

УДК 621.372.21

ПОВЕРХНОСТНЫЙ ЭФФЕКТ В КОАКСИАЛЬНЫХ КАБЕЛЯХ ИМПУЛЬСНЫХ УСТАНОВОК

© 2019 г. Б. Э. Фридман¹, *, М. В. Медведев¹

¹Акционерное общество “НИИЭФА им. Д.В. Ефремова”, Санкт-Петербург, Россия

*e-mail: fridman@sintez.niiefa.spb.su

Поступила в редакцию 05.09.2019 г.

После доработки 21.10.2019 г.

Принята к публикации 23.10.2019 г.

В статье представлены результаты изучения поверхностного эффекта в коаксиальных кабелях импульсных установок. Выводятся аналитические выражения для скиновых параметров коаксиальной линии передачи сигналов и даны методы экспериментального измерения этих параметров. Рассматриваются переходные процессы в длинных линиях и описаны методы расчета переходных процессов в электрических цепях с такими линиями. Измерения импульсных и высокочастотных сигналов в коаксиальных кабелях подтвердили корректность предложенных математических моделей и методов расчета.

Ключевые слова: измерения в длинных линиях, импульсные системы, искажение сигнала, коаксиальная длинная линия, преобразование Фурье, скин-эффект

DOI: 10.1134/S0002331019050066

ВВЕДЕНИЕ

Коаксиальные линии передачи применяются в импульсных установках. На основе коаксиальных проводников выполняются коаксиальные длинные линии мощных генераторов импульсных токов. Коаксиальные кабели используются в линиях передачи высоковольтных импульсов для запуска элементов мощных импульсных установок и для измерений.

Основной причиной потерь энергии и искажения формы импульсов тока и напряжения в коаксиальных линиях передачи является явление скин-эффекта в проводниках. Явление скин-эффекта в коаксиальных линиях передачи изучалось ранее [1–4]. Цилиндрическая симметрия коаксиальных токопроводов позволяет выразить распределение поля в металле коаксиальных цилиндрических проводников с помощью функций Бесселя (Ханкеля) и использовать это при вычислении распространения волн тока и напряжения вдоль линии [2, 3]. В [2] такой анализ выполнен для проникновения в металл плоской электромагнитной волны, без учета кривизны поверхностей цилиндрических проводников. В [3] использовано асимптотическое представление функций Бесселя (Ханкеля) (первое приближение, соответствующее плоской волне поля) для оценки влияния поверхностного эффекта на искажение фронта импульса напряжения в коаксиальном кабеле.

Ранее в [5, 6] был применен метод пограничного слоя для анализа проникновения электромагнитного поля в массивные проводники произвольной формы. Этот метод определяет асимптотическое разложение падения напряжения на массивных проводниках.

$$U_S(t) = L_e \frac{dI}{dt} + S \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{I(\theta)}{\sqrt{t-\theta}} d\theta + R_S I(t) + \dots = L_e \frac{dI}{dt} + S \int_0^t \frac{I'(\theta)}{\sqrt{t-\theta}} d\theta + R_S I(t) + \dots, \quad (1)$$

где $I(t)$ – ток в массивном проводнике, L_e – внешняя индуктивность массивного проводника (индуктивность на высокой частоте), S – коэффициент первого приближения, соответствующий распространению плоской электромагнитной волны в металле массивного проводника, R_S – коэффициент второго приближения, зависящий от неоднородности электромагнитного поля вне металла и от кривизны поверхностей массивных проводников. Постоянные коэффициенты в (1) определяются следующими соотношениями:

$$S = \sqrt{\frac{\mu_0}{\pi \gamma_m \Lambda}} \int \mathbf{b}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}, \quad (2)$$

$$R_S = \frac{1}{\gamma_m \Lambda} \int \frac{(k_2 - k_1)(b_1^2 - b_2^2)}{2b} dl, \quad (3)$$

где $\mathbf{b}(\mathbf{r}) = \frac{\delta(\mathbf{r})}{I}$ – вектор-функция, заданная на поверхности проводника, $\delta(\mathbf{r})$ – линейная плотность тока на поверхности проводника, γ_m – проводимость металла, k_1, k_2 – главные кривизны поверхности металла, b_1, b_2 – проекции вектора $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ на линии главной кривизны поверхности, путь интегрирования Λ в (2) и (3) совпадает с любой линией плотности тока на поверхности металла.

Параметры S и R_S могут быть рассчитаны и измерены, применение этих параметров для анализа переходных процессов в электрических цепях с массивными проводниками показано в [7, 8].

В настоящей работе рассматривается применение соотношения (1) и скиновых параметров S и R_S для анализа переходных процессов в цепях с коаксиальными кабелями. Изучаются методы измерения скиновых параметров, дана оценка влияния скиновых параметров на искажение фронта импульсов напряжения или тока при распространении электромагнитной волны по коаксиальному кабелю.

СКИНОВЫЕ ПАРАМЕТРЫ КОАКСИАЛЬНЫХ ПРОВОДНИКОВ

В коаксиальных сплошных проводниках линии плотности тока параллельны оси кабеля, ток распределен равномерно по цилиндрическим поверхностям внутреннего и наружного проводника, путь интегрирования в (2) и (3) проходит параллельно оси кабеля по наружной поверхности внутреннего проводника и внутренней поверхности внешнего проводника. Для внутреннего проводника $k_1 = 0, k_2 = r_1^{-1}, b_1 = \frac{1}{2\pi r_1}, b_2 = 0$; для наружного проводника $k_1 = 0, k_2 = -r_2^{-1}, b_1 = \frac{1}{2\pi r_2}, b_2 = 0$, где r_1 – внешний радиус внутреннего проводника и r_2 – внутренний радиус внешнего проводника.

