ИЗВЕСТИЯ РАН. ЭНЕРГЕТИКА 2019, № 5, с. 80–87

УДК 621.3

КОЭФФИЦИЕНТЫ ВЗАИМНОЙ ИНДУКЦИИ И САМОИНДУКЦИИ КОАКСИАЛЬНЫХ КРУГОВЫХ КОНТУРОВ И СОЛЕНОИДОВ

© 2019 г. Г. Н. Цицикян[1, *], М. Ю. Антипов[1, **]

[1]*Филиал "ЦНИИ СЭТ" ФГУП "Крыловский государственный научный центр", Санкт-Петербург, Россия*

**e-mail: george.20021940@mail.ru*

***e-mail: posich@mail.ru*

Поступила в редакцию 02.09.2019 г.
После доработки 21.10.2019 г.
Принята к публикации 23.10.2019 г.

Проводится сравнение ряда выражений для коэффициентов взаимо- и самоиндукции круговых контуров и соленоидов, имеющихся в сравнительно ранних публикациях, связанных в основном с именами Двайта и Гровера, и публикациями более позднего периода, отличающихся изложением альтернативных замкнутых выражений для одноименных коэффициентов. Подчеркнута целесообразность такого рассмотрения, включая практические приложения.

Ключевые слова: взаимная индукция, индуктивность соленоида, ряды, сферические функции Лежандра с полуцелым индексом

DOI: 10.1134/S0002331019050157

Настоящая статья является продолжением сопоставительного анализа ряда выражений для коэффициентов индукции соосных круговых контуров и соленоидов, не получивших достаточно полного отражения в соответствующей литературе. Упомянутый анализ основан на сравнении выражений и рекомендаций, вытекающих из известной справочной книги П.Л. Калантарова и Л.А. Цейтлина "Расчет индуктивностей" Л.: Энергоатомиздат, 1986 [1] и рядов, опубликованных ранее в работах Двайта и Гровера [2, 3]. Будут рассмотрены и замкнутые выражения, впервые приведенные в работе Сноу [4], для взаимных индуктивностей круговых соосных контуров, а также для индуктивности соленоидов через сферические функции Лежандра с полуцелым индексом $(n-1/2)$. Для взаимной индуктивности коаксиальных круговых контуров радиусов R_1 и R_2 с расстоянием x между параллельными плоскостями их расположения в [2] приведено выражение в виде сходящегося ряда, которое в системе СИ можно записать в виде:

$$M = \mu_0\sqrt{R_1R_2}\left[\left(1+\frac{3}{16}\alpha^2-\frac{15}{1024}\alpha^4+\frac{35}{128^2}\alpha^6-\frac{1575}{2\times128^3}\alpha^8+\ldots\right)\ln\frac{8}{\alpha}-\right.$$
$$\left.-\left(2+\frac{1}{16}\alpha^2-\frac{31}{2048}\alpha^4+\frac{247}{6\times128^2}\alpha^6-\frac{7795}{8\times128^3}\alpha^8+\ldots\right)\right], \quad (1)$$

$$\text{где}\ \alpha^2 = \left[(R_1-R_2)^2+x^2\right]/R_1R_2. \quad (2)$$

Записанный ряд обладает хорошей сходимостью в широком диапазоне изменения α^2, что может быть подтверждено сопоставлением с данными из справочной книги [1]. Важно отметить, что в отличие от описания индуктивности в виде сходящихся рядов, сопряженных с определенной погрешностью, выражения, содержащие полные эллиптические интегралы или сферические функции Лежандра с полуцелым индексом с помощью известных таблиц их значений, в ряде случаев обеспечивают результат с весьма высокой степенью точности.

