

УДК 621.3.011.3

**СОПОСТАВИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВЫРАЖЕНИЙ ПО РАСЧЕТУ
ИНДУКТИВНОСТЕЙ КАТУШЕК С СИММЕТРИЕЙ ВРАЩЕНИЯ**© 2019 г. Г. Н. Цицикян¹, *, М. Ю. Антипов¹, **¹Филиал “ЦНИИ СЭТ” ФГУП “Крыловский государственный научный центр”,
Санкт-Петербург, Россия

*e-mail: george.20021940@mail.ru

**e-mail: posich@mail.ru

Поступила в редакцию 25.06.2019 г.

После доработки 07.08.2019 г.

Принята к публикации 12.08.2019 г.

В известном руководстве по расчету индуктивностей П.Л. Калантарова и Л.А. Цейтлина (изд. 3, 1986 г.), содержатся формулы, таблицы и кривые для расчета собственных и взаимных индуктивностей проводов, контуров и катушек различной геометрии. При расчете конструкций, обладающих симметрией вращения, их индуктивности и взаимные индуктивности, как правило, записаны в виде выражений, содержащих величины, значения которых сведены в таблицы или даны в виде рядов в зависимости от отношений, определяемых геометрическими размерами (главы 6 и 7), и число учитываемых членов ряда связано с допускаемой погрешностью. Вместе с тем для получения практических оценок весьма важно наличие аппроксимирующих формул при соблюдении достаточной точности расчета, а тем более готовых замкнутых выражений в пределах общепринятой идеализации. В этом контексте важную роль играют замкнутые выражения для индуктивности катушек прямоугольного сечения и взаимной индуктивности двухслойных соленоидов, основанных на публикации А. Gray “Absolute Measurements in Electricity and Magnetism”, Macmillan and Co. Ltd, 1921, но не получившей распространения в отечественной литературе. Этому вопросу посвящена представленная статья, в которой с целью проверки предпринят соответствующий сопоставительный анализ.

Ключевые слова: индуктивность катушек с симметрией вращения, индуктивность соленоида, взаимная индуктивность двухслойного соленоида, сопоставительный анализ

DOI: 10.1134/S0002331019040150

В литературе по расчету индуктивностей катушек с симметрией вращения особое место занимают формулы, представленные в [1, 2], которые практически не встречаются в известной учебной и справочной литературе, и поэтому требуют дополнительной проверки и подтверждения. Учитывая их простоту, [1, формулы приложения 10–12], целесообразно провести сопоставительный анализ с известными рекомендациями, также имеющими свои ограничения, и на этой основе сформулировать соответствующие выводы о возможности или невозможности их применения. В работах [1, 2] даны одни и те же формулы для кругового кольца прямоугольного сечения, а в работе [1] — для индуктивности соленоида и для взаимной индуктивности концентрических соленоидов в общем случае неодинаковой длины. Первая из перечисленных конфигураций показана на рис. 1.

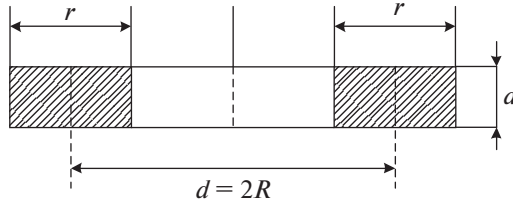


Рис. 1. Катушка прямоугольного сечения.

Индуктивность катушки прямоугольного сечения, изображенной на рис.1, на основании формулы (10) приложения [1] определяется выражением в следующей откорректированной форме записи:

$$L = \mu_0 R \left(\ln \frac{8R}{R_1} - 2 \right) = \mu_0 R \left(\ln \frac{8R}{(r^2 + a^2)^{1/2}} + \ln \frac{(r^2 + a^2)^{1/2}}{R_1} - 2 \right), \quad (1)$$

где в соответствии [1, 2] и с обозначениями (рис. 1)

$$\ln \frac{R_1}{(r^2 + a^2)^{1/2}} = -\frac{r^2}{12a^2} \ln \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{a^2}{12r^2} \ln \left(1 + \frac{r^2}{a^2} \right) + \frac{2r}{3a} \operatorname{arctg} \frac{a}{r} + \frac{2a}{3r} \operatorname{arctg} \frac{r}{a} - \frac{25}{12}.$$

Величина R_1 в выражении (1) является средним геометрическим расстоянием площади прямоугольника со сторонами r и a .