Соотношения (2) и (3) позволяют определить скиновые параметры внутреннего проводника кабеля длиной l

$$S_{in} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\pi \gamma_m}} \frac{l}{2\pi r_1}, \quad R_{S,in} = \frac{l}{4\pi \gamma_m r_1^2}$$

и скиновые параметры внешнего проводника кабеля длиной l

$$S_{ext} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\pi \gamma_m}} \frac{l}{2\pi r_2}, \quad R_{S,ext} = -\frac{l}{4\pi \gamma_m r_2^2}.$$

Таблица 1. Характеристики коаксиальных кабелей

Тип кабеля	PK50-2-12	PK50-7-21 ²⁾	ФКП ³⁾
Внутренняя изоляция	Полиэтилен	Фторопласт	Фторопласт
Наружный радиус внутреннего проводника r_1 , мм	0.36	1.08	4.62
Внутренний радиус наружного проводника r_2 , мм	1.1	3.5	6.3
Волновое сопротивление, $\sqrt{L'/C'}$, Ом	50 ± 2	50 ± 2	12.3
Линейная емкость, C' , пФ/м	100	94	408.8
Коэффициент укорочения, VF	1.52	1.41	1.41
Скиновый параметр первой аппроксимации ¹⁾ S' , Ом $\sqrt{\text{с/м}}$	56.03×10^{-6}	16.19×10^{-6}	4.953×10^{-6}
Скиновый параметр второй аппроксимации ¹⁾ R'_S , Ом/м	4.335×10^{-4}	1.09×10^{-3}	2.964×10^{-5}

1) Значения скиновых параметров S' и R'_S рассчитаны по формулам (4) и (5) для цилиндрических сплошных проводников. 2) Медные проволоки кабеля PK50-7-21 покрыты серебром. 3) Внутренний проводник кабеля ФКП выполнен в виде плетенки.

Линейные скиновые параметры коаксиального кабеля (то есть значения скиновых параметров, приходящихся на единицу длины кабеля)

$$S' = \frac{S_{\text{in}} + S_{\text{ext}}}{l} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\pi \gamma_m}} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right), \quad (4)$$

$$R'_S = \frac{R_{S,\text{in}} + R_{S,\text{ext}}}{l} = \frac{1}{4\pi \gamma_m} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right). \quad (5)$$

В настоящей работе результаты исследования проверялись в экспериментах с образцами трех коаксиальных кабелей, изготавливаемых в России, характеристики которых приведены в табл. 1.

ТЕЛЕГРАФНЫЕ УРАВНЕНИЯ КОАКСИАЛЬНОГО КАБЕЛЯ СО СКИНОВЫМИ ПОТЕРЯМИ

Телеграфные уравнения коаксиального кабеля со скином (рис. 1)

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial x} + C' \frac{\partial U}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial x} + L' \frac{\partial I}{\partial t} + S' \int_0^t \frac{I'(\theta)}{\sqrt{t-\theta}} d\theta + R'_S I + \dots = 0, \\ (U + R_i I)|_{x=0} = U_0(t), \quad (U - R_o I)|_{x=l} = 0, \quad U|_{t=0} = 0, \quad I|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad (6)$$

где C' и L' – линейная емкость и линейная внешняя индуктивность, I' – производная тока, U_0 , R_i – ЭДС и внутреннее сопротивление источника сигнала, R_o – нагрузочное сопротивление, x – линейная координата кабеля.

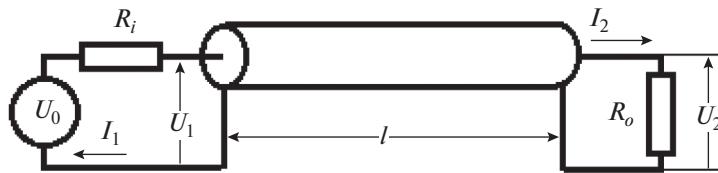


Рис. 1. Эквивалентная схема подключения кабеля.

В частотной области уравнения длинной линии

$$\begin{cases} \frac{d\dot{I}}{dx} + j\omega C' \dot{U} = 0, \\ \frac{d\dot{U}}{dx} + Z' \dot{I} = 0, \\ (\dot{U} + R_i \dot{I})|_{x=0} = \dot{U}_0, \quad (\dot{U} - R_o \dot{I})|_{x=l} = 0, \end{cases} \quad (7)$$

где $j = \sqrt{-1}$, $\dot{I}(\omega) = \int_0^\infty I(t) e^{-j\omega t} dt$, $\dot{U}(\omega) = \int_0^\infty U(t) e^{-j\omega t} dt$ – образ Фурье тока и напряжения, ω – циклическая частота, и линейный импеданс проводников кабеля

$$Z'(\omega) = j\omega L' + \sqrt{j\pi\omega} S' + R'_S + \dots \quad (8)$$

При выводе (7) и (8) учитывалось, что преобразование Фурье интеграла $\int_0^t \frac{I'(\theta)}{\sqrt{t-\theta}} d\theta$ дает в частотной области функцию $\sqrt{j\pi\omega} \dot{I}(\omega)$. (Приложение 1).

В (8) доля линейного импеданса, вносимого скин-эффектом, составляет $\sqrt{j\pi\omega} S' + R'_S$. Следует отметить, что в [4] для анализа переходных процессов была предложена похожая аппроксимация для образа Лапласа сопротивления, вносимого скин эффектом в коаксиальных проводниках, в виде $A + B\sqrt{s}$, где s – оператор Лапласа. При этом коэффициент B определялся с помощью асимптотических разложений функций Бесселя и Ханкеля, описывающих проникновение электромагнитного поля в цилиндрические проводники (в первом приближении плоской электромагнитной волны), а коэффициент A определялся эвристическими соображениями и связывался с сопротивлением постоянному току кабеля. Разработанный в [6, 7] метод дает строгое математическое определение скиновых параметров S и R_S , как коэффициентов первого и второго приближения в асимптотическом разложении падения напряжения на массивных проводниках (1) и однозначно определяет соотношения (2), (3) для вычисления этих параметров при произвольной геометрии массивных проводников.