Упомянутое выше замкнутое выражение для взаимной индуктивности через сферическую функцию Лежандра второго рода с индексом $\frac{1}{2}$ в [4, 5] получены в виде:

$$M = \mu_0\sqrt{R_1R_2}Q_{1/2}(g), \tag{3}$$

$$\text{где } g = 1 + \frac{(R_1 - R_2) + x^2}{2R_1R_2} = 1 + \Delta g = \frac{x^2 + R_1^2 + R_2^2}{2R_1R_2} = 1 + \frac{\alpha^2}{2}, \tag{4}$$

$$\Delta g = \frac{\alpha^2}{2}. \tag{5}$$

При $\alpha^2 \le 0.5$ можно ограничиться первыми двумя членами ряда (1) в круглых скобках, и тогда

$$M \cong \mu_0\sqrt{R_1R_2}\left[\left(1 + \frac{3}{16}\alpha^2\right)\ln\frac{8}{\alpha} - 2 - \frac{\alpha^2}{16}\right]. \tag{1'}$$

Из этого выражение можно получить хорошее приближение для

$$Q_{1/2}(1 + \Delta g) = \frac{1 + \frac{3}{8}\Delta g}{2}\left(\ln\frac{2 + \Delta g}{\Delta g} - 1.2274\right) + \frac{3}{8}\Delta g, \tag{6}$$

рекомендуемое в [6] для получение численных оценок $Q_{1/2}(1 + \Delta g)$ при $\Delta g < 0.5$. Вывод выражения (6) дан в Приложении.

Заметим также, что при $R_1 = R_2 = R$ и $\alpha^2 = \frac{x^2}{R^2} = 4\zeta^2$, где $\zeta = \frac{x}{2R}$, можно записать в соответствии с (1) ряд, фигурирующий в [1] под номером (5—17):

$$M = \mu_0R\left[\left(1 + \frac{3}{4}\zeta^2 - \frac{15}{64}\zeta^4 + \frac{35}{256}\zeta^6 + \ldots\right)\ln\frac{4}{\zeta} - 2 - \frac{1}{4}\zeta^2 + \frac{31}{128}\zeta^4 - \frac{247}{1536}\zeta^6 + \ldots\right]. \tag{7}$$

В другом частном случае, когда $x = 0$ и $\alpha^2 = \frac{c^2}{R_1R_2}$, где $c = |R_1 - R_2|$, ряд (1) приобретает вид:

$$\begin{aligned} M = \mu_0\sqrt{R_1R_2}\Bigg[&\ln\frac{8\sqrt{R_1R_2}}{c}\left(1 + \frac{3}{16}\frac{c^2}{R_1R_2} - \frac{15}{1024}\frac{c^4}{R_1^2R_2^2} + \frac{35}{128^2}\frac{c^6}{R_1^3R_2^3} - \frac{1575}{2\times128^3}\frac{c^8}{R_1^4R_2^4}\ldots\right) - \\ &- 2 - \frac{c^2}{16R_1R_2} + \frac{31}{2048}\frac{c^4}{R_1^2R_2^2} - \frac{247}{6\times128^2}\frac{c^6}{R_1^3R_2^3} + \frac{7795}{8\times128^3}\frac{c^8}{R_1^3R_2^3} + \ldots\Bigg]. \end{aligned} \tag{8}$$

Ряд (7) фигурирует в [2] под номером (13), но с той разницей, что обозначения R_1 и R_2 заменены на A и a соответственно.

В работе [2] приведен ряд для расчета взаимной индуктивности концентрических соленоидах неодинаковой длины в соответствии с рис. 1, совпадающим с рис. 7.2а в [1].

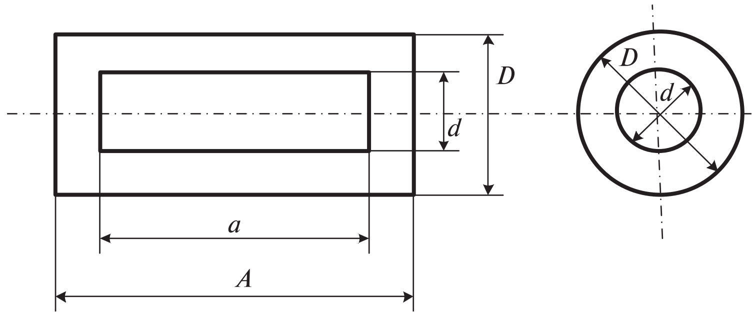

Рис. 1. Концентрические соленоиды неодинаковой длины с симметричным расположением.