В результате выражение (1) перезаписывается в виде:

$$L = \mu_0 R \left(\ln \frac{8R}{(r^2 + a^2)^{1/2}} + \frac{r^2}{12a^2} \ln \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{a^2}{12r^2} \ln \left(1 + \frac{r^2}{a^2} \right) - \frac{2r}{3a} \operatorname{arctg} \frac{a}{r} - \frac{2a}{3r} \operatorname{arctg} \frac{r}{a} + \frac{1}{12} \right), \quad (2)$$

которое при $r \ll a$ стремится к пределу:

$$L_{r=a} = \mu_0 R \left(\ln \frac{8R}{a} + \frac{1}{12} - \frac{2}{3} + \frac{1}{12} \right) = \mu_0 R \left(\ln \frac{8R}{a} - \frac{1}{2} \right). \quad (3)$$

Умножая выражение (3) на w^2 , где w – количество витков, распределенных вдоль a (рис. 1), и заменяя в (3) обозначение R на $\frac{d}{2}$ получим выражение, известное как аппроксимирующая формула Уилера [3]:

$$L = \frac{\mu_0 w^2 d}{2} \left(\ln \frac{4d}{a} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\mu_0 w^2 d}{2} \left(\ln \left(\frac{d\pi}{a} \right) - 0.2584 \right). \quad (4)$$

Так как выражение (2) при перестановке r на a и наоборот, остается неизменным, то при $a \ll r$ (рис. 1) индуктивность (1) оказывается равной

$$L = \mu_0 R \left(\ln \frac{8R}{r} - \frac{1}{2} \right). \quad (5)$$

Формула (5) может быть получена из выражений (6–9) и (6–10) справочника [4] при $w = 1, 0$ и $\rho = \frac{r}{2R} < 0.5$, если в (6–10) пренебречь всеми членами по порядку малости равными или большими, чем ρ^2 , и тогда будем иметь:

$$L = \frac{\mu_0}{8\pi} d 4\pi \left(\ln \frac{4}{\rho} - \frac{1}{2} \right) = \mu_0 R \left(\ln \frac{8R}{r} - \frac{1}{2} \right),$$

т.е. формулу (5).

Теперь можно сопоставить численные значения для L при $r = a$, т.е. для дисковой катушки квадратного сечения по выражению (2) с численным значением, вытекающим из формул справочника (6–13) и (6–14) при $\alpha = \frac{a}{d} = \frac{a}{2R} \leq 0.2$.

Тогда из (6–13) и (6–14) получаем следующее приближение ($w = 1, 0$):

$$L \cong \frac{\mu_0 R}{2} \left[\ln 8 \frac{4R^2}{a^2} - 1.6967 \right],$$

по которому при $\frac{a}{2R} = 0.2$ имеем: $1.8008\mu_0 R$, а в соответствии с выражением (2) при $r = a$:

$$\begin{aligned} L &= \mu_0 R \left[\ln \frac{8}{0.4\sqrt{2}} + \frac{1}{6} \ln 2 - \frac{4}{3} \operatorname{arctg}(1) + \frac{1}{12} \right] = \\ &= \mu_0 R [2.6492 + 0.1155 - 1.0472 + 0.0833] = 1.8007\mu_0 R, \end{aligned}$$

и разницей можно пренебречь.

Рассмотрим характерный случай, когда средний диаметр катушки квадратного сечения равен утроенному размеру стороны сечения, т.е. $r = a$ и $2R = d = 3a$ (рис. 1). Тогда согласно выражению (2) получим, что

$$\begin{aligned} L &= \mu_0 R \left(\ln \frac{12}{\sqrt{2}} + \frac{1}{6} \ln 2 - \frac{4}{3} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{12} \right) = \\ &= \mu_0 R (2.13833 + 0.11552 - 1.0472 + 0.08333) = 1.29\mu_0 R \end{aligned}$$

против $1.352\mu_0 R$ при $w = 1.0$, и при $d = 2R$ в соответствии с формулой (6.15) в [4].