Уравнения (6) и (7) могут быть приведены в безразмерную форму заменой переменных $x = \xi l$, $t = \frac{l}{v_p} \tau = l\sqrt{L' C'} \tau$, $U = U_{0,m} u$, $U_0 = U_{0,m} u_0$, $I = \frac{U_{0,m} \sqrt{C'}}{\sqrt{L'}} i$, где $v_p = \frac{1}{\sqrt{L' C'}}$ – скорость распространения электромагнитной волны в кабеле, $U_{0,m}$ – характерное или максимальное напряжение источника сигнала.

$$\begin{cases} \frac{\partial i}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \tau} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial i}{\partial \tau} + s \int_0^t \frac{i'(\theta)}{\sqrt{\tau - \theta}} d\theta + r_S i + \dots = 0 \\ (u + r_i i) \Big|_{\xi=0} = u_0(\tau), \quad (u - r_o i) \Big|_{\xi=1} = 0, \quad u \Big|_{\tau=0} = 0, \quad i \Big|_{\tau=0} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \frac{di}{d\xi} + j\varpi \dot{u} = 0, \\ \frac{du}{d\xi} + \zeta \dot{u} = 0, \\ (\dot{u} + r_i \dot{i}) \Big|_{\xi=0} = \dot{u}_0(\varpi), \quad (\dot{u} - r_o \dot{i}) \Big|_{\xi=1} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

где $\varpi = \omega l \sqrt{L' C'}$, $\zeta(\varpi) = j\varpi + \sqrt{j\pi\varpi} s + r_S + \dots$, $s = \frac{\sqrt{jC'^4}}{L'^4} S$, $r_S = \frac{lR_S \sqrt{C'}}{\sqrt{L'}}$, $r_i = \frac{R_i \sqrt{C'}}{\sqrt{L'}}$,

$r_o = \frac{R_o \sqrt{C'}}{\sqrt{L'}}$ – безразмерные параметры, $i(\xi, \varpi) = \int_0^\infty i(\xi, \tau) e^{-j\varpi\tau} d\tau$ и $\dot{u}(\xi, \varpi) = \int_0^\infty u(\xi, \tau) e^{-j\varpi\tau} d\tau$ – образы Фурье безразмерных тока $i(\xi, \tau)$ и напряжения $u(\xi, \tau)$.

ПРИМЕНЕНИЕ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ДЛЯ РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЦЕПЯХ С КОАКСИАЛЬНЫМИ КАБЕЛЯМИ С УЧЕТОМ СКИНОВЫХ ПОТЕРЬ

Уравнения (10) сводятся к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{cases} \frac{d^2 \dot{u}}{d\xi^2} - \gamma^2 \dot{u} = 0, \\ \left(\dot{u} - \frac{r_i}{\zeta} \frac{d\dot{u}}{d\xi} \right) \Big|_{\xi=0} = \dot{u}_0, \quad \left(\dot{u} + \frac{r_o}{\zeta} \frac{d\dot{u}}{d\xi} \right) \Big|_{\xi=1} = 0, \end{cases} \quad (11)$$

где $\gamma = \sqrt{j\varpi\zeta}$ – безразмерный коэффициент распространения длинной линии.

Решение краевой задачи (11) дает образ Фурье напряжения в длинной линии

$$\dot{u}(\xi, \varpi) = \frac{\dot{u}_0 \zeta [(\zeta - r_o \gamma) \exp[-\gamma(1 - \xi)] - (\zeta + r_o \gamma) \exp[\gamma(1 - \xi)]]}{(\zeta - r_i \gamma)(\zeta - r_o \gamma) \exp(-\gamma) - (\zeta + r_i \gamma)(\zeta + r_o \gamma) \exp(\gamma)}. \quad (12)$$

и тока

$$i(\xi, \varpi) = -\frac{1}{\zeta} \frac{d\dot{u}}{d\xi} = -\frac{\dot{u}_0 \gamma [(\zeta - r_o \gamma) \exp[-\gamma(1 - \xi)] + (\zeta + r_o \gamma) \exp[\gamma(1 - \xi)]]}{(\zeta - r_i \gamma)(\zeta - r_o \gamma) \exp(-\gamma) - (\zeta + r_i \gamma)(\zeta + r_o \gamma) \exp(\gamma)}. \quad (13)$$

Пусть T – длительность изучаемого процесса, $n = 2^m$, m – целое число и $\Delta\varpi = 2\pi/T$.

Тогда прообраз Фурье напряжения $u(\xi, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}(\xi, \varpi) \exp(j\varpi\tau) d\varpi$ может быть вычислен в моменты времени $\tau_k = k\Delta\tau$, $k = 0, 1, \dots, n$, $\Delta\tau = T/n$ суммированием

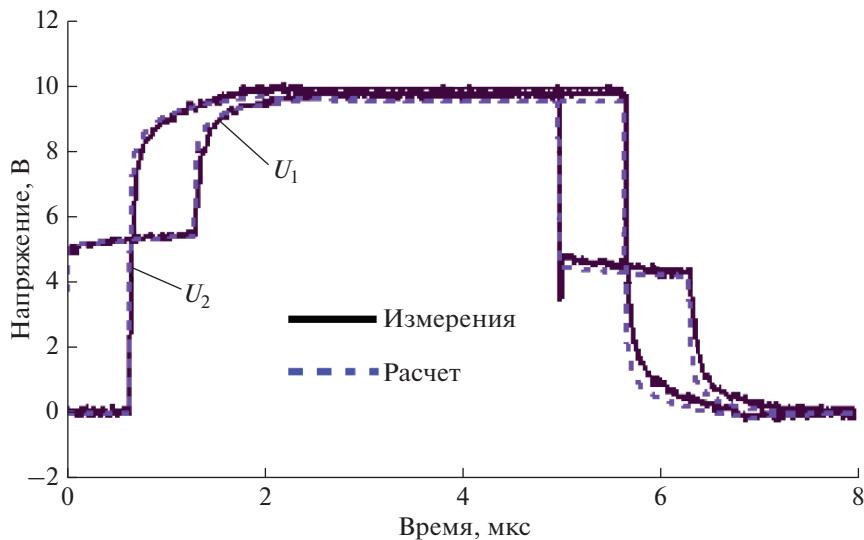


Рис. 2. Прохождение прямоугольного импульса напряжения амплитудой 10 В по отрезку коаксиального кабеля РК50-2-11 длиной 130 м. $R_i = 50$ Ом, $R_o = 1000$ Ом.