Коэффициент взаимной индукции для такого расположения соленоидов описываются выражением (43А) в [2] и записывается с учетом замены обозначений в системе СИ в виде:

$$M = \frac{\mu_0 \pi d^2}{4} wW \left(A^2 + D^2\right)^{-1/2} \left[1 + \frac{1}{8}\frac{D^2 d^2}{\left[A^2 + D^2\right]^2}\left(3 - 4\frac{a^2}{d^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{32}\frac{D^4 d^4}{\left(A^2 + D^2\right)^4}\left(3 - 4\frac{A^2}{D^2}\right)\left(\frac{5}{2} - 10\frac{a^2}{d^2} + 4\frac{a^4}{d^4}\right) + \ldots\right], \quad (9)$$

где w и W – число витков соленоидов.

Сопоставляемое выражение в [1] дано в виде

$$M = \mu_0 \frac{\pi}{4}\frac{d^2}{Aa} wW \left(l_1 F_1 - l_2 F_2\right), \quad (10)$$

$$\text{где } l_1 = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + (A + a)^2}, \quad l_2 = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + (A - a)^2}, \quad (11)$$

F_1 – значение функции F, данное в табл. 7-1 и 7-2 в [1] при $\delta = d/D$ и $\lambda^2 = \lambda_1^2 = \left(\frac{D}{2l_1}\right)^2$,

F_2 – то же при $\lambda^2 = \lambda_2^2 = \left(\frac{D}{2l_2}\right)^2$.

Сопоставим теперь численные результаты по выражениям (9) и (10) с учетом (11). Пусть $a = d$ и $A = D$.

Тогда на основании (9) имеем:

$$M\left(a = d, A = D\right) = \mu_0 \frac{\pi}{4}\frac{wWd^2}{\sqrt{2}D}\left[1 + \frac{1}{8}\frac{D^2 d^2}{4D^4}(3 - 4) + \frac{1}{32}\frac{D^4 d^4}{16 D^8}(3 - 4)\left(\frac{5}{2} - 10 + 4\right) + \ldots\right] =$$
$$= \mu_0 \frac{\pi}{4}\frac{wWd^2}{\sqrt{2}D}\left[1 - \frac{1}{32}\frac{d^2}{D^2} - \frac{1}{32\times 16}\frac{d^4}{D^4}(-3.5) + \ldots\right] \approx \mu_0 \frac{\pi}{4}\frac{wW}{\sqrt{2}}\frac{d^2}{D}\left[1 - \frac{1}{32}\frac{d^2}{D^2} + \frac{3,5}{32\times 16}\frac{d^4}{D^4}\right].$$

Полагая $d = 0.5D$, получаем:

$$M\left(a = d, A = D, d = \frac{1}{2}D\right) = \mu_0 \frac{\pi}{4}\frac{wW}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}d\left[1 - \frac{1}{32}\frac{1}{4} + \frac{3.5}{32\times 16}\frac{1}{16}\right] =$$
$$= \mu_0 wWd \times 0.2777 \times 0.9926 \approx \mu_0 wWd \times 0.2756.$$

При $d = 0.1$ м

$$M = 4\pi \times 10^{-7} wW \times 0.1 \times 0.2756 = 0.03461 wW \times 10^{-6} \text{ Гн}.$$

Пусть теперь в соответствии с (10) и (11)

$$M = \mu_0 \frac{\pi}{4} \frac{d}{D} wW \left(\frac{1}{2} \sqrt{D^2 + (D+d)^2} F_1 - \frac{1}{2} \sqrt{D^2 + (D-d)^2} F_2 \right),$$

$$\frac{d}{D} = 0.5 = \delta, \quad \lambda_1^2 = 0.2985, \quad \lambda_2^2 = 0.8.$$

Тогда в соответствии с таблицей 7-1 в [1] $F_1 = 0.997$ и $F_2 = 0.98$.

Отсюда имеем [1]:

$$M = \mu_0 \frac{\pi}{4} \times 0.5 wW \left(\frac{1}{2} 3.6056 \times 0.997 d - \frac{1}{2} 2.2361 \times 0.98 d \right) =$$
$$= 0.4935 wW \times 10^{-7} \times 0.7017 = 0.03463 wW \times 10^{-6} \text{ Гн},$$

и, как видно, результаты расчетов практически совпадают.

