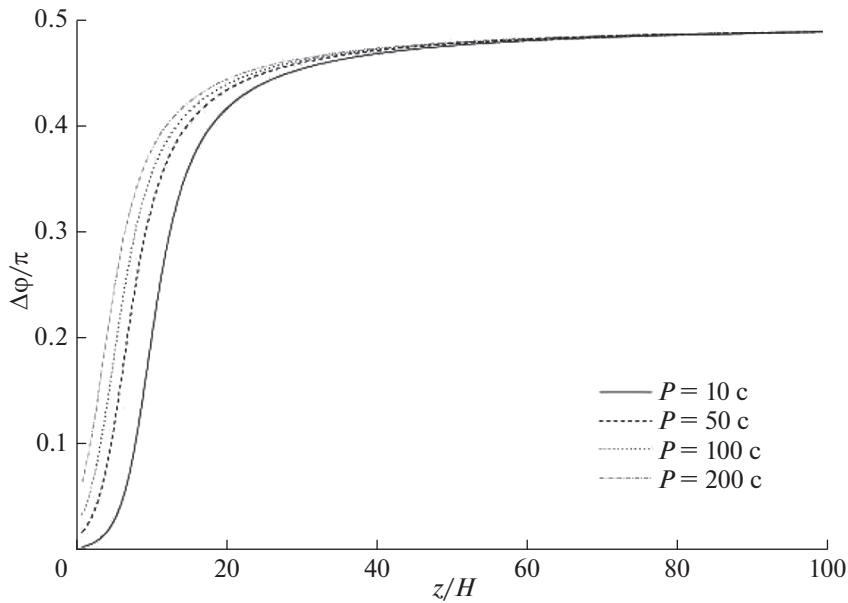
для потока электромагнитной энергии вдоль магнитного поля получим

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{B}(\mathbf{V}\mathbf{B}). \quad (2)$$

В случае возбуждения гармонических по времени альвеновских возмущений мы можем представить векторы возмущения скорости и магнитного поля в виде

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{V}(t, \mathbf{r}) &= \exp(-i\omega t) \delta\mathbf{V}(\mathbf{r}), \\ \delta\mathbf{B}(t, \mathbf{r}) &= \exp(-i\omega t) \delta\mathbf{B}(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\delta\mathbf{V}(\mathbf{r})$  и  $\delta\mathbf{B}(\mathbf{r})$  в общем случае могут быть комплексными величинами. Из уравнений (2) и (3) следует, что усредненный по времени продольный относительно  $\mathbf{B}_0$  волновой поток равен



**Рис. 1.** Зависимость разности фаз между возмущениями скорости и магнитного поля  $\Delta\phi$  от относительной высоты  $z/H$  для альвеновских волн с периодами  $P = 10, 50, 100, 200$  с. Приняты следующие значения параметров:  $H = 200$  км,  $V_A(0) = 3$  км/с и  $B_0 = 400$  Гс.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{F} \rangle &= -\frac{\mathbf{B}_0}{4\pi} \operatorname{Re} \langle \delta \mathbf{V}(t, \mathbf{r}) \delta \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) \rangle = \\ &= -\frac{\mathbf{B}_0}{8\pi} |\delta \mathbf{V}(\mathbf{r})| |\delta \mathbf{B}(\mathbf{r})| \cos \Delta\phi, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\Delta\phi$  – разность фаз между  $\delta \mathbf{V}(\mathbf{r})$  и  $\delta \mathbf{B}(\mathbf{r})$ . В ходе получения последнего выражения мы учли, что процедура усреднения по времени для комплексных величин в рассматриваемом случае сводится к умножению соответствующего выражения на  $1/2$ .

Таким образом, согласно (4) волновой поток  $\langle \mathbf{F} \rangle$  может быть и не равен нулю, если возмущенные по пространству величины  $\delta \mathbf{V}(\mathbf{r})$  и  $\delta \mathbf{B}(\mathbf{r})$  являются монотонными функциями радиус-вектора  $\mathbf{r}$ .

### 3. АЛЬВЕНОВСКИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ СКОРОСТИ И МАГНИТНОГО ПОЛЯ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ АТМОСФЕРЕ

Волновое уравнение, описывающее распространение альвеновских мод вдоль вертикальной оси  $Z$  с постоянным магнитным полем  $\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0)$ , в стандартных обозначениях имеет вид [Hollweg, 1984; Tsap, 2012]

$$\frac{\partial^2 \delta V}{\partial t^2} = V_A^2(z) \frac{\partial^2 \delta V}{\partial z^2}, \quad (5)$$

где  $\delta V$  – поперечная компонента возмущения скорости по отношению к оси  $Z$ , а альвеновская скорость

$$V_A = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho(z)}}.$$

Считая атмосферу изотермической с характерной шкалой высот  $H$ , т.е., полагая плотность плазмы  $\rho(z) = \rho_0 \exp(-z/H)$  и  $\delta V(t, \eta) \propto \exp(-i\omega t) \delta V(\eta)$ , из (5) получим уравнение, решение которого выражается через функции Ханкеля [Hollweg, 1984; Tsap, 2006]

$$\begin{aligned} \delta V(t, \eta) &= [C_1 H_0^{(1)}(\eta) + C_1 H_0^{(2)}(\eta)] e^{-i\omega t}, \\ \eta &= \frac{2\omega H}{V_A}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные константы, которые, как показывает анализ, соответствуют членам, описывающим распространение альвеновских мод в противоположных направлениях [Hollweg, 1984; Цап и др., 2007]. Используя линеаризованное уравнение индукции

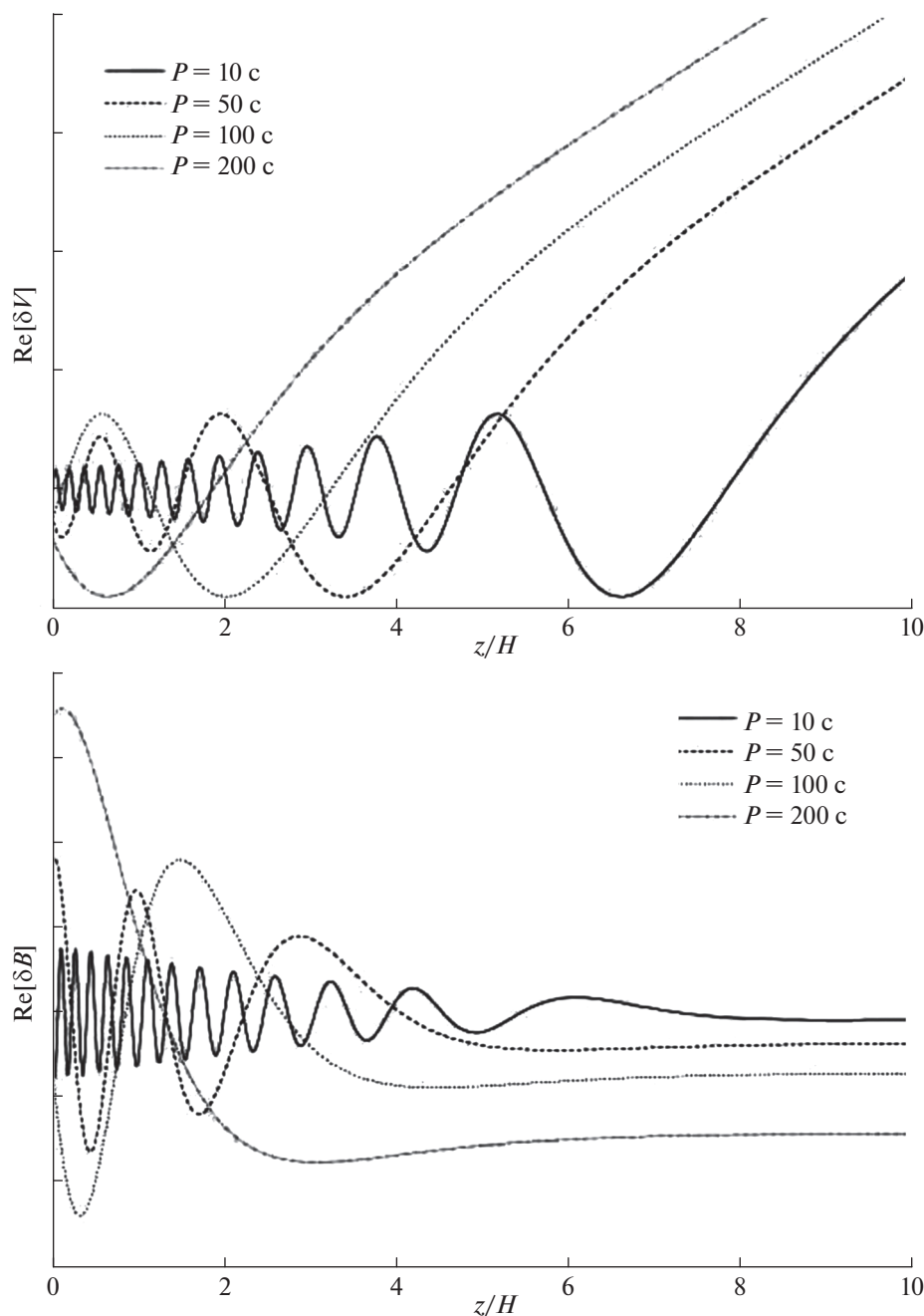
$$\frac{\partial \delta B(t, \eta)}{\partial t} = B_0 \frac{\partial \delta V(t, \eta)}{\partial z},$$