Сопоставим выражения для индуктивности круглого кольца в соответствии с рис. 2. Для индуктивности круглого кольца со средним радиусом R и радиусом r_0 сечения кольца в [5, 6] рекомендовано следующее выражение:

$$L \approx L_{\text{ВНЕШ}} = \mu_0 R \left(\ln \frac{8R}{r_0} - 2 \right). \quad (6)$$

Выражение (6) можно получить на основе представления для взаимной индуктивности двух соосных круговых контуров, расположенных в одной плоскости с радиусами R и $(R - r_0)$ через сферическую функцию Лежандра с полуцелым индексом:

$$M = L_{\text{ВНЕШ}} = \mu_0 \sqrt{R(R - r_0)} Q_{1/2}(g), \quad (7)$$

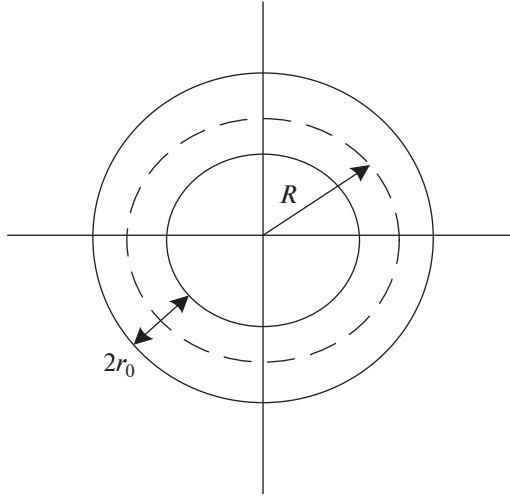


Рис. 2. Круглое кольцо со средним радиусом R и радиусом r_0 самого кольца.

где $g = \frac{R^2 + (R - r_0)^2}{2R(R - r_0)} = 1 + \frac{(r_0/R)^2}{2\left(1 - \frac{r_0}{R}\right)} \cong 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{r_0}{R}\right)^2 = 1 + \Delta g$, и при этом выражение для

$Q_{1/2}(g)$ при $\Delta g \ll 1$ может быть записано в виде [7, формула П.П-4]:

$$Q_{1/2}\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{r_0}{R}\right)^2\right) \approx \frac{1}{2} \left[\frac{2 + \frac{1}{2}\left(\frac{r_0}{R}\right)^2}{\frac{1}{2}\left(\frac{r_0}{R}\right)^2} - 1.2274 \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\ln \left[1 + 4\left(\frac{R}{r_0}\right)^2 \right] - 1.2274 \right] \approx \frac{1}{2} \left(2 \ln \frac{2R}{r_0} - 1.2274 \right) = \ln \frac{2R}{r_0} - 0.6137.$$

Окончательно

$$L_{\text{ВНЕШ}} = \mu_0 (R(R - r_0))^{1/2} \left[\ln \frac{8R}{r_0} - \ln 4 - 0.6137 \right] =$$

$$= \mu_0 (R(R - r_0))^{1/2} \left[\ln \frac{8R}{r_0} - 2 \right], \quad (8)$$

учитывая, что $\ln 4 = 1.3863$.

При $r_0 \ll R$ разницей между (6) и (8) можно пренебречь.

Продолжая сопоставления, заметим, что формула (11) для индуктивности соленоида [1] (рис. 3), записанная в виде

$$L = \mu_0 R w^2 K, \quad (9)$$

где $K = \frac{2}{3} \left\{ \frac{K(k) + (\operatorname{tg}^2 \alpha - 1)E(k)}{\sin \alpha} - \operatorname{tg}^2 \alpha \right\}$, проверяется при условии, что $K(k)$ и $E(k)$

являются полными эллиптическими интегралами 1-го и 2-го рода от k , а не от k' , свя-

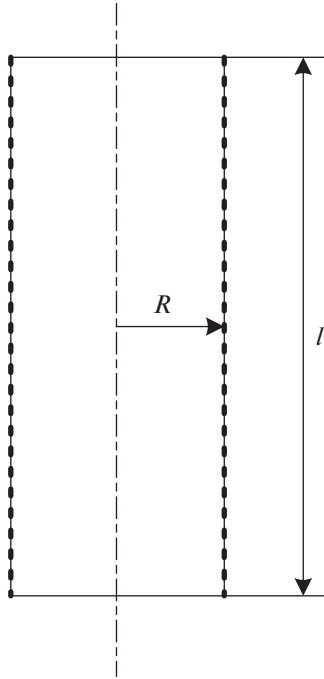


Рис. 3. Соленоид длиной l и радиусом R .