$$u_k = u(\xi, k\Delta\tau) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{p=-n}^{n-1} \dot{u}(\xi, p\Delta\omega) \exp\left(j \frac{2\pi}{n} kp\right) = \sqrt{\frac{\Delta\omega}{2\pi\Delta\tau}} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{p=-n}^{n-1} \dot{u}(\xi, p\Delta\omega) \exp\left(j \frac{2\pi}{n} kp\right) \right], \quad (14)$$

$$u_k = u(\xi, k\Delta\tau) = \frac{\sqrt{n}}{T} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{p=-n}^{n-1} \dot{u}(\xi, p\Delta\omega) \exp\left(j \frac{2\pi}{n} kp\right) \right].$$

Численные значения выражения в квадратных скобках в (14) вычисляются стандартными алгоритмами Быстрого Преобразования Фурье (БПФ).

На рисунке 2 представлены результаты измерения и расчета формы импульса напряжения на входе и выходе кабеля в схеме рис. 1. Этот пример показывает удовлетворительное совпадение результатов расчета с реальным переходным процессом в коаксиальном кабеле РК50-2-11.

ИЗМЕРЕНИЕ СКИНОВОГО ПАРАМЕТРА КОАКСИАЛЬНЫХ КАБЕЛЕЙ НА РЕЗОНАНСНЫХ ЧАСТОТАХ

Выражения (4), (5) и (6) основаны на представлении коаксиального кабеля в виде сплошных цилиндрических проводников. Реальные коаксиальные кабели устроены по-другому. Внутренний проводник кабеля представляет собой, как правило, сердечник, изготовленный из набора тонких скрученных металлических проволок, а внешний проводник образован медной плетенкой. Поэтому, практически важной задачей является измерение скиновых параметров реальных коаксиальных кабелей S' and R'_s .

Скиновые параметры S' and R'_s являются коэффициентами асимптотических разложений (1); их доля в падении напряжения на кабеле, как правило, мала по сравнению с долей, вносимой C' и L' . Поэтому скиновые параметры возможно измерить в электрических режимах, при которых влияние емкости и индуктивности кабеля незначительно. Такие режимы возникают на резонансных частотах, когда в кабеле воз-

никают стоячие волны напряжения и тока. При ограниченной длине кабеля такие резонансные частоты достаточно велики и доля падения напряжения, вносимая скиновым параметром второго приближения R'_S при измерении, мала, что не позволяет измерить R'_S . Однако скиновый параметр первого приближения S' может быть надежно измерен на резонансных частотах.

В приложении 2 показано, что для закороченного коаксиального кабеля на частотах, при которых в начале кабеля наблюдается резонанс токов, $\omega_k = k\pi$ ($k = 1, 2, \dots$) вещественная и мнимая части импеданса

$$\operatorname{Re}[z(\omega_k)] \approx \pi \sqrt{\frac{k}{8}} s + \frac{r_S}{2}, \quad \operatorname{Im}[z(\omega_k)] \approx \pi \sqrt{\frac{k}{8}} s. \quad (15)$$

В этом же приложении показано, что на частотах, при которых в начале кабеля наблюдается резонанс напряжений, $\omega_m = \frac{2m-1}{2}\pi$ ($m = 1, 2, \dots$) вещественная и мнимая части адmittанса

$$\operatorname{Re}[y(\omega_m)] \approx \pi \sqrt{\frac{2m-1}{16}} s + \frac{r_S}{2}, \quad \operatorname{Im}[y(\omega_m)] \approx \pi \sqrt{\frac{2m-1}{16}} s. \quad (16)$$

В физических переменных резонанс токов имеет место при частоте $f_k = k \frac{v_p}{2l}$, $k = 1, 2, \dots$. С учетом того, что $r_S \ll s$ получим из (15)

$$S' \approx \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{8}{klv_p}} R_k, \quad (17)$$

где $R_k = \operatorname{Re}[Z(f_k)]$ – сопротивление, вещественная часть импеданса кабеля на частоте резонанса токов f_k .

Аналогично, из (16) следует, что при резонансе напряжений, при $f_m = \frac{(2m-1)v_p}{4l}$, $m = 1, 2, \dots$ скиновый параметр

$$S' \approx \frac{4\rho^2}{\pi \sqrt{(2m-1)lv_p}} G_m, \quad (18)$$

где $G_m = \operatorname{Re}[Y(f_m)]$ – проводимость, вещественная часть адmittанса кабеля на частоте резонанса напряжений f_m , $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ – волновое сопротивление кабеля.

Частотные характеристики отрезков кабеля могут быть измерены приборами, выпускаемыми промышленностью. На рис. 3 и 4 показаны частотные характеристики вещественной и мнимой части импеданса $Z = R + jX$ и адmittанса $Y = G + jB$ кабеля PK50-7-21, измеренные прибором Precision Impedance Analyzer WK 6530, изготовленного Wayne Kerr Electronics. Результаты вычисления скинового параметра S' по измеренным значениям $R(f_k)$ и $G(f_m)$ представлены на рис. 5.

Для измеренного отрезка кабеля PK50-7-21 безразмерные скиновые параметры $s = 0.033$, $r_S = 1.09 \times 10^{-3}$. В соответствии с (15) и (16) доля скинового параметра R'_S в измеренных значениях R и G при резонансах на самой низкой частоте ($k = 1, m = 1$) не превышает 2%; при более высоких частотах резонанса это доля уменьшается. Это не позволяет выделить значение скинового параметра второго приближения при таких измерениях.

