

УДК 537.21

УЧЕТ ИОНОСФЕРНЫХ ГЕНЕРАТОРОВ В ЧИСЛЕННОЙ МОДЕЛИ ГЛОБАЛЬНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

© 2020 г. Ф. А. Кутерин¹, *, Н. Н. Слюняев¹, **

¹Институт прикладной физики Российской академии наук (ИПФ РАН),
г. Нижний Новгород, Россия

*e-mail: xredor@ipfran.ru

**e-mail: slyunyaev.n@gmail.com

Поступила в редакцию 18.12.2019 г.

После доработки 10.04.2020 г.

Принята к публикации 21.05.2020 г.

Обсуждается последовательное включение источников глобальной электрической цепи ионосферной и магнитосферной природы в ее распределенные численные модели. Показано, что наиболее естественный подход к такому включению состоит во введении в граничные условия на внешней границе модельной атмосферы соответствующего возмущения потенциала, заданного с точностью до неизвестной константы. В качестве примера реализации этого подхода продемонстрировано решение модельной задачи о высокоширотном магнитосферном конвективном генераторе с помощью трехмерной численной модели глобальной электрической цепи. Показано, что в полярных областях задаваемое возмущение потенциала проецируется в более низкие слои атмосферы, сохраняя свою структуру, что является следствием квазиодномерности задачи в условиях медленного изменения всех параметров с широтой и долготой при приблизительно постоянном профиле проводимости.

DOI: 10.31857/S0016794020060085

1. ВВЕДЕНИЕ

В исследованиях атмосферного электричества последних лет основополагающим подходом является включение различных процессов, протекающих в атмосфере, в единую концепцию глобальной электрической цепи (ГЭЦ) – распределенного токового контура, образованного атмосферой, поверхностью Земли и нижней ионосферой [Анисимов и Мареев, 2008; Мареев, 2010; Ruscroft et al., 2008; Williams, 2009; Williams and Mareev, 2014]. Основу ГЭЦ составляет распределение квазистационарных полей и токов в атмосфере (так называемая ГЭЦ постоянного тока), которое, согласно общепринятой в настоящее время гипотезе Вильсона [Wilson, 1921, 1924], поддерживается процессами разделения зарядов в грозовых облаках и других облаках с развитой электрической структурой. В областях грозы квазистационарный ток течет вверх, в областях хорошей погоды – вниз, а высокопроводящие верхний слой земной поверхности и нижняя ионосфера замыкают электрический контур.

Несмотря на большой объем накопленных данных наблюдений явлений атмосферного электричества, включающих результаты как наземных измерений, так и измерений с помощью зон-

дов, самолетов и спутников, эти данные не всегда позволяют проанализировать полную картину электрических процессов в глобальном масштабе всей атмосферы. В связи с этим особое значение имеет моделирование ГЭЦ, в основе которого лежит численное решение уравнений для потенциала электрического поля в атмосфере. Первой полноценной моделью ГЭЦ можно считать классическую модель Хейса–Роубла [Hays and Roble, 1979], авторы которой, параметризовав проводимость атмосферы и пространственное распределение грозных генераторов, смогли отыскать создаваемое этими генераторами распределение электрического потенциала, исследовать его особенности и влияние на него ряда эффектов. С развитием вычислительных возможностей разрабатывались новые модели ГЭЦ [Makino and Ogawa, 1984; Browning et al., 1987; Stansbery et al., 1993], также предлагались новые подходы к анализу задачи о глобальном распределении полей и токов в атмосфере [Морозов, 2005; Odzimek et al., 2010]. В последнее время интерес к этому направлению снова возрос в связи с возрастающим пониманием тесной связи атмосферного электричества и динамики атмосферы, что нашло отражение в появлении сразу нескольких новых квазистационарных и стационарных моделей ГЭЦ [Калинин

и др., 2014; Baumgaertner et al., 2014; Jánský and Pasko, 2014; Bayona et al., 2015], каждая из которых имеет свои достоинства и недостатки.

Моделирование ГЭЦ в целом сводится к отысканию распределения потенциала электрического поля во всей атмосфере по заданным распределениям токов зарядки в грозовых облаках (которые иногда описываются распределенно, а иногда заменяются на точечные диполи) и проводимости. Исследования последнего времени посвящены главным образом уточнению и совершенствованию параметризаций входных данных моделей ГЭЦ – как проводимости [Tinsley and Zhou, 2006; Baumgaertner et al., 2013; Slyunyaev et al., 2015], так и грозовых генераторов [Mareev and Volodin, 2014; Kalb et al., 2016; Jánský et al., 2017]. Однако для более точного моделирования структуры полей и токов в атмосфере (особенно в полярных областях) необходимо также принимать во внимание возмущения ГЭЦ, создаваемые ионосферными источниками.

Поскольку проводимость атмосферы экспоненциально растет с высотой, в большинстве моделей ГЭЦ на высоте ~50–100 км устанавливается внешняя граница, которая предполагается эквипотенциальной в каждый момент времени. Численные расчеты и оценки показывают, что точное положение этой границы не имеет решающего значения, так как облака – генераторы ГЭЦ расположены не выше 20 км и, даже если поставить внешнюю границу достаточно далеко от земной поверхности, уже на высоте в 50–60 км изменение потенциала с высотой станет незначительным по сравнению с аналогичными изменениями в нижней атмосфере. Однако, строго говоря, процессы, протекающие в ионосфере, могут приводить к заметным “горизонтальным” разностям потенциала на этих высотах, в связи с чем говорят об ионосферных генераторах ГЭЦ, дополнительных по отношению к грозовым облакам. Обычно рассматривают два таких генератора: ионосферное динамо, связанное со взаимодействием приливного ветра с ионосферной плазмой в присутствии геомагнитного поля, и магнитосферный конвективный генератор, связанный со взаимодействием солнечного ветра с геомагнитным полем над полярными шапками [Volland, 1984].

Рассматривая этот вопрос в более общем контексте, следует отметить, что задачам о связи структуры электрических полей в нижней атмосфере и в ионосфере уделяется значительное внимание в литературе. Множество исследований посвящено задачам о проникновении электрических полей, создаваемых источниками различной природы (в том числе грозовыми облаками и сейсмическими процессами), из нижней атмосферы в ионосферу [Park and Dejnakarindra, 1973; Kartalev et al., 2004; Denisenko et al., 2013, 2018; Kuo et al.,

2014]. Родственная задача о проникновении электрических полей из ионосферы в нижнюю атмосферу также обсуждалась в литературе [Volland, 1972; Park, 1976; Dejnakarindra et al., 1985; Werner and Ferraro, 1991; Dutra et al., 1992]. Однако большинство исследователей рассматривают подобные вопросы локально, зачастую в плоскопараллельном приближении, в то время как в контексте ГЭЦ гораздо более естественным выглядит именно глобальный подход. Отметим, что применительно к нестационарным возмущениям поля глобальный подход применялся в работе Морозов [2018], а применительно к стационарным – в работе Денисенко и Помозов [2010], однако в последней работе использовались не вполне корректные граничные условия без требования соблюдения баланса токов на границе.

На сегодняшний день единственные работы, посвященные самосогласованному включению ионосферных источников в численные модели ГЭЦ, – исследования Roble and Hays [1979] и Lucas et al. [2015]. Однако Roble and Hays [1979] отыскивали возмущения потенциала, создаваемые ионосферными генераторами ГЭЦ, в виде разложения по сферическим функциям, что возможно лишь при определенном виде распределения проводимости в атмосфере, а Lucas et al. [2015] рассматривали задачу в рамках упрощенной многостолбцовой модели ГЭЦ (когда вертикальные столбы воздуха в атмосфере заменяются на эквивалентные резисторы и источники тока и связываются между собой лишь посредством нижней и верхней границ атмосферы). Поэтому задача об учете ионосферных генераторов в распределенных моделях ГЭЦ общего вида по-прежнему остается актуальной.