с учетом (6) получим

$$\delta B(t, \eta) = \frac{iB}{\omega V_A} [C_1 H_1^{(1)}(\eta) + C_1 H_1^{(2)}(\eta)] e^{-i\omega t}. \quad (7)$$

Откуда для усредненного по времени потока энергии альвеновских волн вдоль оси  $Z$  согласно (4) находим [Hollweg, 1984]

$$\langle F \rangle = \frac{B_0^2}{8\pi^2 \omega H} (|C_2|^2 - |C_1|^2). \quad (8)$$



**Рис. 2.** Схематическая зависимость возмущения скорости  $\text{Re}[\delta V]$  и магнитного поля  $\text{Re}[\delta B]$  от относительной высоты  $z/H$  для альвеновских волн с периодами  $P = 10, 50, 100, 200$  с. Параметры те же, что и на рис. 1; время распространения соответствует  $10^3$  с. Единицы на вертикальной оси – условные.

Как следует из уравнения (8), поток волн  $\langle F \rangle$  не зависит от осциллирующего или монотонного характера поведения возмущений скорости  $\delta V(\eta)$  и магнитного поля  $\delta B(\eta)$  в пространстве.

Для того чтобы лучше понять физическую сущность переноса энергии, исследуем сначала зависимость разности фаз  $\Delta\phi$  между возмущениями  $\text{Re}[\delta V]$  и  $\text{Re}[\delta B]$  от аргумента  $\eta$ , который, в

свою очередь, зависит от относительной высоты  $z/H$  и частоты волн ( $\eta \propto \exp(-z/H)$ ). Выделяя действительную и мнимую часть в правой части уравнений (6) и (7), используя формулу Эйлера и считая для простоты здесь и в дальнейшем  $C_1 = 0$ , нетрудно получить следующее выражение

$$\Delta\phi = \text{arctg} \left( \frac{Y_0(\eta)}{J_0(\eta)} \right) + \text{arctg} \left( \frac{J_1(\eta)}{Y_1(\eta)} \right),$$

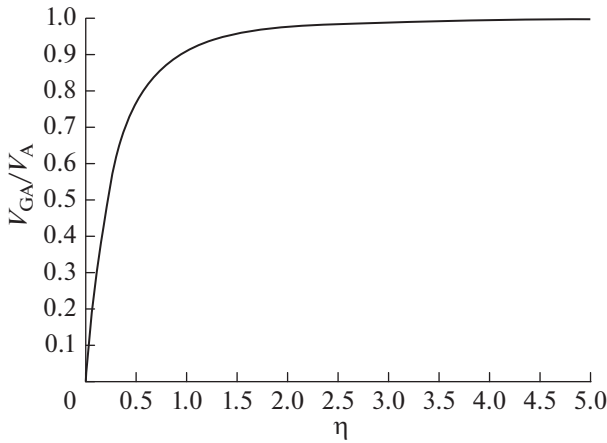


Рис. 3. Зависимость относительной групповой скорости альвеновских возмущений  $V_{GA}/V_A$  от  $\eta = 2\omega H/V_A$ .

где  $J_n$  и  $Y_n$  – соответственно функции Бесселя и Неймана первого рода.