Будем теперь считать, что $A = a = l$, т.е. рассмотрим случай одинаковой длины соленоидов. Пусть $l = 0.392$ м, $D = 0.32$ м, $d = 0.28$ м. Тогда согласно (9) при $w = W = 50$ витков получим следующую оценку для M:

$$M = \pi^2 \times 0.28^2 \times 50^2 \times 10^{-7} \left(0.392^2 + 0.32^2\right)^{-1/2} \left[1 + \frac{1}{8} \frac{0.32^2 \times 0.28^2}{\left(0.392^2 + 0.32^2\right)^2} \left(3 - 4 \frac{0.392^2}{0.28^2} \right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{32} \frac{0.32^4 \times 0.28^4}{\left(0.392^2 + 0.32^2\right)^4} \left(3 - 4 \frac{0.392^2}{0.32^2} \right) \left(\frac{5}{2} - 10 \frac{0.392^2}{0.32^2} + 4 \frac{0.392^4}{0.32^4} \right) + \ldots \right] \approx 0.355 \times 10^{-3} \text{ Гн}.$$

Выбранная геометрия и количество витков отражают реальные параметры двухслойного соленоида, используемого в практических целях. Следует подчеркнуть, что расчет по формулам параграфа 7.2 [1] для взаимной индуктивности концентрических соленоидов одинаковой длины такой же геометрии приводит к величине 0.348×10^{-3} Гн, и разница между значениями невелика.

Вернемся к упомянутой работе [4] и отметим некоторые особенности. В ней отслежена весьма важная связь между функцией $Q_{1/2}(g)$, где $g = \dfrac{2 - k^2}{k^2}$, и полными эллиптическими интегралами первого и второго рода:

$$Q_{1/2}(g) = \frac{2(K - E)}{k} - kK = \left(\frac{2}{k} - k \right) K - \frac{2}{k} E, \tag{12}$$

где $k^2 = \dfrac{2}{g + 1}$, и тогда с учетом (4)

$$k^2 = \frac{4 R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2 + x^2}, \tag{13}$$

что позволяет находить значения функции $Q_{1/2}(g)$ через полные эллиптические интегралы K и E. На основании (3), записанной и как выражение 2.1 в [4], была получена формула для силы взаимодействия двух соосных витков с токами i_1 и i_2, в виде выражения 2.3 в [4], которое не лишено опечаток, но здесь на подробностях останавливаться не будем.

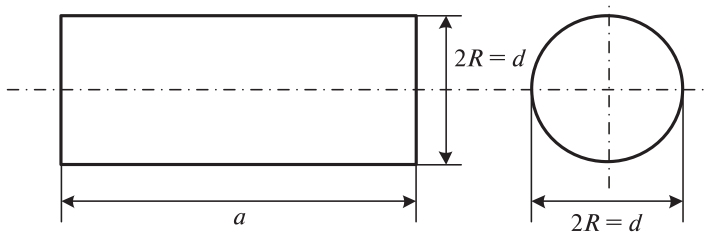

Рис. 2. Тонкослойная катушка кольцевого сечения.

Перейдем к ряду (71А) в [2] для коэффициента самоиндукции соленоида с числом витков w, который в обозначениях рис. 2 можно записать в виде:

$$L = \mu_0 R w^2 \left[\ln\left(\frac{8R}{a}\right) - \frac{1}{2} + \frac{\alpha^2}{8}\left(\ln\frac{8R}{a} + \frac{1}{4}\right) - \frac{\alpha^4}{64}\left(\ln\frac{8R}{a} - \frac{2}{3}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{5\alpha^6}{1024}\left(\ln\frac{8R}{a} - \frac{109}{120}\right) - \frac{35\alpha^8}{16\,384}\left(\ln\frac{8R}{a} - \frac{431}{420}\right) + \ldots \right]. \quad (14)$$