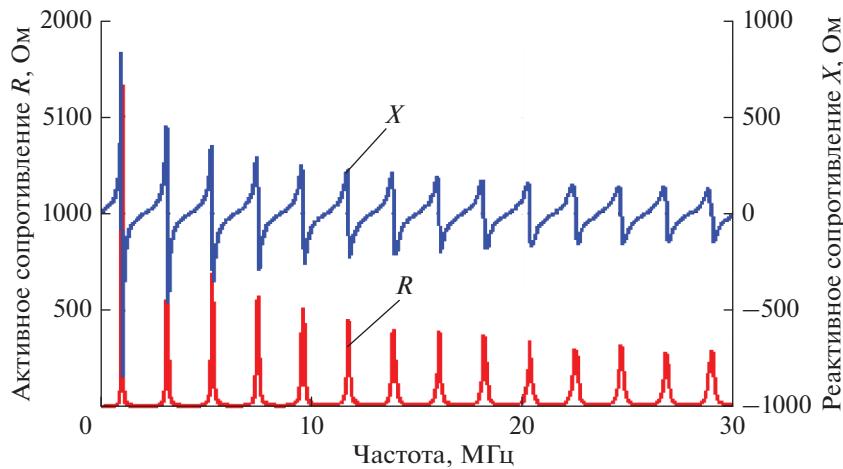


Рис. 3. Активное сопротивление R и реактивное сопротивление X отрезка 50 м закороченного кабеля РК50-7-21.

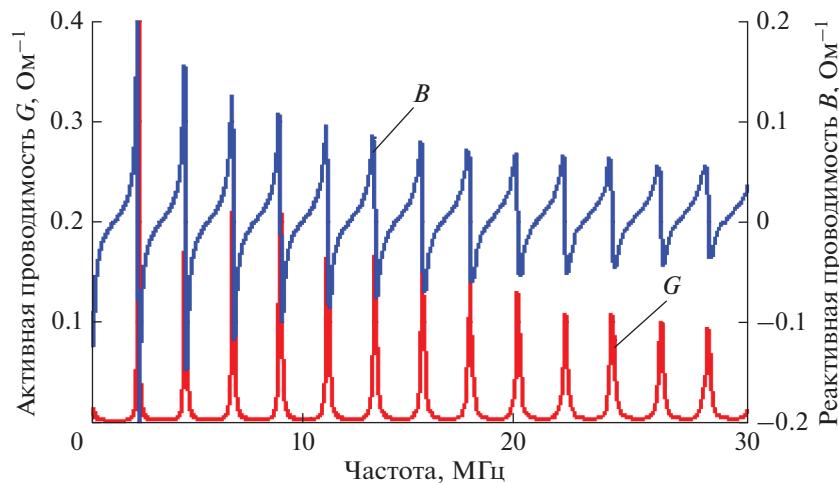


Рис. 4. Активная проводимость G и реактивная проводимость B отрезка 50 м закороченного кабеля РК50-7-21.

На рис. 6 и 7 представлены результаты измерения скиновых параметров кабелей РК50-2-12 и ФКП.

Для исследованных кабелей трех типов измеренные значения S' превышают расчетные значения S' , вычисленные по (4). Это объясняется тем, что при выводе (4) предполагалось, что коаксиальные проводники образованы сплошными металлическими цилиндрами. В реальных кабелях, выпускаемых промышленностью, внутренний проводник выполнен, как правило, в виде скрутки тонких проводов (РК50-2-12, РК50-7-21); внешний проводник образован плетенкой. Наибольшие отличия между расчетными и измеренными значениями S' наблюдаются у кабеля ФКП, у которого не только внешний, но и внутренний проводник выполнены в виде плетенки.

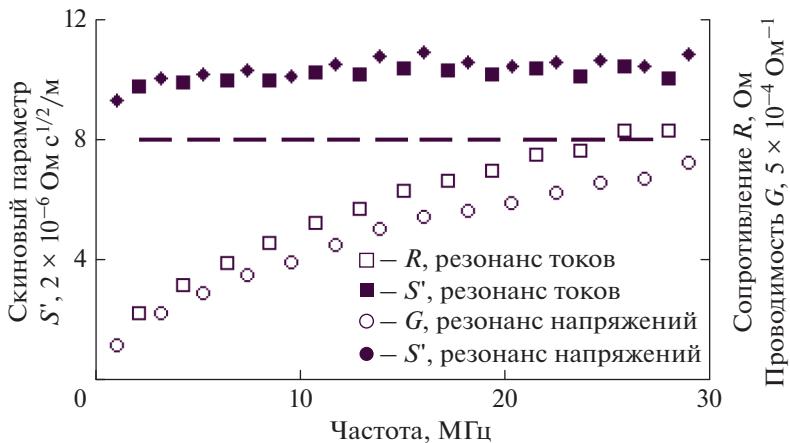


Рис. 5. Результаты измерений скинового параметра S' , выполненных на отрезке кабеля PK50-7-21 длиной 50 м. Штриховая линия соответствует значению $S' = 16.19 \times 10^{-6} \text{ Ом с}^{1/2}/\text{м}$, вычисленному по (4) без учета конструктивных особенностей проводников кабеля.