Как видно из рис. 1, значение  $\Delta\phi$  с высотой  $z$  увеличивается и стремится к  $\pi/2$ , что должно приводить как к уменьшению эффективности переноса энергии (см. формулу (4)), так и ухудшению обмена энергией между возмущениями скорости и магнитного поля. В результате, несмотря на рост амплитуды скорости  $\text{Re}[\delta V]$  с высотой из-за уменьшения плотности  $\rho(z)$ , амплитуда  $\text{Re}[\delta B]$  уменьшается, что подтверждают численные расчеты (рис. 2).

На первый взгляд, из формулы (8) следует, что волновую энергию могут одинаково эффективно переносить как высокочастотные, так и низкочастотные моды. Однако эффективность передачи механической энергии от нижних слоев атмосферы к верхним характеризуется групповой скоростью  $V_{GA}$ , которую согласно теореме Леонтовича–Лайтхилла можно оценить из соотношения [Рабинович и Трубецков, 1984]

$$V_{GA} = \langle F \rangle / \langle W \rangle,$$

где усредненная плотность энергии волн [Цап и Копылова, 2001]

$$\langle W \rangle = \frac{1}{2} \left( \rho \frac{\delta V^2}{2} + \frac{\delta B^2}{8\pi} \right).$$

Откуда с учетом (6) и (7) следует функциональная зависимость

$$\frac{V_{GA}}{V_A} = \frac{4}{\pi \eta} \frac{1}{J_0^2(\eta) + Y_0^2(\eta) + J_1^2(\eta) + Y_1^2(\eta)},$$

представленная на рис. 3. Видно, что при  $\eta \ll 1$  перенос энергии альвеновскими волнами становится малоэффективным, тогда как для  $\eta \gg 1$  групповая скорость  $V_{GA}$  стремится к альвеновской

$V_A$ . При этом даже когда цилиндрические функции  $J_n(\eta)$  и  $Y_n(\eta)$  ведут себя монотонным образом ( $\eta < 1$ ), перенос волновой энергии может происходить достаточно эффективно, однако в любом случае высокочастотные моды для этого лучше приспособлены ( $\eta \propto \omega$ ).

#### 4. ВЫВОДЫ

В представленной работе мы провели анализ метода, предложенного Musielak et al. [2006], для исследования особенностей распространения линейных МГД-волн в неоднородной солнечной атмосфере. Показано, что, несмотря на свою привлекательность, он не позволяет адекватно характеризовать эффективность переноса волновой энергии в атмосферах Солнца и звезд, поскольку Musielak et al. [2006] не приняли во внимание ограничения, содержащиеся в критерии Кнезера. Кроме того, уравнение Эйлера является далеко не единственным дифференциальным уравнением, у которого можно выделить осциллирующие и неосциллирующие решения, поэтому теорема сравнения предполагает возможность существования большого числа несвязанных между собой точек поворота. Необходимо также учесть, что вид функции  $Q(x)$ , входящей в уравнение (1), благодаря замене переменных может варьироваться в широких пределах [Perera et al., 2015].

Как следует из полученных результатов, если не принимать во внимание диссипативные процессы, альвеновские моды с меньшими периодами лучше переносят волновую энергию из фотосферы в хромосферу Солнца. В значительной мере это объясняется зависимостью фазовых соотношений между возмущениями от высоты, что может существенным образом сказаться как на их амплитуде, так и потоке волновой энергии. Интересно также отметить, поскольку  $\eta \propto \exp(-z/H)$ , то относительная групповая скорость альвеновских мод  $V_{GA}/V_A$  с высотой должна уменьшаться (рис. 3).

Нами было также показано, что осциллирующий или монотонный характер поведения возмущений в пространстве не является надежным критерием эффективности переноса энергии альвеновскими волнами. Этот вывод хорошо согласуется с результатами работы [Chae and Litvinenko, 2018], в которой рассматривались акустические моды. Еще раз подчеркнем, что поток электромагнитной энергии непосредственно связан с разностью фаз между возмущенными величинами, поскольку от этого зависит обмен энергией между возмущениями скорости и магнитного поля и соответственно поведение амплитуд возмущений с высотой (рис. 2). Более детально

этот вопрос мы надеемся рассмотреть в нашей следующей работе.

#### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа частично поддержана Российского фонда фундаментальных исследований грант № 18-02-00856 и Минобрнауки (НИР № 0831-2019-0006).

#### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- *Мышкис А.Д.* Математика для ВТУЗов: Специальные курсы. М.: Наука, 632 с. 1971.
- *Пушкарь Е.А.* Дифференциальные уравнения: Учебное пособие. М.: Изд-во Московского гос. индустриального ун-та, 254 с. 2007.
- *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 432 с. 1984.
- *Цап Ю.Т., Копылова Ю.Г.* Механизм акустического затухания быстрых изгибных колебаний корональных петель // Письма в Астрон. журн. Т. 27. № 11. С. 859–866. 2001.
- *Цап Ю.Т., Копылова Ю.Г., Степанов А.В.* О проникновении акустико-гравитационных и альвеновских волн из хромосферы в корону Солнца // Изв. Крымск. астрофиз. общ. Т. 103. № 3. С. 71–78. 2007.
- *Aschwanden M.J., Gošić M., Hurlburt N.E. et al.* Convection-driven generation of ubiquitous coronal waves // *Astrophys. J.* V. 866. № 1. id. 73. 2018. <https://doi.org/10.3847/1538-4357/aac08b>
- *Chae J., Litvinenko Y.E.* Linear acoustic waves in a nonisothermal atmosphere. I. Simple nonisothermal layer solution and acoustic cutoff frequency // *Astrophys. J.* V. 869. № 1. id. 36. 2018. <https://doi.org/10.3847/1538-4357/aaec05>
- *Hollweg J.V.* Resonances of coronal loops // *Astrophys. J.* V. 277. № 1. P. 392–403. 1984.
- *Klimchuk J.A.* Key aspects of coronal heating // *Phil. Trans. R. Soc. A.* V. 373. Issue 2042. P. 20140256–20140256. 2015. <https://doi.org/10.1098/rsta.2014.0256>
- *Murawski K., Musielak Z.E.* Linear Alfvén waves in the solar atmosphere // *Astron. Astrophys.* V. 518. id. A3. 20107. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201014394>
- *Musielak Z.E., Musielak D.E., Mobashi H.* Method to determine cutoff frequencies for acoustic waves propagating in nonisothermal media // *Phys. Rev. E.* V. 73. id. 036612. 2006. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.73.036612>
- *Perera H.K., Musielak Z.E., Murawski K.* Theoretical evidence for cutoff frequencies for Alfvén waves propagating in the solar atmosphere // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* V. 450. № 3. P. 3169–3180. 2015.
- *Routh S., Musielak Z.E., Hammer R.* Conditions for propagation of torsional waves in solar magnetic flux tubes // *Solar Phys.* V. 246. № 1. P. 133–143. 2007.
- *Sakurai T.* Heating mechanisms of the solar corona // *Proc. Japn. Acad., Ser. B: Phys. Biol. Sci.*, V. 93. P. 87–97. 2017.
- *Schmitz F., Fleck B.* On wave equations and cut-off frequencies of plane atmospheres // *Astron. Astrophys.* V. 337. P. 487–494. 1998.
- *Soler R., Terradas J., Oliver R. et al.* Energy transport and heating by torsional Alfvén waves propagating from the photosphere to the corona in the quiet Sun // *Astrophys. J.* V. 871. № 1. id. 3. 2019. <https://doi.org/10.3847/1538-4357/aaf64c>
- *Srivastava A.K., Shetye J., Murawski K. et al.* High-frequency torsional Alfvén waves as an energy source for coronal heating // *Sci. Rep-UK.* V. 7. id. 43147. 2017. <https://doi.org/10.1038/srep43147>
- *Tsap Y.T.* On the penetration of Alfvén waves from the chromosphere into the corona // *Proc. IAU Symp. N 233, Solar Activity and its Magnetic Origin.* Eds. Bothmer V. and Hady A.A. Cambridge Univ. Press, Cambridge. P. 253–254. 2006. <https://doi.org/10.1017/S1743921306001967>
- *Tsap Y.T.* Reflection of Alfvén waves and plasma turbulence in solar corona // *Bull. Crimean Astrophys. Obs.* V. 108. Issue 1. P. 46–51. 2012. <https://doi.org/10.3103/S0190271712010226>
- *Wójcik D., Murawski K., Musielak Z.E. et al.* Numerical simulations of torsional Alfvén waves in axisymmetric solar magnetic flux tubes // *Solar Phys.* V. 292. № 2. id. 31. 2017. <https://doi.org/10.1007/s11207-017-1058-7>