Записанное выражение для индуктивности можно найти в [3] путем объединения формул (118) и (119) в [3] с учетом применяемой системы единиц. Формула (14) записана под номером (6–8) в [1] в виде:

$$L = \mu_0 R w^2 \left[\left(1 + \frac{\alpha^2}{8} - \frac{\alpha^4}{64} + \frac{5\alpha^6}{1024} - \frac{35\alpha^8}{16\,384} + \ldots\right) \ln\frac{4}{\alpha} - \frac{1}{2} + \right.$$
$$\left. + \frac{\alpha^2}{32} + \frac{\alpha^4}{96} - \frac{109\alpha^6}{1024 \times 24} + \frac{431\alpha^8}{16\,384 \times 84} + \ldots \right] \quad (14а)$$

и рекомендована для $\alpha < 1,0$, т.е. для короткого соленоида, где

$$\alpha^2 = \frac{a^2}{4R^2} = \left(\frac{a}{d}\right)^2. \quad (15)$$

По утверждению в [2], записанное выражение (14) является хорошим приближением, вполне удобным для получения численных результатов. Точное выражение для индуктивности соленоида можно записать с помощью формул (6–1) и (6–3) в [1], а именно:

$$L = \frac{\mu_0 d w^2}{3}\left[\left(\alpha^2 + 1\right)^{1/2}\left(K + \frac{1 - \alpha^2}{\alpha^2} E\right) - \alpha^{-2}\right], \quad (16)$$

где K и E – полные эллиптические интегралы первого и второго рода с модулем

$$k = \frac{1}{\left(\alpha^2 + 1\right)^{1/2}}. \quad (17)$$

Поэтому $k^2 = \left(\alpha^2 + 1\right)^{-1}, \alpha^2 = k^{-2}\left(1 - k^2\right)$ и $\alpha^{-2} = \dfrac{k^2}{1 - k^2} = \left(\dfrac{d}{a}\right)^2$ и выражение (16) преобразуется к виду:

$$L = \frac{\mu_0 w^2 d}{3}\left(\frac{d}{a}\right)^2 \left[\frac{1 - k^2}{k^3} K(k) + \frac{2k^2 - 1}{k^3} E(k) - 1\right] = \frac{\mu_0 w^2}{4}\frac{d^2}{a}\pi k_L, \quad (18)$$

$$\text{где } k_L = \frac{4d/a}{3\pi}\left[\frac{1-k^2}{k^3}K(k)+\frac{2k^2-1}{k^3}E(k)-1\right], \tag{19}$$

а k_L можно назвать коэффициентом Нагаоки в форме Лоренца [7].

Полагая $k = \left(\frac{2}{g+1}\right)^{1/2}$ и используя связи полных эллиптических интегралов первого и второго рода с функциями Лежандра второго рода с полуцелым индексом [8], а именно:

$$Q_{-1/2}(g) = kK(k), \tag{20}$$

$$Q_{1/2}(g) - gQ_{-1/2}(g) = -\frac{2}{k}E(k), \tag{21}$$

подстановкой (20) и (21) в (18) находим:

$$\begin{aligned} L &= \frac{\mu_0 w^2 d}{3}\left(\frac{d}{a}\right)^2\left\{-1+\frac{g^2-1}{4}Q_{-1/2}(g)+\frac{3-g}{4}\left[gQ_{-1/2}(g)-Q_{1/2}(g)\right]\right\} = \\ &= \frac{\mu_0 w^2 d}{3}\left(\frac{d}{a}\right)^2\left\{-1-\frac{3-g}{4}Q_{1/2}(g)+\frac{3g-1}{4}Q_{-1/2}(g)\right\}. \end{aligned} \tag{22}$$

Таким образом, задавая $\alpha^2 = \left(\frac{a}{d}\right)^2$, находим k^2 и g, а по значениям g определяем $Q_{1/2}(g)$ и $Q_{-1/2}(g)$, и далее L в соответствии с (22).