В этой работе мы обсуждаем математически корректный подход к включению ионосферных генераторов в распределенные модели ГЭЦ, а также особенности его практической реализации. В качестве примера использования разработанного подхода мы решаем модельную задачу о высокоширотном магнитосферном конвективном генераторе с помощью трехмерной модели ГЭЦ и оцениваем создаваемые им возмущения полей и токов в атмосфере.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Мы предполагаем, что атмосфера занимает область Ω , ограниченную поверхностью Земли Γ_1 и нижней границей ионосферы Γ_2 . Поскольку основными генераторами, поддерживающими работу ГЭЦ, являются грозовые облака и другие облака с развитой электрической структурой (в частности, так называемые “electrified shower clouds” и мезомасштабные конвективные системы), большинство моделей ГЭЦ основано на ре-

шении уравнений для потенциала электрического поля φ в области Ω по заданным распределениям плотности тока зарядки в облаках — источниках ГЭЦ $\mathbf{j}^{\text{ист}}(\mathbf{r})$ и проводимости $\sigma(\mathbf{r})$. В стационарном случае соответствующая система уравнений выглядит следующим образом [Калинин и др., 2014; Vayona et al., 2015] (здесь и далее \mathbf{r} — пространственная координата, а $ds(\mathbf{r})$ указывает на интеграл по поверхности):

$$\operatorname{div}(\sigma(\mathbf{r}) \operatorname{grad}\varphi(\mathbf{r})) = \operatorname{div}\mathbf{j}^{\text{ист}}(\mathbf{r}), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_1} \sigma(\mathbf{r}) \operatorname{grad}\varphi(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) ds(\mathbf{r}) = \\ = \oint_{\Gamma_1} \mathbf{j}^{\text{ист}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) ds(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\varphi(\mathbf{r})|_{\Gamma_1} = 0, \quad \varphi(\mathbf{r})|_{\Gamma_2} = V, \quad (3)$$

где \mathbf{n} — вектор единичной нормали к границе, а V — константа, однозначно определяемая решением задачи (ионосферный потенциал). С физической точки зрения уравнения (1) и (2) обеспечивают непрерывность полного тока в области Ω и баланс токов на поверхности Γ_1 , а уравнения (3) описывают эквипотенциальность обеих компонент границы. Баланс токов на другой компоненте границы Γ_2 при этом выполняется автоматически: достаточно проинтегрировать уравнение (1) по области Ω , перейти к интегралу по границе и учесть условие (2). Отметим также, что правая часть соотношения (2) обычно обращается в ноль, поскольку плотность тока зарядки $\mathbf{j}^{\text{ист}}(\mathbf{r})$ отлична от нуля лишь внутри облаков с развитой электрической структурой; тем не менее в общих рассуждениях мы сохраняем этот интеграл на случай необходимости учета сторонних токов иной природы.

Чтобы добавить в систему полей и токов, определяемую уравнениями (1)–(3), возмущения, порождаемые источниками ионосферной природы, необходимо задать создаваемые этими источниками возмущения потенциала на внешней границе области Ω . Для этого достаточно ввести во второе граничное условие в (3) функцию $\varphi_{\text{ист}}(\mathbf{r})$, выражающую распределение потенциала на внешней границе атмосферы с точностью до константы. Легко видеть, что это эквивалентно заданию распределения тангенциальной компоненты электрического поля на поверхности Γ_2 . В результате получается следующая система уравнений:

$$\operatorname{div}(\sigma(\mathbf{r}) \operatorname{grad}\varphi(\mathbf{r})) = \operatorname{div}\mathbf{j}^{\text{ист}}(\mathbf{r}), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_1} \sigma(\mathbf{r}) \operatorname{grad}\varphi(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) ds(\mathbf{r}) = \\ = \oint_{\Gamma_1} \mathbf{j}^{\text{ист}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) ds(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\varphi(\mathbf{r})|_{\Gamma_1} = 0, \quad \varphi(\mathbf{r})|_{\Gamma_2} = \varphi_{\text{ист}}(\mathbf{r}) + U, \quad (6)$$

где U — константа, однозначно определяемая решением.

Можно показать, что задача (4)–(6) математически корректна, то есть ее решение $\varphi(\mathbf{r})$ существует и единственно при заданных $\sigma(\mathbf{r})$, $\mathbf{j}^{\text{ист}}(\mathbf{r})$ и $\varphi_{\text{ист}}(\mathbf{r})$. Строгое математическое доказательство этого приводится в работе Kalinin and Slyunyaev [2017], однако однозначность определения $\varphi(\mathbf{r})$ и U можно продемонстрировать и классическим элементарным способом (см. Приложение А).

3. ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ

В этом разделе мы описываем численную модель ГЭЦ для решения задачи (4)–(6), которая будет использоваться в дальнейшем.

Задача (4)–(6) представляет собой некоторый аналог задачи Дирихле для уравнения (4). Отличия от классической задачи Дирихле заключаются в том, что значения потенциала на одной из компонент границы задаются лишь с точностью до неизвестной аддитивной константы, а решение должно удовлетворять интегральному соотношению (5). Эти отличия связаны с топологией области Ω , диффеоморфной сферическому слою, и обеспечивают соответствие решения задачи фундаментальным уравнениям Максвелла [Калинин и др., 2014].

Однако при создании численной модели, решающей задачу (4)–(6), удобно свести эту задачу к классической задаче Дирихле. Нетрудно заметить, что решение задачи (4)–(6) может быть представлено как линейная комбинация решений задач

$$\operatorname{div}(\sigma(\mathbf{r}) \operatorname{grad}\varphi(\mathbf{r})) = \operatorname{div}\mathbf{j}^{\text{ист}}(\mathbf{r}), \quad (7)$$

$$\varphi(\mathbf{r})|_{\Gamma_1} = 0, \quad \varphi(\mathbf{r})|_{\Gamma_2} = \varphi_{\text{ист}}(\mathbf{r}) \quad (8)$$

и

$$\operatorname{div}(\sigma(\mathbf{r}) \operatorname{grad}\varphi(\mathbf{r})) = 0, \quad (9)$$

$$\varphi(\mathbf{r})|_{\Gamma_1} = 0, \quad \varphi(\mathbf{r})|_{\Gamma_2} = 1. \quad (10)$$

Действительно, если $\varphi_1(\mathbf{r})$ — решение задачи (7), (8), а $\varphi_2(\mathbf{r})$ — решение задачи (9), (10), то решение исходной задачи (4)–(6) может быть представлено в виде

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_1(\mathbf{r}) + U\varphi_2(\mathbf{r})$$

с константой U , определяемой из соотношения

$$\begin{aligned} & \oint_{\Gamma_1} \sigma(\mathbf{r}) \operatorname{grad} \varphi_1(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) ds(\mathbf{r}) + \\ & + U \oint_{\Gamma_1} \sigma(\mathbf{r}) \operatorname{grad} \varphi_2(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) ds(\mathbf{r}) = \\ & = \oint_{\Gamma_1} \mathbf{j}^{\text{ист}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) ds(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

(подобный подход применяли, например, Bayona et al. [2015]). На практике вместо последнего соотношения удобнее использовать эквивалентное ему соотношение на Γ_2 , поскольку поверхность Γ_2 находится на большем удалении от облаков – источников ГЭЦ, нежели Γ_1 , и, как следствие, значения нормальной компоненты тока проводимости $\sigma(\mathbf{r}) \operatorname{grad} \varphi_1(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r})$ на ней ведут себя более регулярно. Принимая во внимание равенство нулю стороннего тока $\mathbf{j}^{\text{ист}}(\mathbf{r})$ на Γ_2 , получаем следующее соотношение для отыскания константы U :

$$U = \frac{-\oint_{\Gamma_2} \sigma(\mathbf{r}) \operatorname{grad} \varphi_1(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) ds(\mathbf{r})}{\oint_{\Gamma_2} \sigma(\mathbf{r}) \operatorname{grad} \varphi_2(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) ds(\mathbf{r})}. \quad (11)$$

Итак, для того чтобы решить задачу (4)–(6), достаточно решить задачи (7), (8) и (9), (10), а затем воспользоваться соотношением (11). На основе этих идей мы разработали новую численную модель ГЭЦ. Модель реализована на языке C++ с использованием библиотек deal.II (<https://www.dealii.org>), PETSc (<https://www.mcs.anl.gov/petsc>) и p4est (<http://p4est.org>). Библиотека deal.II [Alzetta et al., 2018; Bangerth et al., 2007] представляет собой набор классов для реализации метода конечных элементов, применяемого для решения задач (7), (8) и (9), (10); библиотеки PETSc и p4est используются библиотекой deal.II для решения получающейся разреженной системы линейных уравнений (фактически решаемая при этом подходе система уравнений приведена в Приложении В). Расчеты производятся на сетке типа “кубосфера”, получаемой при отображении кубического слоя с гексаэдральной сеткой в сферический слой. При этом высота ячеек в нижней части моделируемой атмосферы (ниже некоторого заданного уровня) одинакова, а выше возрастает в геометрической прогрессии.

4. МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Описанный в предыдущих разделах подход и соответствующая ему численная модель позволяют отыскать распределение электрических полей и токов в атмосфере при любых заданных “входных данных”, в роли которых выступают распре-

деление проводимости $\sigma(\mathbf{r})$, распределение тока зарядки $\mathbf{j}^{\text{ист}}(\mathbf{r})$ и распределение относительного потенциала на внешней границе $\varphi_{\text{ист}}(\mathbf{r})$. Чтобы проиллюстрировать работу модели на конкретном примере, ниже мы рассмотрим модельную задачу о высокоширотном магнитосферном конвективном генераторе и оценим создаваемые им возмущения полей и токов.

4.1. Геометрия

Далее мы будем использовать сферическую систему координат (r, ϑ, λ) , в которой радиус r отсчитывается от центра Земли, а полярный угол ϑ отсчитывается от оси геомагнитного диполя (азимутальный угол λ характеризует геомагнитную долготу). Мы предполагаем, что модельная атмосфера Ω ограничена двумя концентрическими сферами – поверхностью Земли $r = R_E$ (Γ_1) и нижней границей ионосферы $r = R_E + H$ (Γ_2), где $R_E = 6370$ км – радиус Земли, а $H = 70$ км – высота модельной атмосферы.

4.2. Проводимость

Проводимость задается на основе несколько измененной параметризации из работы Slyunyaev et al. [2015]. Проводимость атмосферы определяется ионами, поэтому может быть выражена как

$$\sigma = e(\mu_+ + \mu_-)n,$$

где e – элементарный заряд, μ_+ и μ_- – подвижности положительных и отрицательных ионов соответственно, а n – равновесная концентрация ионных пар, определяемая из условия баланса процессов ионизации и ион-ионной рекомбинации:

$$n = \sqrt{\frac{q}{\alpha}},$$

где q – скорость образования ионных пар, а α – коэффициент ион-ионной рекомбинации. Эффекты, связанные с прилипанием ионов к частицам аэрозоля и гидрометеорам, а также составляющая скорости образования ионных пар, связанная с выделением радона из земной коры, в данной работе не рассматриваются: для обсуждаемой задачи они не имеют большого значения.

Для параметризации скорости образования ионных пар q мы используем параметризацию Slyunyaev et al. [2015, разд. 5.2.3 и прил. А], выражающую эту величину как функцию геомагнитной широты, высоты над поверхностью Земли, фазы солнечной активности, температуры и давления. Коэффициент ион-ионной рекомбинации выражается в терминах температуры и концен-

трации молекул воздуха по формуле из работы Tinsley and Zhou [2006, уравнения (6a)–(6c)]. Подвижности положительных и отрицательных ионов μ_+ и μ_- выражаются как функции температуры и давления по формуле из Zhou and Tinsley [2007, уравнение(32)]. Температура, давление и концентрация оцениваются с помощью одномерной модели стандартной атмосферы U.S. Standard Atmosphere [1976]. Для определенности при дальнейших расчетах мы всюду используем распределение проводимости, соответствующее солнечному минимуму; отметим, что в этом случае σ является функцией двух переменных r и ϑ .

4.3. Грозовые генераторы

При параметризации тока разделения зарядов в грозовых генераторах мы стремимся учесть тот факт, что облака, вносящие наибольший вклад в ГЭЦ, расположены в тропических областях. Поскольку угол между осью вращения Земли и осью геомагнитного диполя невелик, для простоты мы можем предположить, что облака – источники ГЭЦ занимают пояс, ограниченный значениями геомагнитной широты в $\Delta\vartheta = 10^\circ$. Кроме того, в качестве первого приближения мы предполагаем структуру тока зарядки в облаках дипольной, границы области разделения зарядов (в которой плотность этого тока отлична от нуля) по высоте всюду одинаковыми и равными $h_1 = 6$ км и $h_2 = 11$ км, а величину плотности тока зарядки в этой области также постоянной и равной j_0 . Иными словами, в расчетах используется следующее распределение $\mathbf{j}^{\text{ист}}(\mathbf{r})$:

$$j_r^{\text{ист}}(r, \vartheta, \lambda) = \begin{cases} j_0, & h_1 < r - R_E < h_2, \quad |\vartheta - 90^\circ| < \Delta\vartheta, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$j_{\vartheta, \lambda}^{\text{ист}}(r, \vartheta, \lambda) \equiv 0.$$

В рамках описанной параметризации источники ГЭЦ занимают область значительно большей площади, чем реальные облака с развитой электрической структурой, присутствующие в атмосфере; иными словами, мы “усредняем” картину атмосферного электричества в окрестности экватора (что можно делать до тех пор, пока мы не ставим задачу детального изучения структуры полей и токов в этой области). В соответствии с этим, j_0 имеет смысл величины не реального, а эффективного тока зарядки. Полагая в задаче (4)–(6) $\varphi_{\text{ист}}(\mathbf{r}) \equiv 0$, мы сведем ее к задаче (1)–(3); пользуясь линейностью последней задачи по $\mathbf{j}^{\text{ист}}(\mathbf{r})$, мы можем подобрать конкретное значение j_0 на основании требования, чтобы модельный источник при заданной проводимости поддерживал реалистичное значение ионосферного

потенциала $V = 240$ кВ. Оказывается, что для этого необходимо взять $j_0 = 144$ пА/м²; это значение используется во всех расчетах, результаты которых приводятся ниже.

4.4. Ионосферные генераторы

В качестве примера ионосферных источников ГЭЦ мы рассмотрим упрощенное представление магнитосферного конвективного генератора, связанного со взаимодействием солнечного ветра с геомагнитным полем над полярными шапками [Volland, 1984, уравнения (11.9), (11.10)]. Мы будем предполагать, что ионосферные источники создают дополнительное распределение относительного потенциала $\varphi_{\text{ист}}(\mathbf{r})$ на Γ_2 вида

$$\varphi_{\text{ист}}(\vartheta, \lambda) = \varphi_0 \sin \lambda \begin{cases} \frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta_0}, & \vartheta < \vartheta_0, \\ \left(\frac{\sin \vartheta_0}{\sin \vartheta} \right)^4 k(\vartheta), & \vartheta \geq \vartheta_0, \end{cases} \quad (12)$$

где $\varphi_0 = 15$ кВ, $\vartheta_0 = 20^\circ$ и

$$k(\vartheta) = \begin{cases} 1, & \vartheta < 30^\circ, \\ (1 + \sin 3\vartheta)/2, & 30^\circ \leq \vartheta < 90^\circ, \\ 0, & \vartheta \geq 90^\circ. \end{cases}$$

Коэффициент $k(\vartheta)$ введен нами в формулы из книги Volland [1984] для обеспечения локализации возмущения в северном полушарии относительно геомагнитного экватора. Отметим, что усредненное по поверхности Γ_2 значение потенциала $\varphi_{\text{ист}}(\mathbf{r})$, определяемого формулой (12), равно нулю; это означает, что константа U в задаче (4)–(6) имеет смысл ионосферного потенциала (который мы можем определить как разность между средним потенциалом на Γ_2 и средним потенциалом на Γ_1).

5. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Удобно, воспользовавшись линейностью задачи (4)–(6), представить ее в виде суперпозиции двух задач: задачи (1)–(3), в которой $\varphi_{\text{ист}}(\mathbf{r})$ отсутствует, а $\mathbf{j}^{\text{ист}}(\mathbf{r}) \neq 0$, и задачи

$$\text{div}(\sigma(\mathbf{r}) \text{grad}\varphi(\mathbf{r})) = 0, \quad (13)$$

$$\oint_{\Gamma_1} \sigma(\mathbf{r}) \text{grad}\varphi(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) \, ds(\mathbf{r}) = 0, \quad (14)$$

$$\varphi(\mathbf{r})|_{\Gamma_1} = 0, \quad \varphi(\mathbf{r})|_{\Gamma_2} = \varphi_{\text{ист}}(\mathbf{r}) + W \quad (15)$$

с неизвестной константой W , в которой, напротив, $\varphi_{\text{ист}}(\mathbf{r}) \neq 0$, а $\mathbf{j}^{\text{ист}}(\mathbf{r})$ отсутствует. В силу корректности задачи (4)–(6) ясно, что ее решение бу-

дет суммой решений задач (1)–(3) и (13)–(15), а неизвестная константа U из (4)–(6) будет суммой неизвестной константы V из (1)–(3) и неизвестной константы W из (13)–(15). Аналогичные соотношения справедливы для производных от потенциала величин, в частности для компонент электрического поля.