занных между собой соотношением $k^2 + (k')^2 = 1$, и при этом $(k')^2 = \frac{l^2}{l^2 + (2R)^2}$ и $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{l}{2R}$. Тогда формула (9) может быть переписана в виде [8]:

$$L = \mu_0 \frac{8R^3}{3\varepsilon^2} \left\{ -1 + k^{-3} (1 - k^2) K + k^{-3} (2k^2 - 1) E \right\}, \quad \text{где } \varepsilon = l/w. \quad (10)$$

Следует обратить внимание и на аппроксимирующее выражение для индуктивности соленоида с шагом между витками, обозначенным, как s и диаметром витка d , предложенное в [9] в виде формулы (9), которая при введенных обозначениях имеет вид:

$$L = \frac{\mu_0 \pi d^2 w^2}{4 \sqrt{d^2 + (w-1)^2 s^2}} = \frac{\mu_0 \pi d^2 w^2}{4 \sqrt{d^2 + l^2}} = - \frac{\mu_0 \pi w^2 d^2 / l}{4 \left[\left(\frac{d}{l} \right)^2 + 1 \right]^{1/2}}, \quad (11)$$

где l — длина соленоида.

Формулу (11) можно сопоставить с формулой Уилера [3]

$$L = \frac{\mu_0 \pi w^2 d^2 / l}{4 \left[1 + 0.45 \frac{d}{l} \right]}. \quad (12)$$

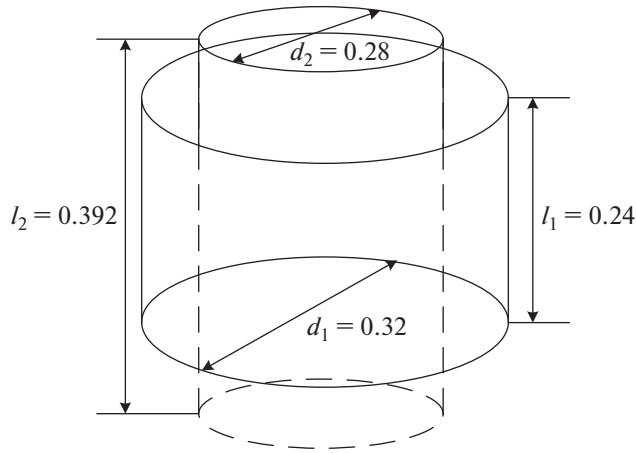


Рис. 4. Двухслойный соленоид с различными длинами слоев в метрах.

Из сопоставления (11) и (12) видно, что различия будут проистекать из сравнения $\left(1 + 0.45 \frac{d}{l}\right) \cdot \left[\left(\frac{d}{l}\right)^2 + 1\right]^{1/2}$.

При $d = l$ имеем 1.45 против 1.414; при $d = 0.5l$: 1.225 и соответственно 1.118, при $d = 1.2l$ – 1.54 и 1.562, $d = 1.35l$ – 1.6075 и 1.68 т.е. разница в диапазоне изменения $\frac{d}{l}$ от 0.5 до 1.35 оказывается сравнительно небольшой.

В работе [8] приведены кривые по оценке погрешности вычислений индуктивности соленоида для большинства из известных работ, посвященных данному вопросу. В литературе [10] приведена замкнутая формула, пригодная как для длинного, так и для короткого соленоида. Эта формула в принятых обозначениях записывается в виде:

$$L = \mu_0 w^2 \frac{d}{2} \left[\ln \left(1 + \frac{\pi d}{2l} \right) + \frac{1}{2.3004 + 3.437 \frac{l}{d} + 1.7636 \left(\frac{l}{d} \right)^2 - \frac{0.47}{\left(0.755 + \frac{d}{l} \right)^{1.44}}} \right]. \quad (13)$$

На практике большое распространение получили двухслойные соленоиды, изображенные на рис. 4, 5. Например, такие двухслойные соленоиды используются в нагрузочных устройствах ТНУ 1000-50-400, которые с успехом применяются для испытаний генераторных агрегатов автономных электростанций.

Для конфигурации двухслойного соленоида, изображенного на рис. 4, результаты расчетов по нижеприведенной формуле (14), заимствованной из [1], а именно:

$$M = \frac{\mu_0 \pi R_2^2 w_1 w_2}{2d} \left[1 + \frac{R_1^2 R_2^2}{8d^4} \left\{ 3 - \frac{l_1^2}{R_2^2} \right\} \right], \quad (14)$$

где $d = \sqrt{R_1^2 + \frac{l_2^2}{4}}$, $R_1 = \frac{d_1}{2}$, $R_2 = \frac{d_2}{2}$, и по формулам (7–9) справочника [4] дают: 0.237×10^{-3} Гн и 0.229×10^{-3} Гн соответственно при $w_1 = 31$ и $w_2 = 50$.