Рассмотрим пример. Пусть $\alpha = \frac{a}{d} = 1, k^2 = 0.5, k = 0.7071$ и $g = 3.0$. Тогда в соответствии с формулой (22) и значением $Q_{-1/2}(3)$, равным 1.311, найдем [9]:

$$L = \frac{\mu_0 w^2 d}{3}\times 1.622.$$

Отметим связь между сферическими функциями $Q^1_{1/2}(g)$, $Q_{1/2}(g)$ и $Q_{-1/2}(g)$:

$$Q^1_{1/2}(g) = \frac{1}{2}\left(g^2-1\right)^{-1/2}\left[gQ_{1/2}(g)-Q_{-1/2}(g)\right], \tag{23}$$

что позволяет по значениям $Q^1_{1/2}(g)$ и $Q_{1/2}(g)$ находить $Q_{-1/2}(g)$.

Тогда выражение (22) можно перезаписать в виде:

$$L = \mu_0\frac{w^2 d}{3}\left(\frac{d}{a}\right)^2\left[-1+\frac{3\left(g^2-1\right)}{4}Q_{1/2}(g)-\frac{3g-1}{2}\left(g^2-1\right)^{1/2}Q^1_{-1/2}(g)\right], \tag{24}$$

Таблицы значений $Q^1_{1/2}(g)$ и $Q_{1/2}(g)$ даны в Приложении 1 [10]. Сопоставим полученное значение 1.622 с результатом по формуле (14а). Имеем при $\frac{a}{2R} = \alpha = 1$ в соответствии с (14а):

$$L = \mu_0\frac{d}{3}w^2\times 1.6218,$$

т.е. практическое совпадение.

В заключение приведем сопоставительную таблицу некоторых значений для взаимной индуктивности в единицах $\mu_0 R_1$ по формулам (5–20) и (5–21) с использованием таблицы 5–5 [1] для контуров с неодинаковыми радиусами и аналогичными результатами по формуле (1), заимствованной из [2].

Таблица 1

x	R_2	M [1]	M [2]
0	$0.2R_1$	0.063	0.056
0	$0.3R_1$	0.146	0.145
$0.4R_1$	$0.2R_1$	0.051	0.048
$0.5R_1$	$0.4R_1$	0.179	0.179
$0.4R_1$	$0.3R_1$	0.116	0.122
$0.5R_1$	$0.3R_1$	0.102	0.106

Следует отметить, что преимущество выражений через сферические функции для коэффициентов само- и взаимоиндукции по отношению к графическим и табличным данным состоит еще и в возможности нахождения электродинамических сил через производные от этих коэффициентов по обобщенным координатам [11], используя определение для функций Лежандра второго рода m-го порядка в виде

$$Q_{1/2}^{m}(g) = \left(g^2 - 1\right)^{m/2} \frac{d^m Q_{1/2}(g)}{dg^m},$$

где g — обобщенная координата [12].

Приложение 1

Рассмотрим выражение в квадратных скобках (11) с учетом (5). Имеем:

$$\left(1 + \frac{3}{8}\Delta g\right)\ln\left(\frac{8}{2^{1/2}(\Delta g)^{1/2}}\right) - 2 - \frac{\Delta g}{8} = \left(1 + \frac{3}{8}\Delta g\right)\left[\ln\frac{8}{2^{1/2}} - \frac{1}{2}\ln(\Delta g)\right] - 2 - \frac{\Delta g}{8} =$$

$$= \frac{1 + \frac{3}{8}\Delta g}{2}\ln\frac{1}{\Delta g} + \frac{1 + \frac{3}{8}\Delta g}{2} 2\ln\frac{8}{2^{1/2}} - 2 - \frac{\Delta g}{8} =$$

$$= \frac{1 + \frac{3}{8}\Delta g}{2}\ln\frac{1}{\Delta g} + \frac{1 + \frac{3}{8}\Delta g}{2}\ln(2 + \Delta g) - \frac{1 + \frac{3}{8}\Delta g}{2}\ln(2 + \Delta g) +$$

$$+ \frac{1 + \frac{3}{8}\Delta g}{2} 2\ln\frac{8}{2^{1/2}} - 2 - \frac{\Delta g}{8} = \frac{1 + \frac{3}{8}\Delta g}{2}\ln\frac{2 + \Delta g}{\Delta g} + \frac{1 + \frac{3}{8}\Delta g}{2}\left[2\ln\frac{8}{2^{1/2}} - \ln(2 + \Delta g)\right] -$$

$$- 2 - \frac{\Delta g}{8} + \frac{1 + \frac{3}{8}\Delta g}{2} \times 1.2274 - \frac{1 + \frac{3}{8}\Delta g}{2} \times 1.2274.$$