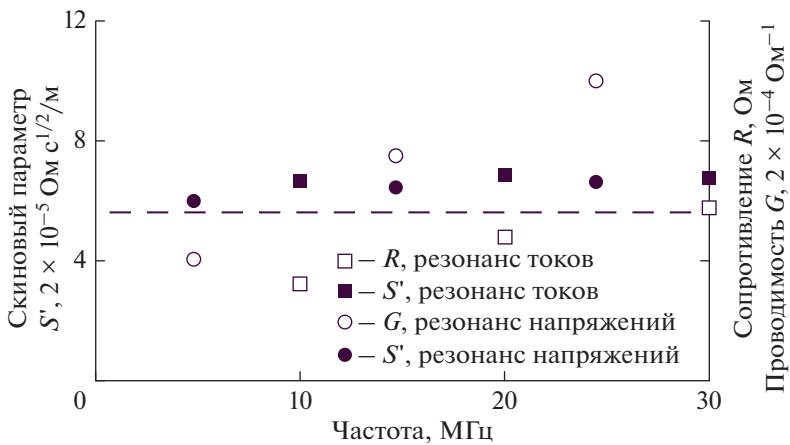


Рис. 6. Результаты измерений скинового параметра S' , выполненных на отрезке кабеля PK50-2-12 длиной 10 м. Штриховая линия соответствует значению $S' = 5.6 \times 10^{-5} \text{ Ом с}^{1/2}/\text{м}$, вычисленному по (4) без учета конструктивных особенностей проводников кабеля.

Результаты, представленные на рис. 5, 6, 7, свидетельствуют о том, что в пределах точности измерений скиновый параметр S' практически не зависит от частоты. Это показывает, что, несмотря на сложные и разнообразные конструкции проводников коаксиального кабеля, скиновый параметр S' является постоянной для каждого кабеля количественной характеристикой, которая не зависит от времени и частоты, и которая позволяет учесть потери в коаксиальном кабеле в широком диапазоне частот и при импульсных переходных процессах. Все это делает целесообразным измерения S' и применения измеренных значений S' для исследования переходных процессов в электрических цепях с коаксиальными проводниками.

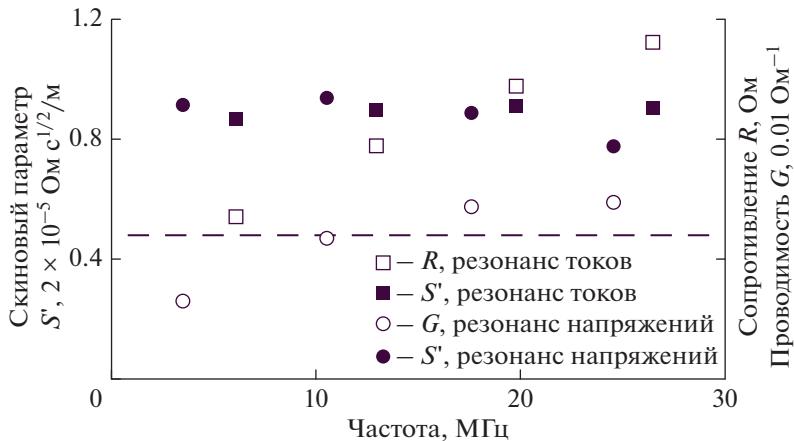


Рис. 7. Результаты измерений скинового параметра S' , выполненных на отрезке кабеля ФКП длиной 15.6 м. Штриховая линия соответствует значению $S' = 0.495 \times 10^{-5} \text{ Ом} \text{ c}^{1/2}/\text{м}$, вычисленному по (4) без учета конструктивных особенностей проводников кабеля.

ВЛИЯНИЕ СКИН-ЭФФЕКТА НА ИСКАЖЕНИЕ ФРОНТА ИМПУЛЬСА НАПРЯЖЕНИЯ

Влияние потерь в кабеле на искажение фронта импульса напряжения, передаваемого по коаксиальному кабелю, изучалось во многих работах, например в [1–4]. Подобная задача рассматривалась для проводов, проходящих над поверхностью земли, с учетом скин-эффекта в проводе и земле [9], [10]. В [2] было построено приближенное линеаризованное решение для образа Лапласа напряжения в кабеле, применение к которому табличных функций обратного преобразования Лапласа позволило выразить во временной области переходную функцию кабельной линии через дополнительную функцию ошибок. Аналогичный метод вычисления может быть применен к (12), (13), описывающих напряжение и ток в частотной области. При этом формула из [2] для переходной

функции при согласованной нагрузке $R_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$ в обозначениях настоящей статьи имеет следующий вид.

$$u(1, \tau) = 1(\tau - 1) \operatorname{erfc} \left(\frac{s}{2\sqrt{\pi(\tau - 1)}} \right), \quad (19)$$

где $1(y) = \begin{cases} 0 & \text{если } y < 0, \\ 1 & \text{если } y > 0, \end{cases}$ — единичная функция, $\operatorname{erfc}(y)$ — дополнительная функция ошибок. В физических переменных переходная функция

$$u(t) = 1(t - t_p) \operatorname{erfc} \left(\frac{t_p S'}{2L' \sqrt{\pi(t - t_p)}} \right), \quad (20)$$

где $t_p = l/v_p$ — время распространения сигнала в кабеле.

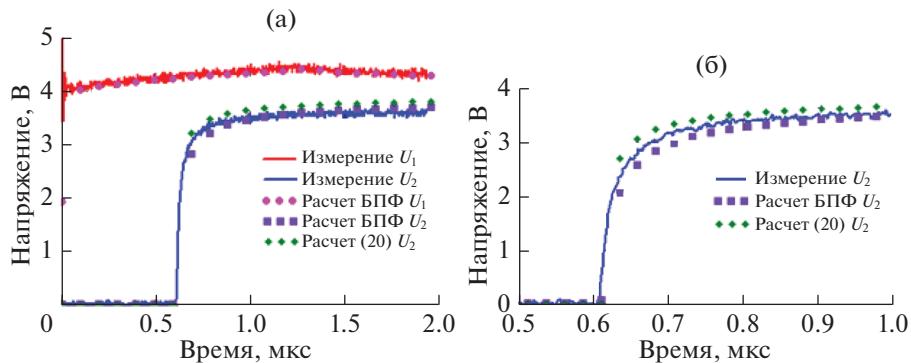


Рис. 8. Фронт волны напряжения на входе и выходе кабеля PK50-2-12 длиной 121 м. Амплитуда импульса напряжения, создаваемого источником импульсов 8 В.