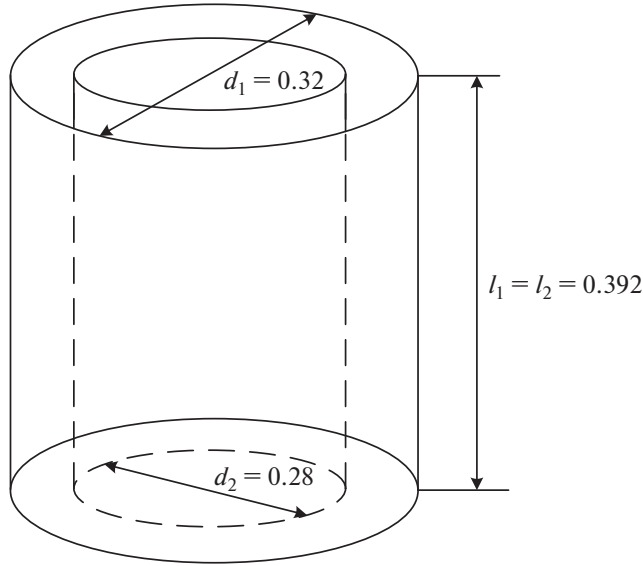


Рис. 5. Двухслойный соленоид со слоями одинаковой длины в метрах.

Продолжая сравнение сопоставим два выражения для взаимной индуктивности концентрических соленоидов одинаковой длины, вытекающих из выражений 7-2, 7-6 и 7-7 [4] в соответствии с рис. 5, и для двухслойного соленоиды по формуле (14) в предположении, что $l_1 = l_2 = l$ и с радиусами слоев $R_2 = \frac{d_2}{2}$ и $R_1 = \frac{d_1}{2}$.

Имеем в соответствии с (14) при $l_1 = l_2 = l$:

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{\mu_0 \pi \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 w_1 w_2}{2 \left(\frac{d_1^2}{4} + \frac{l^2}{4}\right)^{1/2}} \left\{ 1 + \frac{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 \left(\frac{d_2}{2}\right)^2}{8 \left(\frac{d_1^2}{4} + \frac{l^2}{4}\right)^2} \left(3 - \frac{4l^2}{d_2^2} \right) \right\} = \\
 &= \frac{\mu_0 \pi \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 w_1 w_2}{\left(d_1^2 + l^2\right)^{1/2}} \left\{ 1 + \frac{d_1^2 d_2^2}{8 \left(d_1^2 + l^2\right)^2} \left(3 - \frac{4l^2}{d_2^2} \right) \right\}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

В выражениях 7-2, 7-6 и 7-7 [4] ограничимся двумя членами разложения. Тогда по справочнику [4] можем записать:

$$M_{\text{СПР}} = \frac{\mu_0 w_1 w_2 \pi d_2^2 d_1}{l^2 8} \left[-1 + \frac{\left(d_1^2 + 4l^2\right)^{1/2}}{d_1} + \frac{1}{8} \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 \left\{ 1 - \frac{d_1^3}{\left(d_1^2 + 4l^2\right)^{3/2}} \right\} \right]. \tag{16}$$

В частности, при $l = d_1$ из (15) и (16) соответственно находим:

$$M(l = d_1) = \frac{\mu_0 w_1 w_2 \pi d_2^2}{d_1 4\sqrt{2}} \left[1 + \frac{1}{32} \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 \left[3 - 4 \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 \right] \right], \tag{17}$$

$$M_{\text{СПР}} (l = d_1) = \frac{\mu_0 w_1 w_2 \pi d_2^2}{d_1} \frac{1}{8} \left[1.2361 + 0.1138 \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2 \right]. \quad (18)$$

Тогда, например, при $\frac{d_2}{d_1} = 0.8$ получаем, соответственно, $M = 0.1322 \mu_0 w_1 w_2 \pi d_2$, а $M_{\text{СПР}} = 0.1309 \mu_0 w_1 w_2 \pi d_2$, и разница между оценками незначительна.