Так как $\ln(2 + \Delta g) \cong \ln 2 + \frac{\Delta g}{2}$, а $2\ln\frac{8}{2^{1/2}} = \ln 32$, то учитывая, что $\ln 32 + 1.2274 - \ln 2 = 4$, найдем:

$$Q_{1/2}(1 + \Delta g) = \frac{1 + \frac{3}{8}\Delta g}{2}\left[\ln\frac{2 + \Delta g}{\Delta g} - 1.2274 + 4 - \frac{\Delta g}{2}\right] - 2 - \frac{\Delta g}{8}.$$

Окончательно: $Q_{1/2}(1+\Delta g) \cong \dfrac{1+\frac{3}{8}\Delta g}{2}\left(\ln\dfrac{2+\Delta g}{\Delta g} - 1.2274\right) + \dfrac{3}{8}\Delta g.$

Полученное выражение для $Q_{1/2}(1+\Delta g)$ совпадает с формулой (6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Калантаров П.Л., Цейтлин Л.А.* Расчет индуктивностей. Справочная книга. Л.: Энергоатомиздат. ЛО, 1986. 488 с.
2. *Dwight H.B., Grover F.W.* Some series formulas for mutual Inductance of Solenoids. Electrical Engineering. March 1937. P. 347–354.
3. *Grover F.W.* Inductance calculations. Working formulas and tables. New York: D. Van Nostrand Co.Inc., 1947.
4. National Bureau of Standards. Circular 544/Snow Ch. Formulas for Computing Capacitance and Inductance. 1954. P. 69.
5. *Цицикян Г.Н.* Взаимные индуктивности и силы взаимодействия соосных контуров, соленоидов и катушек. Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. 1985. № 6. С. 90–99.
6. *Цицикян Г.Н.* Векторный потенциал поля медленно движущихся тел в приложении к задачам электродинамической левитации. Известия РАН. Энергетика. 1994. № 4. С. 130–144.
7. *Knight W. David*. Solenoid inductance calculation. Devon, England. 2016. website http://g3ynh.info/zdocs/ magnetics/.
8. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: "Наука" ГРФМЛ., 1979.
9. *Цицикян Г.Н.* О взаимной индуктивности и электродинамических силах взаимодействия коаксиальных контуров. Известия РАН. Энергетика. 2018. С. 40–45.
10. *Цицикян Г.Н.* О коэффициентах взаимной индукции и силах взаимодействия круговых коаксиальных контуров. Электричество. 2019. № 6. С. 59–65.
11. *Кузнецов И.Ф., Цицикян Г.Н.* Электродинамические усилия в токоведущих частях электрических аппаратов и токопроводах. Л.: Энергоатомиздат. ЛО, 1989. 176 с.
12. *Цицикян Г.Н.* Электродинамические силы в токоведущих частях электротехнических комплексов. Монография. СПб.: ФГУП "Крыловский государственный научный центр". 2016. С. 94.

Coefficients of Mutual Inductance and Self-Induction of Coaxial Circular Loops and Solenoids

G. N. Tsitsikyan[a], * and M. Yu. Antipov[a], **

[a] *TsNII SET branch of the Krylov State Research Centre, SPb, Russia*

**e-mail: george.20021940@mail.ru*

***e-mail: posich@mail.ru*

A comparison of a number of expressions for the coefficients of mutual and self-induction of circular loops and solenoids, available in comparatively early publications, mainly related to the names of Dwight and Grover, and publications of a later period, differing in the presentation of alternative closed-form expressions for the same coefficients, is carried out. The expediency of such a review, including practical applications, was emphasized.

Keywords: mutual induction, solenoid inductance, series, Legendre spherical functions with half-integer subscript