Формула (20) дает приближенное описание искажений на фронте импульса тока, определяемых скин эффектом в проводниках кабеля.

На рис. 8 (а) и (б) показаны измеренные и рассчитанные кривые напряжения на входе и выходе коаксиального кабеля PK50-2-12 длиной 121 м. Расчет выполнялся двумя способами: посредством применения БПФ к (12) и с использованием приближенной формулы (20). Эти графики показывают удовлетворительное совпадение результатов измерений и расчетов.

В качестве оценки искажения фронта напряжения может быть принят интервал времени, между появлением сигнала на выходе кабеля и достижением уровня этого сигнала, равного половине амплитуды входного сигнала. Учитывая, что обратная функция $\text{erfc}^{-1}(0.5) = 0.477$ получим, что

$$[t - t_p]_{u(t)=0.5} = \pi^{-1} \left(\frac{t_p S'}{0.954 L'} \right)^2, \quad (21)$$

то есть такая оценка пропорциональна $(t_p S')^2$. Для отрезка коаксиального кабеля PK50-2-12 длиной 121 м величина $[t - t_p]_{u(t)=0.5} \approx 10 \text{ ns}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Влияние скин-эффекта на переходные процессы в электрических цепях с коаксиальными цилиндрическими проводниками определяется постоянными скиновыми параметрами S' и R'_S , которые являются коэффициентами асимптотических разложений падения напряжения на проводниках и зависят только от радиусов цилиндрических проводников и проводимости металла.

Переходные процессы в электрических цепях с коаксиальными проводниками могут быть рассчитаны посредством применения БПФ к решению уравнений длинной линии в частотной области со скиновыми параметрами S' и R'_S .

Скиновый параметр S' коаксиальной линии может быть измерен на частотах резонанса токов или напряжений, при которых влияние емкости и индуктивности на им-

педанс или адmittанс длинной линии незначительно. Такие измерения показали, что для выпускаемых промышленностью коаксиальных кабелей измеренное значение S' больше, чем рассчитанное в предположении сплошных цилиндрических проводников. Это объясняется тем, что в реальных коаксиальных кабелях проводники представляют собой набор тонких скрученных металлических проволок или плетенку медных проволок.

Получено удовлетворительное совпадение результатов измерения фронта импульса тока на выходе коаксиального кабеля и расчетов этого фронта с применением измеренных значений S' , выполненных с использованием как БПФ, так и приближенной формулы, учитывающей скин-эффект. Оценка искажения фронта волны напряжения в коаксиальном кабеле пропорциональна квадрату произведения скинового параметра S' на время распространения сигнала t_p .

Приложение 1. Преобразование Фурье интеграла $\int_0^t \frac{I'(\theta)}{\sqrt{t-\theta}} d\theta$.

Интеграл $\int_0^t \frac{I'(\theta)}{\sqrt{t-\theta}} d\theta$ представляет собой свертку двух функций $\frac{dI}{dt}$ и $\frac{1}{\sqrt{t}}$.

$$\int_0^t \left[\int_0^t \frac{I'(\theta)}{\sqrt{t-\theta}} d\theta \right] e^{-j\omega t} dt = j\omega I(\omega) \int_0^\infty \frac{e^{-j\omega t}}{\sqrt{t}} dt. \quad (\text{П1.1})$$

Произведем замену переменных $y = j\omega t$ в интеграле

$$\int_0^\infty \frac{e^{-j\omega t}}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{\sqrt{j\omega}} \int_0^\infty \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} dy = \frac{1}{\sqrt{j\omega}} \int_0^\infty \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} dy = \frac{1}{\sqrt{j\omega}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{j\omega}}, \quad (\text{П1.2})$$

где $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ – гамма функция. При преобразованиях (П1.2) путь интегрирования был перенесен с линии $(0, j\infty)$ на линию $(0, \infty)$. Это возможно, так как при $|y| > 0$ у функции $\frac{e^{-y}}{\sqrt{y}}$ нет особых точек в области, ограниченной этими линиями.

Подставляя (П1.2) в (П1.1), получим, что преобразование Фурье интеграла $\int_0^t \frac{I'(\theta)}{\sqrt{t-\theta}} d\theta$ приводит в частотной области к функции $\sqrt{j\omega}I(\omega)$.

Приложение 2. Импеданс и адmittанс коаксиального кабеля на резонансных частотах.

а) Безразмерный импеданс закороченного коаксиального кабеля $z(\omega)$ определяется из (12) при $r_i = r_o = 0, \xi = 0$.

$$z(\omega) = \frac{\dot{e}}{i(0, \omega)} = \frac{\zeta}{\gamma} \operatorname{th}(\gamma) = \sqrt{1 + \sqrt{\frac{\pi}{j\omega}} s + \frac{r_s}{j\omega} + \dots} \operatorname{th} \left[j\omega \sqrt{1 + \sqrt{\frac{\pi}{j\omega}} s + \frac{r_s}{j\omega} + \dots} \right], \quad (\text{П2.1})$$

где $\operatorname{th}(\gamma)$ – гиперболический тангенс.

Учитывая, что s и r_s – малые параметры, получим

$$\sqrt{1 + \sqrt{\frac{\pi}{j\omega}} s + \frac{r_s}{j\omega} + \dots} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\pi}{j\omega}} s + \frac{r_s}{j\omega} \right) = 1 + \varepsilon, \quad (\text{П2.2})$$

где $\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\pi}{j\omega}} s + \frac{r_s}{j\omega} \right)$ – также малый параметр.