Для конфигурации двухслойного соленоида, показанного на рис. 5, результаты расчетов по формулам (15) и (16), соответственно, дают: 0.354×10^{-3} Гн и 0.348×10^{-3} Гн, т.е. достаточно близкие величины.

При $l_1 = l_2 = 0$ и $w_1 = w_2 = 1$ из (14) и (15) получаем:

$$M = \frac{\mu_0 \pi R_2^2}{2 R_1} \left[1 + \frac{3}{8} \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 \right]. \quad (19)$$

Полученное выражение согласуется с формулой (5–22) в [4] для взаимной индуктивности двух concentрических контуров радиусов R_1 и R_2 , расположенных в одной плоскости при ограничении первыми двумя членами разложения.

ВЫВОДЫ

Выражение для индуктивности катушки прямоугольного сечения, приведенное в [1, 2] может быть, с учетом корректировки формы записи, использовано без ограничений для получения численных оценок. Для индуктивности соленоида можно использовать формулы (10) и (13). Для коэффициента взаимной индукции между слоями двухслойного соленоида можно пользоваться формулами (14) и (15), а также формулой (19), для двух контуров, расположенных в одной плоскости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Miki A., Hosoya T., Okuyama K. A calculation method for impulse voltage distribution and transferred voltage in transformer winding. IEEE Trans on Power Apparatus and Systems. 1978. T-PAS V. 97. № 3. P. 930–939.
2. Rahimpour E., Christian Y., Feser K., Mohseni H. Transfer Function method to diagnose axial displacement and radial deformation of transformer winding. IEEE Trans. on Power Delivery. 2003. V. 18. № 2. P. 493–505.
3. Wheeler H.A. Inductance formulas for circular and square coils // Proc. IEEE letters. 1982. V. 70. № 12. P. 1449–1451.
4. Калантаров П.Л., Цейтлин Л.А. Расчет индуктивностей: Справочная книга, 3-изд. Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние. 1986. 488 с.
5. Теоретические основы электротехники: в 3-х т. Учебник для вузов. Т. 3 / К.С. Демирчян, Л.Р. Нейман, Н.В. Коровкин, В.П. Чечурин. СПб.: Питер, 2003. 277 с.
6. Fields and waves in communication electronics / Simon Ramo, John R. Whinnery, Theodore Van Duzer, 3rd ed. John Wiley & sons, inc. 1994.
7. Цицикян Г.Н. Векторный потенциал поля медленно движущихся тел в приложении к задачам электродинамической левитации. Известия академии наук. Энергетика. 1994. № 4. С. 130–144.
8. NASA\TM-2013-217918, Magnetic Field Force and Inductance Computation for an Axially Symmetric Solenoid. <http://www.sti.nasa.gov>
9. Robert Weaver. Numerical Methods for inductance calculation. <http://electronbunker.ca/eb/CalcMethods.html>
10. D. W.Knight. Solenoid inductance calculation. <http://g3ynch.info/zdocs/magnetics>

A Comparative Analysis of the Expressions for Calculating Inductances Coils with Rotation Symmetry

G. N. Tsitsikyan^{a, *} and M. Y. Antipov^{a, **}

^aKrylov State Research Centre, SET Branch, SPb., Russia

**e-mail: george.20021940@mail.ru*

***e-mail: posich@mail.ru*

The well-known inductance calculation guidance written by P.L. Kalantarov and L.A. Zeitlin (ed. 3, 1986) contains formulas, tables and curves for calculating the self and mutual inductances of wires, circuits and coils of various geometries. When calculating structures with rotation symmetry, their inductances and mutual inductances are usually written in the form of expressions containing values that are tabulated or given in the form of series depending on the behavior, determined by geometric dimensions (chapters 6 and 7), and the number of values taken into account in a row, is related to the margin of error. At the same time, to obtain practical estimates, it is very important to have approximating formulas while respecting sufficient calculation accuracy, and even more so, ready-made closed-form expressions within the framework of generally accepted idealization. From this perspective, an important role is played by closed-form expressions for the inductance of rectangular cross-section coils and the mutual inductance of two-layer solenoids, based on the publication of A. Gray "Absolute Measurements in Electricity and Magnetism," Macmillan and Co, Ltd, 1921, which is not widely used in Russian literature. The presented article, in which the corresponding comparative analysis was carried out for the purpose of verification, is devoted to this issue.

Keywords: inductance of coils with rotation symmetry, inductance of solenoid, mutual inductance of a double-layer solenoid, comparative analysis