Как уже было сказано выше, в задаче (1)–(3) мы подобрали значение стороннего тока грозовых генераторов $j^{\text{ист}}$ так, чтобы выполнялось $V = 240$ кВ. В задаче (13)–(15) константа W определяется внешним возмущением потенциала $\varphi_{\text{ист}}$, однако в случае возмущения, задаваемого уравнением (12), эта константа обязана быть равной нулю. Действительно, возмущение (12) меняет знак на противоположный при замене $\lambda \mapsto \lambda + \pi$, а проводимость не зависит от λ ; тогда если $\varphi(r, \vartheta, \lambda)$ с константой W – решение задачи (13)–(15), то $-\varphi(r, \vartheta, \lambda + \pi)$ с константой $-W$ тоже будет решением той же задачи, откуда в силу единственности решения $\varphi(r, \vartheta, \lambda) = -\varphi(r, \vartheta, \lambda + \pi)$ и $W = -W$, т.е. $W = 0$. Наши расчеты согласуются с этим замечанием: в случае возмущения, задаваемого уравнением (12), рассчитанная с помощью модели W имеет близкое к нулю значение на уровне погрешности.

Поскольку возмущение потенциала (12), связанное с рассматриваемым нами ионосферным генератором, сосредоточено главным образом в полярной шапке, вызванные этим генератором изменения структуры полей и токов также наиболее существенны именно в этой области. На рисунке 1а показан вертикальный профиль возмущения потенциала, отвечающего задаче (13)–(15), в расположенной недалеко от полюса точке $\vartheta = 5^\circ$, $\lambda = 90^\circ$, а на рис. 1б для сравнения показан вертикальный профиль невозмущенного потенциала, порожденного грозовыми генераторами и отвечающего задаче (1)–(3), в той же самой точке. Сравнение двух графиков показывает, что эти профили практически пропорциональны друг другу (иными словами, соответствующие относительные профили, отнормированные на максимальные значения потенциала, практически совпадают).

На рисунке 1 (панели в и д) сплошными линиями показаны профили соответствующих возмущений вертикальной и горизонтальной компонент электрического поля, а на рис. 1г – профиль вертикальной компоненты невозмущенного поля (горизонтальная компонента невозмущенного поля пренебрежимо мала; все профили построены для той же точки $\vartheta = 5^\circ$, $\lambda = 90^\circ$). Штриховые линии на этом рисунке показывают соответствующие профили потенциала, нормированные на максимальное значение величины электрического поля и линейно преобразованные подходящим

образом. Из этого рисунка можно сделать три основных вывода. Во-первых, рис. 1в и рис. 1д показывают, что горизонтальная составляющая возмущения электрического поля в нижней атмосфере по величине значительно меньше вертикальной. Во-вторых, как видно из сравнения рис. 1в и рис. 1г, значения вертикальной компоненты возмущения электрического поля, вызванного ионосферными генераторами, почти пропорциональны соответствующим значениям вертикальной компоненты невозмущенного поля, создаваемого грозовыми генераторами. Это согласуется со сделанным выше замечанием о приблизительной пропорциональности невозмущенного профиля потенциала и профиля его возмущения. В-третьих, как ясно из рис. 1д, величина горизонтальной компоненты возмущения электрического поля имеет практически тот же относительный профиль, что и потенциал этого возмущения.

Последнее наблюдение косвенно подтверждается и сравнением картин возмущения, построенных для различных высот. На рисунке 2а показано распределение возмущения потенциала на внешней границе модельной атмосферы Γ_2 (т.е. на высоте в 70 км), задаваемого функцией (12), а на рис. 2в показана картина линий горизонтальной составляющей возмущения поля, полученная путем взятия градиента от этой функции. Сравнивая рис. 2а и рис. 2в с рис. 2б и рис. 2г, изображающими рассчитанную картину возмущения потенциала и горизонтальной компоненты возмущения поля на высоте в 5 км, мы убеждаемся в том, что структура внешнего возмущения, которое мы задали на наружной границе, попросту переносится в более низкие слои атмосферы. Это согласуется со сделанным выше замечанием о сходстве относительных профилей возмущения потенциала и горизонтальной компоненты возмущения поля (см. рис. 1д): оба этих профиля просто демонстрируют изменение амплитуды сохраняющей структуру возмущения с высотой.

На рисунке 2 (панели д и е) показаны распределения значений горизонтальной и вертикальной компонент возмущения электрического поля на высоте 5 км. Видно, что поперечная составляющая возмущения поля существенно ниже вертикальной составляющей (обращаем внимание, что значения величины поля на рис. 2д и рис. 2е приведены в разных единицах), что согласуется с профилями на рис. 1в и рис. 1д, однако больший интерес представляет изучение структуры этих возмущений. Нетрудно видеть, что линии уровня возмущения вертикальной компоненты поля, изображенные на рис. 2е, практически совпадают с линиями уровня внешнего потенциала $\varphi_{\text{ист}}$, заданного уравнением (12) (см. рис. 2а). Это еще раз косвенно свидетельствует о том, что структура

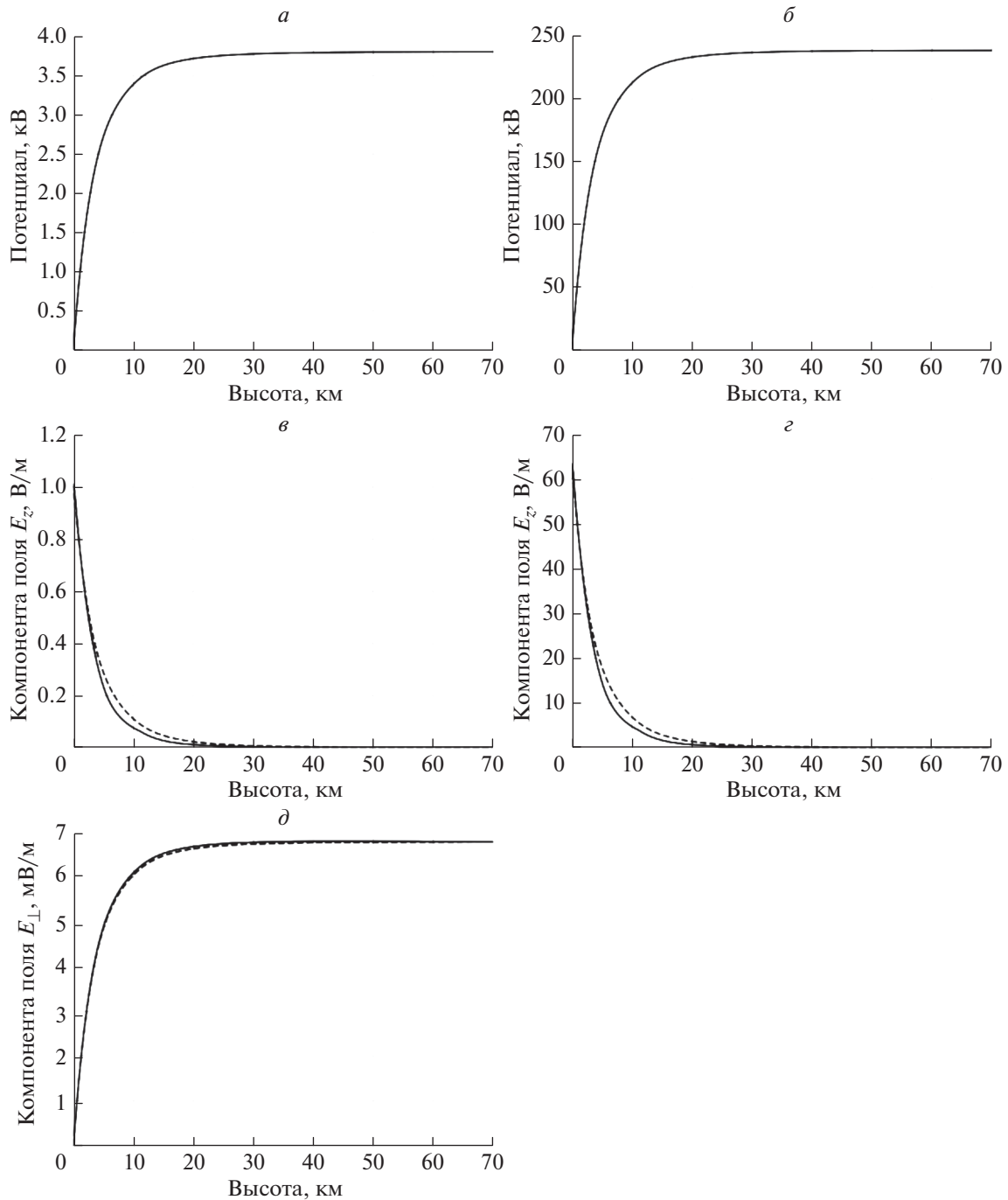


Рис. 1. (а) – Вертикальный профиль возмущения потенциала, создаваемого ионосферными генераторами (без учета грозовых генераторов; задача (13)–(15)). (б) – Вертикальный профиль распределения потенциала, создаваемого грозовыми генераторами (без учета ионосферных генераторов; задача (1)–(3)). (в) – Вертикальный профиль z -компоненты возмущения электрического поля, создаваемого ионосферными генераторами (без учета грозовых генераторов; задача (13)–(15)). (г) – Вертикальный профиль z -компоненты электрического поля, создаваемого грозовыми генераторами (без учета ионосферных генераторов; задача (1)–(3)). (д) – Вертикальный профиль горизонтальной компоненты возмущения электрического поля, создаваемого ионосферными генераторами (без учета грозовых генераторов; задача (13)–(15)). Все профили построены для точки $\vartheta = 5^\circ$, $\lambda = 90^\circ$. Штриховые линии показывают соответствующие профили потенциала, нормированные на максимальные значения величины поля и линейно преобразованные подходящим образом.