При частотах $\bar{\omega}_k = k\pi$, $k = 1, 2, \dots$ $\operatorname{th}(j\bar{\omega}_k) = 0$ и импеданс кабеля мал. При этом образуются стоячие волны и имеет место резонанс токов. Используя разложение функции гиперболического тангенса в ряд по степеням малого параметра $j\bar{\omega}_k \epsilon$, получим

$$z(\bar{\omega}_k) = (1 + \epsilon) \operatorname{th}[j\bar{\omega}_k(1 + \epsilon)] = (1 + \epsilon) \left[j\bar{\omega}_k \epsilon - \frac{1}{3} (j\bar{\omega}_k \epsilon)^3 + \dots \right] \approx j\bar{\omega}_k \epsilon, \quad (\text{П2.3})$$

или $z(\bar{\omega}_k) \approx j\bar{\omega}_k \epsilon = \frac{1}{2} \sqrt{j\bar{\omega}_k s} + \frac{r_s}{2} = \frac{\pi \sqrt{jk}}{2} s + \frac{r_s}{2} = \pi \sqrt{\frac{k}{8}} s + \frac{r_s}{2} + j\pi \sqrt{\frac{k}{8}} s$.

б) В соответствии с (П2.1) безразмерный адmittанс коаксиального кабеля

$$y(\bar{\omega}) = \frac{1}{z(\bar{\omega})} = \frac{\gamma}{\zeta} \operatorname{cth}(\gamma) = \left(1 + \sqrt{\frac{\pi}{j\bar{\omega}}} s + \frac{r_s}{j\bar{\omega}} + \dots \right)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{cth} \left[j\bar{\omega} \sqrt{1 + \sqrt{\frac{\pi}{j\bar{\omega}}} s + \frac{r_s}{j\bar{\omega}} + \dots} \right]. \quad (\text{П2.4})$$

Аналогично (П2.2) примем, что $\epsilon = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\pi}{j\bar{\omega}}} s + \frac{r_s}{j\bar{\omega}} \right)$ малый параметр, и получим

$$\left(1 + \sqrt{\frac{\pi}{j\bar{\omega}}} s + \frac{r_s}{j\bar{\omega}} + \dots \right)^{-\frac{1}{2}} = (1 + 2\epsilon + \dots)^{-\frac{1}{2}} \approx (1 - \epsilon). \quad (\text{П2.5})$$

При частотах $\bar{\omega}_m = \frac{2m-1}{2}\pi$, $m = 1, 2, \dots$, $\operatorname{cth}(j\bar{\omega}_k) = 0$ и адmittанс кабеля мал. При этом образуются стоячие волны и имеет место резонанс напряжений. Учитывая, что $j\bar{\omega}_m \epsilon$ малый параметр, получим

$$y(\bar{\omega}_m) \approx (1 - \epsilon) \operatorname{cth}[i\bar{\omega}_m(1 + \epsilon)] = (1 - \epsilon) \operatorname{th}(j\bar{\omega}_m \epsilon) = j\bar{\omega}_m \epsilon,$$

или

$$y(\bar{\omega}_m) \approx \frac{1}{2} j\bar{\omega}_m \left(\sqrt{\frac{\pi}{j\bar{\omega}_m}} s + \frac{r_s}{j\bar{\omega}_m} \right) = \pi \sqrt{\frac{2m-1}{16}} s + \frac{r_s}{2} + j\pi \sqrt{\frac{2m-1}{16}} s. \quad (\text{П2.6})$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kerns Q., Kirsten F., Winningstad C.* Pulse Respons of Coaxial Cables. Counting Note // Lawrence Radiation Laboratory, University of Callifornia, Bercley, 1964, File No. CC 2-1A(1).
2. *Wigington R.L., Nahman N.S.* Transient Analysis of Coaxial Cables Considering Skin Effect // Proc. IRE 42. 166–174 (Feb. 1957).
3. *Nahman N.S., Holt D.R.* Transient Analysis of Coaxial Cables Using the Skin Effect Approximation $A + B\sqrt{s}$ // IEEE Trans. Circuit Theory, 1972, vol. 19, No. 5, pp. 443–451 (Sept. 1972).
4. *Holt D.R., Nahman N.S.* Coaxial-Line Pulse-Response Error Due to a Planar Skin-Effect Approximation // IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement, vol. IM-21, No. 4, November 1972, pp. 515–519.
5. *Фридман Б.Э.* Скин-эффект в массивных проводниках электроимпульсных установок. I. Электромагнитное поле массивных проводников // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 9. С. 44–51.
6. *Фридман Б.Э.* Скин-эффект в массивных проводниках электроимпульсных установок. II. Массивные проводники в электрических цепях // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 9. С. 52–56.
7. *Fridman B.E.* Transients in pulsed electrical circuits with massive conductors // IEEE Trans. Plasma Sci., vol. 34, pp. 1938–1943, May, 2006.
8. *Fridman B.* Skin Parameter of Massive Conductors and Transients in Electrical Circuits of Pulsed Power Facilities // IEEE Trans. Plasma Sci., vol. 46, No. 10, 2018, pp. 3273–3278.
9. *Гринберг Г.А., Бонштедт Б.Э.* Основы точной теории волнового поля линии передач // ЖТФ. 1954. Т. XXIV. Вып. 1. С. 67–95.
10. *Костенко М.В., Перельман Л.С., Шкарин Ю.Л.* Волновые процессы и электрические помехи в многопроводных линиях высокого напряжения. М.: “Энергия”, 1973. 272 с.

Surface Effect in Coaxial Cables of Pulse Facilities**B. E. Fridman^a, * and M. V. Medvedev^a***^aEfremov Institute of Electrophysical Apparatus, Saint Petersburg, Russia***e-mail: fridman@sintez.niiefa.spb.su*

The results of study of the surface effect in coaxial cables of pulse facilities are presented. The analytical expressions for skin parameters of the coaxial transmission lines are deduced, and the methods for measurement of these parameters are described. Transients in electrical circuits with the coaxial cables are studied, and the methods for computation of these transients are described. The measurements of pulse and high frequency signals in the coaxial cables confirm correctness of the proposed mathematical models and the computation methods.

Keywords: coaxial transmission lines, distortion, Fourier transforms, pulse power systems, skin effect, transmission line measurement