возмущения потенциала просто проецируется с внешней границы модельной атмосферы в нижележащие слои (и, как следствие, в эквипотенци-

альных точках вертикальные производные от потенциала тоже совпадают). Линии уровня возмущения горизонтальной компоненты электри-

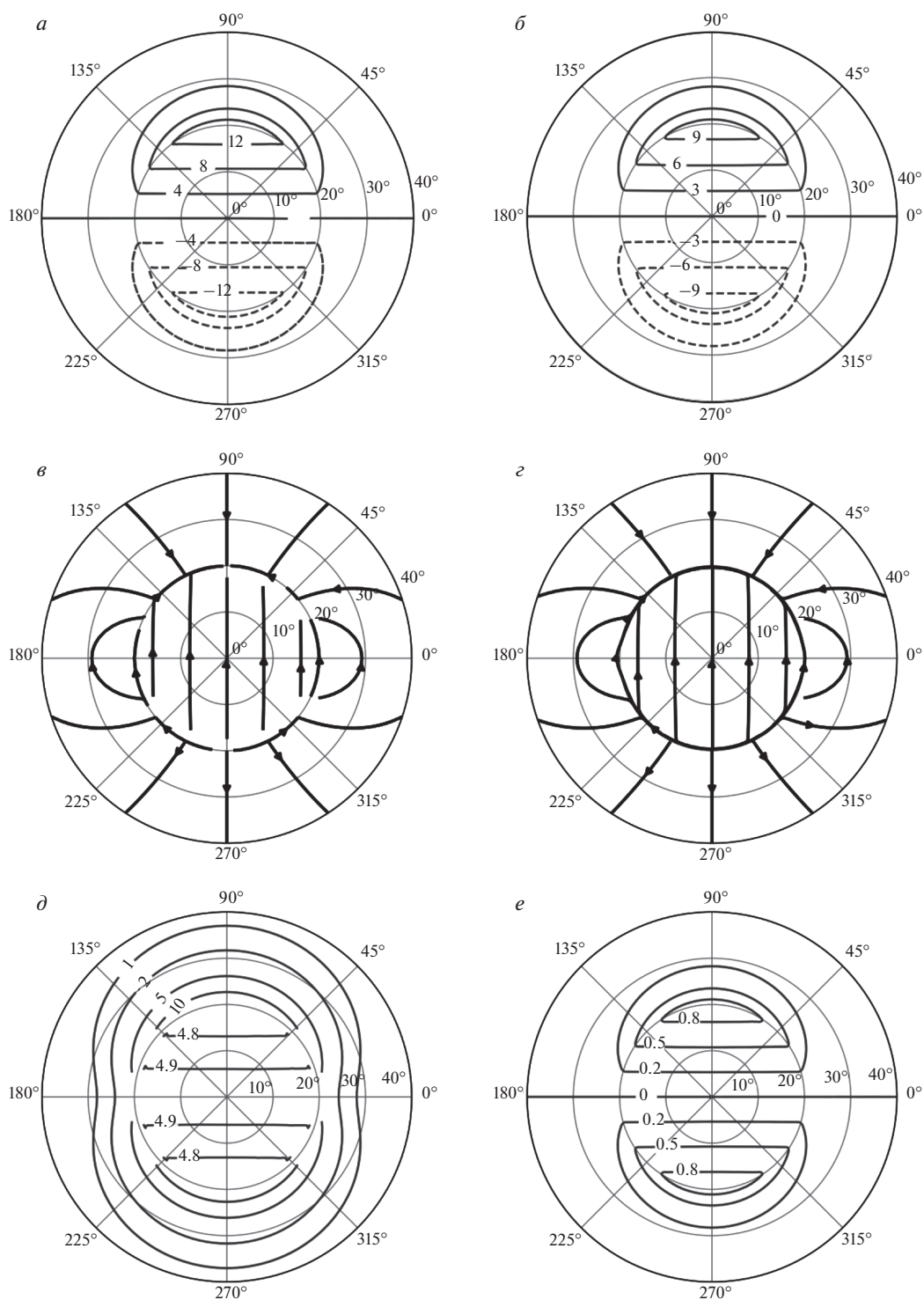


Рис. 2. (а) – Линии уровня возмущения потенциала на внешней границе модельной атмосферы Γ_2 ($r - R_E = 70$ км). Значения потенциала приведены в кВ. (б) – Линии уровня возмущения потенциала на поверхности $r - R_E = 5$ км. Значения потенциала приведены в кВ. (в) – Линии горизонтальной компоненты возмущения электрического поля на внешней границе Γ_2 . (г) – Линии горизонтальной компоненты возмущения электрического поля на поверхности $r - R_E = 5$ км. Значения электрического поля приведены в мВ/м. (д) – Линии уровня модуля горизонтальной компоненты возмущения электрического поля на поверхности $r - R_E = 5$ км. Значения электрического поля приведены в мВ/м. (е) – Линии уровня модуля z -компоненты возмущения электрического поля на поверхности $r - R_E = 5$ км. Значения электрического поля приведены в В/м. Во всех случаях речь идет о возмущениях потенциала и поля, создаваемых ионосферными генераторами (без учета грозных генераторов; задача (13)–(15)).

ческого поля имеют несколько более сложную структуру, однако анализ показывает, что и эта структура переносится вниз с внешней границы и определяется градиентом внешнего потенциала $\varphi_{\text{ист}}$. В частности, это объясняет совпадение линий уровня возмущения поперечной компоненты поля с линиями уровня потенциала внутри круга $\vartheta < \vartheta_0$. Действительно, элементарное вычисление на основе (12) показывает, что в круге $\vartheta < \vartheta_0$ компоненты поля на внешней границе Γ_2 определяются выражениями

$$E_{\vartheta}(\vartheta, \lambda) = \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}(\vartheta, \lambda) = \frac{\varphi_0 \sin \lambda \cos \vartheta}{R \sin \vartheta_0},$$

$$E_{\lambda}(\vartheta, \lambda) = \frac{1}{R \sin \vartheta} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(\vartheta, \lambda) = \frac{\varphi_0 \cos \lambda}{R \sin \vartheta_0},$$

где $R = R_E + H$ – радиус внешней границы, а тогда

$$|E_{\perp}(\vartheta, \lambda)|^2 = E_{\vartheta}(\vartheta, \lambda)^2 + E_{\lambda}(\vartheta, \lambda)^2 =$$

$$= \frac{\varphi_0^2 (1 - \sin^2 \lambda \sin^2 \vartheta)}{R^2 \sin^2 \vartheta_0} = \frac{1}{R^2} \left(\frac{\varphi_0^2}{\sin^2 \vartheta_0} - \varphi_{\text{ист}}(\vartheta, \lambda)^2 \right),$$

то есть внутри этого круга линии уровня поперечной компоненты возмущения поля и возмущения потенциала совпадают; такого же совпадения можно ожидать и в более низких слоях атмосферы ввиду наблюдаемого переноса структуры возмущения потенциала с внешней границы. Вычисление показывает, что в области $\vartheta > \vartheta_0$ рассчитанные линии уровня поперечной компоненты возмущения поля также определяются модулем градиента $\varphi_{\text{ист}}$; в окрестности окружности $\vartheta = \vartheta_0$ численная модель не позволяет достоверно построить линии уровня возмущения поперечной компоненты поля из-за крупных ячеек сетки. Отметим, что даже на внешней границе Γ_2 на этой окружности имеет место скачок величины поперечного возмущения поля.

6. ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Наиболее примечательная особенность описанных в предыдущем разделе результатов расчетов состоит в том, что в области высоких широт возмущение структуры полей и токов, связанное с источниками ионосферной природы, переносится с внешней границы модельной атмосферы вниз (см. рис. 2а–2г и соответствующее обсуждение). Это наблюдение согласуется с существующими представлениями о проникновении в атмосферу возмущений ионосферного и магнитосферного происхождения. Проанализируем этот вопрос чуть более подробно.

Прежде всего отметим, что в соответствии со сделанным ранее замечанием при анализе задачи (13)–

(15) в анализируемой нами ситуации (сферическая геометрия, $\sigma = \sigma(r, \vartheta)$, $\varphi_{\text{ист}}(R_E + H, \vartheta, \lambda + \pi) = -\varphi_{\text{ист}}(R_E + H, \vartheta, \lambda)$) мы можем сразу считать, что $\varphi(r, \vartheta, \lambda) = -\varphi(r, \vartheta, \lambda + \pi)$ и $W = 0$ из соображений симметрии. Это означает, что уравнение (14) выполняется автоматически и задача сводится к решению уравнения (13) с граничными условиями

$$\varphi(\mathbf{r})|_{\Gamma_1} = 0, \quad \varphi(\mathbf{r})|_{\Gamma_2} = \varphi_{\text{ист}}(\mathbf{r}). \quad (16)$$

Если переписать уравнение (13) в координатах, то мы получим

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sigma \sin \vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \right) = 0. \quad (17)$$

Согласно используемой нами параметризации, высотный профиль проводимости изменяется с широтой достаточно медленно, а в области высоких широт (выше $\sim 60^\circ$) вообще не изменяется [Slyunyaev et al., 2015]. Нетрудно убедиться, что в этой области, где профиль проводимости не зависит от ϑ и λ , переносу структуры возмущения потенциала с внешней границы модельной атмосферы в ее нижние слои соответствует отбрасывание в уравнении (17) членов с производными по поперечным координатам. Действительно, такой перенос соответствует ситуации, когда вертикальный профиль потенциала просто масштабируется в зависимости от его значения на внешней границе, то есть мы, по сути, имеем дело с одномерной задачей (см. рис. 1а и рис. 1б).

Пусть $\varphi_0(\mathbf{r})$ – решение редуцированного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sigma \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} \right) = 0 \quad (18)$$

с теми же граничными условиями (16). Интегрированием последнего уравнения нетрудно установить, что

$$\varphi_0(r, \vartheta, \lambda) = \varphi_{\text{ист}}(R_E + H, \vartheta, \lambda) \times$$

$$\times \int_{R_E}^r \frac{d\xi}{\xi^2 \sigma(\xi, \vartheta, \lambda)} \bigg/ \int_{R_E}^{R_E+H} \frac{d\xi}{\xi^2 \sigma(\xi, \vartheta, \lambda)}, \quad (19)$$

из этой формулы наглядно видно, что в области высоких широт, где проводимость не зависит от ϑ и λ , решение задачи (16), (18) действительно характеризуется проецированием структуры распределения $\varphi_{\text{ист}}(\mathbf{r})$ в нижележащие слои атмосферы.

Таким образом, результаты наших расчетов можно интерпретировать как свидетельство в пользу близости решения задачи (16), (17) (или, что то же самое, задачи (13)–(15)) к $\varphi_0(\mathbf{r})$. Если

обозначить это решение через $\varphi(\mathbf{r})$ и представить его в виде $\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_0(\mathbf{r}) + \varphi_1(\mathbf{r})$, то из (17) и (18) трудно получить уравнение для $\varphi_1(\mathbf{r})$:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\sigma(\mathbf{r}) \operatorname{grad} \varphi_1(\mathbf{r})) = \\ = - \left[\frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sigma \sin \vartheta \frac{\partial \varphi_0}{\partial \vartheta} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\sigma \frac{\partial \varphi_0}{\partial \lambda} \right) \right] (\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (20)$$

с граничными условиями

$$\varphi_1(\mathbf{r})|_{\Gamma_1} = 0, \quad \varphi_1(\mathbf{r})|_{\Gamma_2} = 0.$$

Как видно из формулы (19), правая часть (20) определяется горизонтальными производными от $\varphi_{\text{ист}}(\mathbf{r})$ и $\sigma(\mathbf{r})$. В рассматриваемой нами задаче эти величины меняются достаточно медленно с изменением ϑ и λ , поэтому и правая часть (20) представляет собой малую величину. Если бы эта правая часть равнялась нулю, то мы бы имели $\varphi_1(\mathbf{r}) \equiv 0$ в силу единственности решения; отсюда ввиду регулярности решения задачи ясно, что при малости правой части (20) в некотором смысле должно быть малым и решение $\varphi_1(\mathbf{r})$. Это рассуждение качественно объясняет наблюдаемую в наших расчетах близость $\varphi(\mathbf{r})$ к $\varphi_0(\mathbf{r})$, хотя получить конкретные математические оценки, которые не были бы очень грубыми, в данном случае затруднительно. С другой стороны, вертикальный масштаб задачи $H = 70$ км значительно меньше характерных масштабов любых поперечных возмущений параметров; это также косвенно свидетельствует о том, что локально задача будет сводиться к одномерной, описываемой уравнением (18) с решением (19). Отметим, что к похожему выводу при рассмотрении подобной задачи пришли Денисенко и Помозов [2010].

Таким образом, в рассматриваемой нами модельной задаче (13)–(15) внешнее возмущение, сосредоточенное главным образом в полярной области, непосредственно проецируется в нижние слои атмосферы, а причина этого в конечном счете сводится к тому, что при медленном изменении параметров задачи в поперечном направлении задача становится квазиодномерной. Из общих соображений ясно, что квазиодномерное описание на основе (18) будет хорошо характеризовать задачу и в более общем случае (когда плавное внешнее возмущение не ограничено полярной областью). Однако, как видно из решения (19), вне полярных областей, где профиль проводимости зависит от ϑ и λ , возмущение $\varphi_{\text{ист}}(\mathbf{r})$ при проецировании в нижележащие слои атмосферы может несколько искажаться.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Источники ГЭЦ ионосферной и магнитосферной природы могут быть естественным образом включены в распределенные численные модели ГЭЦ путем введения в граничные условия на внешней границе модельной атмосферы возмущения потенциала, задаваемого с точностью до неизвестной постоянной (или, эквивалентно, путем задания возмущения тангенциальной компоненты электрического поля). Расчеты показывают, что в полярных областях, где модельный профиль проводимости практически не зависит от широты и долготы, задаваемое возмущение потенциала проецируется в более низкие слои атмосферы, сохраняя свою структуру. Это является следствием квазиодномерности задачи в условиях медленного изменения всех параметров с широтой и долготой при приблизительно постоянном профиле проводимости. Пользуясь квазиодномерным приближением, возмущение, создаваемое внешними генераторами ГЭЦ, с хорошей точностью можно рассчитать аналитически во всей атмосфере; тем не менее рассмотренный в этой работе общий подход позволяет автоматически учитывать вклад этих источников при моделировании ГЭЦ в современных численных моделях наряду со вкладом грозových генераторов.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ (4)–(6)

Пусть $\varphi_1(\mathbf{r})$ и $\varphi_2(\mathbf{r})$ – два решения задачи (4)–(6) с константами U_1 и U_2 соответственно. Тогда для разности $\delta\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_1(\mathbf{r}) - \varphi_2(\mathbf{r})$ мы можем записать систему уравнений

$$\operatorname{div}(\sigma(\mathbf{r}) \operatorname{grad} \delta\varphi(\mathbf{r})) = 0, \quad (9.1)$$

$$\oint_{\Gamma_1} \sigma(\mathbf{r}) \operatorname{grad} \delta\varphi(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) \, ds(\mathbf{r}) = 0, \quad (9.2)$$

$$\delta\varphi(\mathbf{r})|_{\Gamma_1} = 0, \quad \delta\varphi(\mathbf{r})|_{\Gamma_2} = \delta U \quad (9.3)$$

с $\delta U = U_1 - U_2$. Интегрируя уравнение (9.1) по области Ω , переходя к интегралу по границе и используя соотношение (9.2), мы получаем, что также

$$\oint_{\Gamma_2} \sigma(\mathbf{r}) \operatorname{grad} \delta\varphi(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) \, ds(\mathbf{r}) = 0. \quad (9.4)$$

Заметим, что в правой части тождества (здесь и далее $d\mathbf{r}$ указывает на интеграл по объему)

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{r}) |\text{grad} \delta\varphi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} = \\ & = \int_{\Omega} \text{div}(\delta\varphi(\mathbf{r}) \sigma(\mathbf{r}) \text{grad} \delta\varphi(\mathbf{r})) d\mathbf{r} - \\ & - \int_{\Omega} \delta\varphi(\mathbf{r}) \text{div}(\sigma(\mathbf{r}) \text{grad} \delta\varphi(\mathbf{r})) d\mathbf{r} \end{aligned}$$

второе слагаемое равно нулю в силу (9.1), а первое можно преобразовать к виду (здесь и далее мы предполагаем, что вектор $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ направлен наружу по отношению к области Ω как на Γ_1 , так и на Γ_2)

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \text{div}(\delta\varphi(\mathbf{r}) \sigma(\mathbf{r}) \text{grad} \delta\varphi(\mathbf{r})) d\mathbf{r} = \\ & = \oint_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \delta\varphi(\mathbf{r}) \sigma(\mathbf{r}) \text{grad} \delta\varphi(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) ds(\mathbf{r}), \end{aligned}$$

что также равно нулю в силу (9.3) и (9.4). Таким образом,

$$\int_{\Omega} \sigma(\mathbf{r}) |\text{grad} \delta\varphi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} = 0,$$

откуда $\delta\varphi(\mathbf{r}) = \text{const}$. Но вместе с первым из уравнений (9.3) это означает, что $\delta\varphi(\mathbf{r}) \equiv 0$, т.е. $\varphi_1(\mathbf{r}) \equiv \varphi_2(\mathbf{r})$ и $U_1 = U_2$. Строгое доказательство существования и единственности решения задачи (4)–(6) в подходящем функциональном пространстве приводится в работе Kalinin and Slyunyaev [2017].

ПРИЛОЖЕНИЕ В

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ
ЗАДАЧ (7), (8) И (9), (10)

Поскольку задача (9), (10) может рассматриваться как частный случай задачи (7), (8), достаточно реализовать решатель для задачи (7), (8). Для решения этой задачи мы используем метод конечных элементов.

Сначала сформулируем эквивалентную задачу в виде интегрального тождества. Легко видеть, что задача решения уравнения (7) эквивалентна задаче поиска такой функции $\varphi(\mathbf{r})$, которая удовлетворяла бы интегральному соотношению

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \psi(\mathbf{r}) \text{div}(\sigma(\mathbf{r}) \text{grad} \varphi(\mathbf{r})) d\mathbf{r} = \\ & = \int_{\Omega} \psi(\mathbf{r}) \text{div} \mathbf{j}^{\text{ист}}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \end{aligned} \tag{10.1}$$

для любой функции $\psi(\mathbf{r})$, подчиняющейся условию

$$\psi(\mathbf{r})|_{\Gamma_1} = 0, \quad \psi(\mathbf{r})|_{\Gamma_2} = 0. \tag{10.2}$$

Переписывая тождество (10.1) в виде

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \text{div}(\psi(\mathbf{r}) \sigma(\mathbf{r}) \text{grad} \varphi(\mathbf{r})) d\mathbf{r} - \\ & - \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{r}) \text{grad} \varphi(\mathbf{r}) \cdot \text{grad} \psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \\ & = \int_{\Omega} \text{div}(\psi(\mathbf{r}) \mathbf{j}^{\text{ист}}(\mathbf{r})) d\mathbf{r} - \int_{\Omega} \mathbf{j}^{\text{ист}}(\mathbf{r}) \cdot \text{grad} \psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \end{aligned}$$

и переходя к интегралам по границе, мы получаем

$$\begin{aligned} & \oint_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \psi(\mathbf{r}) \sigma(\mathbf{r}) \text{grad} \varphi(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) ds(\mathbf{r}) - \\ & - \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{r}) \text{grad} \varphi(\mathbf{r}) \cdot \text{grad} \psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \\ & = \oint_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \psi(\mathbf{r}) \mathbf{j}^{\text{ист}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) ds(\mathbf{r}) - \\ & - \int_{\Omega} \mathbf{j}^{\text{ист}}(\mathbf{r}) \cdot \text{grad} \psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \end{aligned}$$

что с учетом условий (10.2) дает итоговое тождество, эквивалентное (7):

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{r}) \text{grad} \varphi(\mathbf{r}) \cdot \text{grad} \psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \\ & = \int_{\Omega} \mathbf{j}^{\text{ист}}(\mathbf{r}) \cdot \text{grad} \psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \end{aligned} \tag{10.3}$$

для всех функций $\psi(\mathbf{r})$, удовлетворяющих (10.2). Более строгое доказательство эквивалентности соотношения (10.3) уравнению (7) приведено, например, в работе [Kalinin and Slyunyaev, 2017].

Теперь воспользуемся методом конечных элементов. Будем искать решение задачи (7), (8) в виде

$$\varphi(\mathbf{r}) \approx \sum_{i=1}^N \varphi_i \psi_i(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^M \varphi_i \psi_i(\mathbf{r}) + \sum_{i=M+1}^N \varphi_i \psi_i(\mathbf{r}),$$

где $\psi_1(\mathbf{r}), \psi_2(\mathbf{r}), \dots, \psi_N(\mathbf{r})$ – линейные лагранжеские конечные элементы в области Ω , пронумерованные таким образом, что на границе зануляются в точности первые M из них, а $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ – неизвестные коэффициенты (степени свободы). Тогда тождество (10.3) приближается уравнениями ($j = 1, 2, \dots, M$)

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{r}) \left(\sum_{i=1}^N \varphi_i \text{grad} \psi_i(\mathbf{r}) \right) \cdot \text{grad} \psi_j(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \\ & = \int_{\Omega} \mathbf{j}^{\text{ист}}(\mathbf{r}) \cdot \text{grad} \psi_j(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \end{aligned}$$

– иными словами, задача сводится к системе линейных уравнений ($j = 1, 2, \dots, M$)

$$\sum_{i=1}^N A_{ji} \varphi_i = b_j,$$

где

$$A_{ji} = \sum_{C \in T_{\Omega}} \int_C \sigma(\mathbf{r}) \operatorname{grad} \psi_i(\mathbf{r}) \cdot \operatorname{grad} \psi_j(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (10.4)$$

и

$$b_j = \sum_{C \in T_{\Omega}} \int_C \mathbf{j}^{\text{ист}}(\mathbf{r}) \cdot \operatorname{grad} \psi_j(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (10.5)$$

здесь через T_{Ω} обозначена триангуляция (то есть множество ячеек) всей области Ω , а переменная C перечисляет соответствующие ячейки. Граничные условия (8) учитываются добавлением в систему $N - M$ уравнений вида $\varphi_i = 0$ или $\varphi_i = \varphi_{\text{ист}}(\mathbf{r}_i)$ (в зависимости от того, соответствует данная степень свободы компоненте границы Γ_1 или компоненте границы Γ_2 ; \mathbf{r}_i — координаты узла триангуляции, соответствующего φ_i) для $i = M + 1, M + 2, \dots, N$.

Интегралы по ячейкам в (10.4) и (10.5) мы вычисляем с помощью квадратурных формул Гаусса с пятью точками по каждой из координат. Интегралы по внешней границе атмосферы, входящие в соотношение (11), с помощью метода конечных элементов сводятся к интегралам по ячейкам F триангуляции этой границы T_{Γ_2} :

$$\oint_{\Gamma_2} \sigma(\mathbf{r}) \operatorname{grad} \varphi(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) ds(\mathbf{r}) = \oint_{\Gamma_2} \sigma(\mathbf{r}) \left(\sum_{i=1}^N \varphi_i \operatorname{grad} \psi_i(\mathbf{r}) \right) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) ds(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N k_i \varphi_i,$$

где

$$k_i = \sum_{F \in T_{\Gamma_2}} \oint_F \sigma(\mathbf{r}) \operatorname{grad} \psi_i(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) ds(\mathbf{r}),$$

интегралы по ячейкам в последнем выражении также вычисляются с помощью квадратурных формул Гаусса с пятью точками по каждой из координат.

8. БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят Е.А. Мареева за ценные замечания, высказанные при подготовке данной работы.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Авторы благодарят Российский научный фонд за финансовую поддержку данного исследования (проект № 18-77-10061). Работа выполнена сотрудниками лаборатории электромагнитного окружения Земли, созданной при поддержке гранта Минобрнауки (соглашение № 075-15-2019-1892).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Анисимов С.В., Мареев Е.А. Геофизические исследования глобальной электрической цепи // Физика Земли. № 10. С. 8–18. 2008.
- Денисенко В.В., Помозов Е.В. Расчет глобальных электрических полей в земной атмосфере // Вычислительные технологии. Т. 15. № 5. С. 34–50. 2010.
- Калинин А.В., Слюняев Н.Н., Мареев Е.А. и др. Стационарные и нестационарные модели глобальной электрической цепи: корректность, аналитические соотношения, численная реализация // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. Т. 50. № 3. С. 355–364. 2014.
- Мареев Е.А. Достижения и перспективы исследований глобальной электрической цепи // УФН. Т. 180. № 5. С. 527–534. 2010.
- Морозов В.Н. Модель нестационарного электрического поля в нижней атмосфере // Геомагнетизм и аэрномия. Т. 45. № 2. С. 268–278. 2005.
- Морозов В.Н. Проникновение нестационарных ионосферных электрических полей в нижние слои атмосферы в модели глобальной электрической цепи // Геомагнетизм и аэрномия. Т. 58. № 1. С. 119–124. 2018.
- Alzetta G., Arndt D., Bangerth W. et al. The deal.II library, Version 9.0 // J. Numer. Math. V. 26. № 4. P. 173–183. 2018.
- Bangerth W., Hartmann R., Kanschat G. deal.II—A general purpose object-oriented finite element library // ACM Trans. Math. Softw. V. 33. № 4. 24. 2007.
- Baumgaertner A.J.G., Thayer J.P., Neely III R.R. et al. Toward a comprehensive global electric circuit model: Atmospheric conductivity and its variability in CESM1(WACCM) model simulations // J. Geophys. Res. Atmos. V. 118. № 16. P. 9221–9232. 2013.
- Baumgaertner A.J.G., Lucas G.M., Thayer J.P. et al. On the role of clouds in the fair weather part of the global electric circuit // Atmos. Chem. Phys. V. 14. № 16. P. 8599–8610. 2014.
- Bayona V., Flyer N., Lucas G.M., Baumgaertner A.J.G. A 3-D RBF-FD solver for modeling the atmospheric global electric circuit with topography (GEC-RBFFD v1.0) // Geosci. Model Dev. V. 8. № 10. P. 3007–3020. 2015.
- Browning G.L., Tzur I., Roble R.G. A global time-dependent model of thunderstorm electricity. Part I: Mathematical properties of the physical and numerical models // J. Atmos. Sci. V. 44. № 15. P. 2166–2177. 1987.
- Dejnakarindra M., Inan U.S., Carpenter D.L. Transient tropospheric electric fields resulting from sudden changes in ionospheric conductivity // J. Geophys. Res. V. 90. № A12. P. 12271–12281. 1985.
- Denisenko V.V., Ampferer M., Pomozov E.V. et al. On electric field penetration from ground into the ionosphere // J. Atmos. Solar-Terr. Phys. V. 102. P. 341–353. 2013.
- Denisenko V.V., Nesterov S.A., Boudjada M.Y. et al. A mathematical model of quasistationary electric field penetration from ground to the ionosphere with inclined magnetic field // J. Atmos. Solar-Terr. Phys. V. 179. P. 527–537. 2018.
- Dutra S.L.G., Gonzalez A.L.C., Gonzalez W.D. et al. Downward mapping of quasi-static ionospheric electric

- fields at low latitudes during fair weather // *J. Atmos. Solar-Terr. Phys.* V. 54. № 3–4. P. 223–230. 1992.
- *Hays P.B., Roble R.G.* A quasi-static model of global atmospheric electricity: 1. The lower atmosphere // *J. Geophys. Res.* V. 84. № A7. P. 3291–3305. 1979.
- *Jánský J., Pasko V.P.* Charge balance and ionospheric potential dynamics in time-dependent global electric circuit model // *J. Geophys. Res. – Space.* V. 229. № 12. P. 10184–10203. 2014.
- *Jánský J., Lucas G.M., Kalb C. et al.* Analysis of the diurnal variation of the global electric circuit obtained from different numerical models // *J. Geophys. Res. Atmos.* V. 122. № 23. P. 12906–12917. 2017.
- *Kalb C., Deierling W., Baumgaertner A. et al.* Parameterizing total storm conduction currents in the Community Earth System Model // *J. Geophys. Res. Atmos.* V. 121. № 22. P. 13715–13734. 2016.
- *Kalinin A.V., Slyunyaev N.N.* Initial-boundary value problems for the equations of the global atmospheric electric circuit // *J. Math. Anal. Appl.* V. 450. № 1. P. 112–136. 2017.
- *Kartalev M.D., Rycroft M.J., Papitashvili V.O.* A quantitative model of the effect of global thunderstorms on the global distribution of ionospheric electrostatic potential // *J. Atmos. Solar-Terr. Physics.* V. 66. № 13–14. P. 1233–1240. 2004.
- *Kuo C.L., Lee L.C., Huba J.D.* An improved coupling model for the lithosphere-atmosphere-ionosphere system // *J. Geophys. Res. – Space.* V. 119. № 4. P. 3189–3205. 2014.
- *Lucas G.M., Baumgaertner A.J.G., Thayer J.P.* A global electric circuit model within a community climate model // *J. Geophys. Res. Atmos.* V. 120. № 23. P. 12054–12066. 2015.
- *Makino M., Ogawa T.* Responses of atmospheric electric field and air–earth current to variations of conductivity profiles // *J. Atmos. Terr. Phys.* V. 46. № 5. P. 431–445. 1984.
- *Mareev E.A., Volodin E.M.* Variation of the global electric circuit and ionospheric potential in a general circulation model // *Geophys. Res. Lett.* V. 41. № 24. P. 9009–9016. 2014.
- *Odzimek A., Lester M., Kubicki M.* EGATEC: A new high-resolution engineering model of the global atmospheric electric circuit—Currents in the lower atmosphere // *J. Geophys. Res.* V. 115. № D18. D18207. 2010.
- *Park C.G.* Downward mapping of high-latitude ionospheric electric fields to the ground // *J. Geophys. Res.* V. 81. № 1. P. 168–174. 1976.
- *Park C.G., Dejnakarindra M.* Penetration of thundercloud electric fields into the ionosphere and magnetosphere: 1. Middle and subauroral latitudes // *J. Geophys. Res.* V. 78. № 28. P. 6623–6633. 1973.
- *Roble R.G., Hays P.B.* A quasi-static model of global atmospheric electricity: 2. Electrical coupling between the upper and lower atmosphere // *J. Geophys. Res.* V. 84. № A12. P. 7247–7256. 1979.
- *Rycroft M.J., Harrison R.G., Nicoll K.A. et al.* An overview of Earth’s global electric circuit and atmospheric conductivity // *Space Sci. Rev.* V. 137. № 1–4. P. 83–105. 2008.
- *Slyunyaev N.N., Mareev E.A., Zhidkov A.A.* On the variation of the ionospheric potential due to large-scale radioactivity enhancement and solar activity // *J. Geophys. Res. – Space.* V. 120. № 8. P. 7060–7082. 2015.
- *Stansbery E.K., Few A.A., Geis P.B.* A global model of thunderstorm electricity // *J. Geophys. Res.* V. 98. № D9. P. 16591–16603. 1993.
- *Tinsley B.A., Zhou L.* Initial results of a global circuit model with variable stratospheric and tropospheric aerosols // *J. Geophys. Res.* V. 111. № D16. D16205. 2006.
- U.S. Standard Atmosphere. Washington, D.C.: U.S. Government Printing Office, 227 p. 1976.
- *Volland H.* Mapping of the electric field of the *Sq* current into the lower atmosphere // *J. Geophys. Res.* V. 77. № 10. P. 1961–1965. 1972.
- *Volland H.* Atmospheric Electrodynamics. Physics and Chemistry in Space Series. Berlin, Heidelberg: Springer, 208 p. 1984.
- *Werner D.H., Ferraro A.J.* A finite difference solution of the polar electrojet current mapping boundary value problem // *J. Geophys. Res.* V. 96. № A2. P. 1369–1378. 1991.
- *Williams E., Mareev E.* Recent progress on the global electrical circuit // *Atmos. Res.* V. 135–136. P. 208–227. 2014.
- *Williams E.R.* The global electrical circuit: A review // *Atmos. Res.* V. 91. № 2–4. P. 140–152. 2009.
- *Wilson C.T.R.* Investigations on lightning discharges and on the electric field of thunderstorms // *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A.* V. 221. P. 73–115. 1921.
- *Wilson C.T.R.* The electric field of a thundercloud and some of its effects // *Proc. Phys. Soc. London.* V. 37. P. 32D–37D. 1924.
- *Zhou L., Tinsley B.A.* Production of space charge at the boundaries of layer clouds // *J. Geophys. Res.* V. 112. № D11. D11203. 2007.